

Electrostatique et magnétostatique

Lorsque les sources de champ électromagnétique correspondent à une **distribution permanente dans l'espace (densité de charge et densité de courant stationnaires)**, alors leurs effets sont découplés :

- la **distribution des charges** est exclusivement responsable d'un **champ électrostatique**
- la **distribution des courants** est exclusivement responsable d'un **champ magnétostatique**

Lorsque les **distributions seront variables (non-stationnaires)**, on ne pourra plus découpler ces causes et leurs effets et c'est donc une distribution de charges et de courants qui sera responsable d'un **champ électromagnétique**.

La charge électrique q

- Rappel des propriétés :
 - ▶ Positive ou négative (scalaire relatif)
 - ▶ Extensive
 - ▶ Invariante par changement de référentiel
 - ▶ Quantifiée
 - ▶ Conservative

Modèles de distributions continues

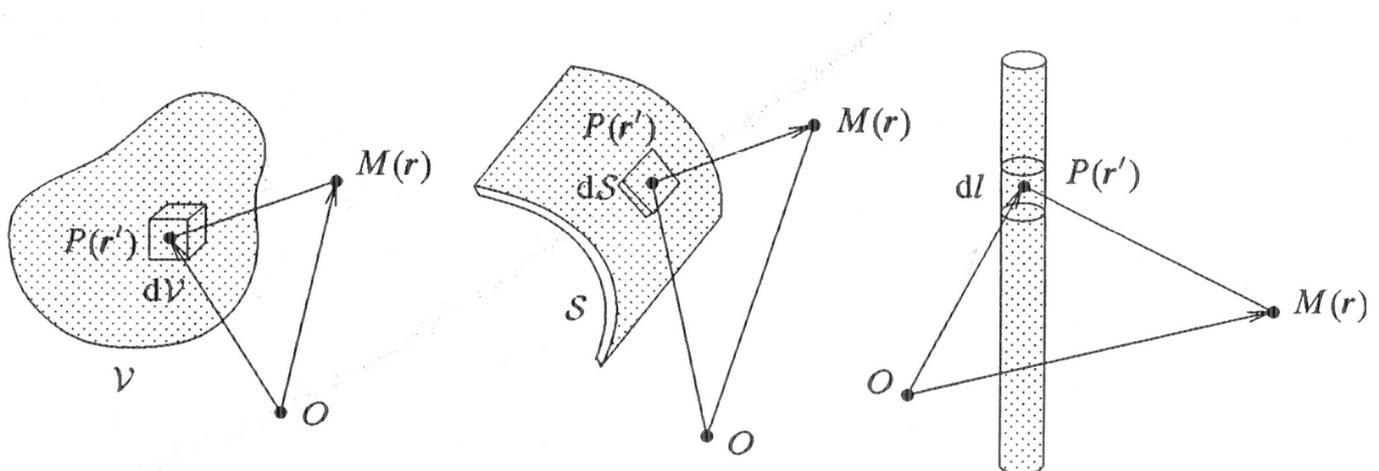
Un milieu chargé continument (fluide d'excédent de charges) : Un modèle de distribution volumique continue est envisageable s'il existe une échelle mésoscopique c-a-d une échelle de dimension suffisamment grande à l'échelle microscopique pour pouvoir définir une grandeur locale moyennée (nivelée) (densité volumique de charge) qui soit physiquement représentative du milieu chargé et suffisamment petite devant l'échelle macroscopique pour que l'on puisse assimiler la somme des charges à l'échelle macroscopique à une somme continue (intégrale).

$$Q_{Dvol_macro} \equiv \iiint_{\substack{\text{volume} \\ \text{macroscopique}}} \rho(P, t) \cdot d\tau$$

$$\text{avec } \rho(P, t) \equiv \frac{dq}{d\tau}(P, t) \simeq \frac{\Delta q}{\Delta\tau}(P, t)$$

Le volume $\Delta\tau$ autour du point P est choisi suffisamment important pour que la variation relative de $\frac{\Delta q}{\Delta\tau}(P, t)$ soit très faible sur des longueurs $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Les trois modèles de distributions continues



Attention à ce genre de représentations !!!

...qui sont toutes des modèles volumiques...

si la nappe a une épaisseur finie non nulle ou si le fil a une section non-nulle !

Modèles de distributions

Si la distribution de charge à l'échelle de son observation est confinée à une nappe d'épaisseur très faible devant les distances caractéristiques d'évolution continue des grandeurs physiques, on choisit un modèle surfacique en faisant tendre cette épaisseur vers zéro. Cette discontinuité est donc généralement artificielle et implique de substituer les équations continues d'évolution spatiale à la traversée de cette surface par des « relations de passage ».

$$Q_{Dsurf_{macro}} \equiv \iint_{\substack{\text{surface} \\ \text{macroscopique}}} \sigma(P, t) \cdot dS$$

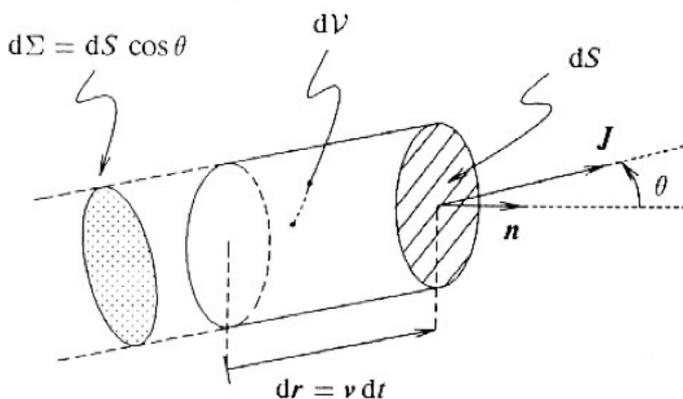
$$\text{avec } \sigma(P, t) \equiv \frac{dq}{dS}(P, t) \simeq \frac{\Delta q}{\Delta S}(P, t)$$

Lorsque la distribution est filiforme, on définit alors la charge linéique :

$$Q_{Dfil_{macro}} \equiv \int_{\substack{\text{contour} \\ \text{macroscopique}}} \lambda(P, t) \cdot dl$$

$$\text{avec } \lambda(P, t) \equiv \frac{dq}{dl}(P, t) \simeq \frac{\Delta q}{\Delta l}(P, t)$$

Modèles de distributions de courants



Les charges mobiles i traversant la section dS pendant dt sont comprises dans le cylindre biseauté de section droite $d\Sigma$ et de longueur $v_i dt$

$$di_{dS} = \sum_{\substack{\text{charges mobiles} \\ \text{de type } i}} \frac{\rho_i \cdot dS \cdot \cos(\theta_i) \cdot v_i \cdot dt}{dt} = \sum_{\substack{\text{charges mobiles} \\ \text{de type } i}} \frac{\vec{\rho}_i \cdot \vec{v}_i \cdot dS}{dt}$$

$$di_{dS} = \sum_{\substack{\text{charges mobiles} \\ \text{de type } i}} \vec{\rho}_i \cdot \vec{v}_i \cdot dS = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Modèles de distributions de courants

Lorsque des porteurs de charges sont en mouvement dans le référentiel d'étude (et si le modèle est là-encore celui d'un fluide continu à l'échelle mésoscopique), l'expression locale du vecteur densité volumique de courant est la suivante :

$$\vec{j} = \sum_{\text{charges de type } i} n_i \cdot q_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{\text{charges de type } i} \rho_i \cdot \vec{v}_i$$

avec n_i la densité volumique locale de porteurs de charge q_i
et \vec{v}_i la vitesse locale moyenne d'ensemble des porteurs de charges q_i

Malgré l'appellation « volumique », cette grandeur s'exprime bien en $A \cdot m^{-2}$ puisque l'intensité du courant électrique traversant une surface orientée s'écrit :

$$i(S) \left(\equiv \frac{dq}{dt} \right) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

L'intensité est donc le flux algébrique du vecteur densité volumique de courant à travers la surface S

Modèle de distribution surfacique

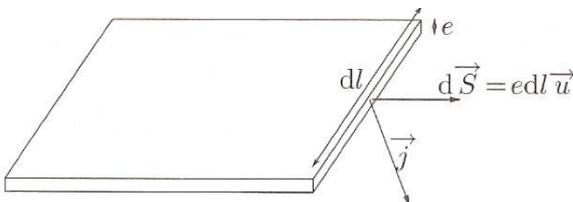
Densité de courant surfacique

$$\vec{j}_s \equiv \sum_{\text{charges de type } i} \sigma_i \cdot \vec{v}_i$$

avec σ_i la densité surfacique locale de porteurs de charge q_i
et \vec{v}_i la vitesse locale moyenne d'ensemble des porteurs de charges q_i

On peut relier densité volumique et surfacique de courant par

$$\vec{j}_s = \lim_{e \rightarrow 0} (\vec{j} \cdot \vec{e}) \quad \text{avec } e \text{ l'épaisseur de la nappe réelle}$$



L'intensité élémentaire traversant la section de longueur dl et d'épaisseur e s'écrit :

$$di(dS) = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{e} \cdot dl' \cdot \vec{u} = \vec{j}_s \cdot dl' \cdot \vec{u}$$

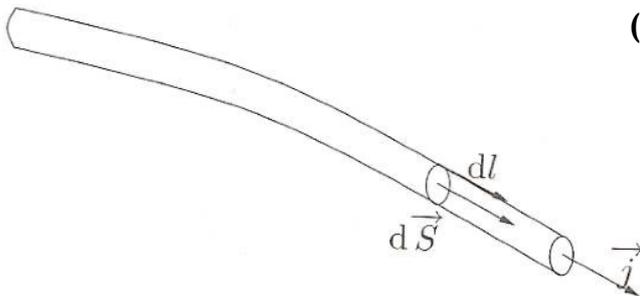
Modèles de distribution linéique

Élément de courant \neq courant élémentaire

Pour un conducteur approximé filiforme et parcouru localement par un courant d'intensité i , on définit un élément de courant par :

$$i \cdot d\vec{l} = \left(\vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} \right) \cdot d\vec{l} = \vec{j} \cdot \left(\overrightarrow{dS} \cdot d\vec{l} \right) = \vec{j} \cdot d\tau (= \sum_i dq_i \cdot \vec{v}_i)$$

(tous ces vecteurs sont colinéaires)



Conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur conservative c'est à dire qu'elle n'est ni créée à partir d'une charge nulle ni annihilée (terme de production nul). Notons bien que ce résultat n'est pas en contradiction avec des processus au cours desquels apparaissent ou disparaissent simultanément et en un même point des charges élémentaires opposées (par exemple création ou annihilation d'une paire électron positron). En effet, la conservation concerne la charge totale et non un type donné de charges.

Expression intégrale

S'il y a variation de la charge contenue dans un volume V délimité par une surface de contrôle (frontière fictive), elle est due au bilan algébrique des flux de charge entrant et sortant (= courants)

$$\frac{dQ}{dt} \text{ volume } V_c \text{ délimité par } S_c = \phi \text{ algébrique entrant dans } S_c \Leftrightarrow \frac{d \iiint_{V_c} \rho \, d\tau}{dt} = I_e - I_s = \oiint_{S_c} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{entrant}$$

Conservation de la charge

Expression locale

$$\frac{d \iiint_{V_c} \rho d\tau}{dt} = \oiint_{S_c} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{entrant} \Leftrightarrow \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iiint_{V_c} \operatorname{div}(\vec{j}) d\tau$$

soit : $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0}$ puisque l'expression précédente est valable $\forall V_c$

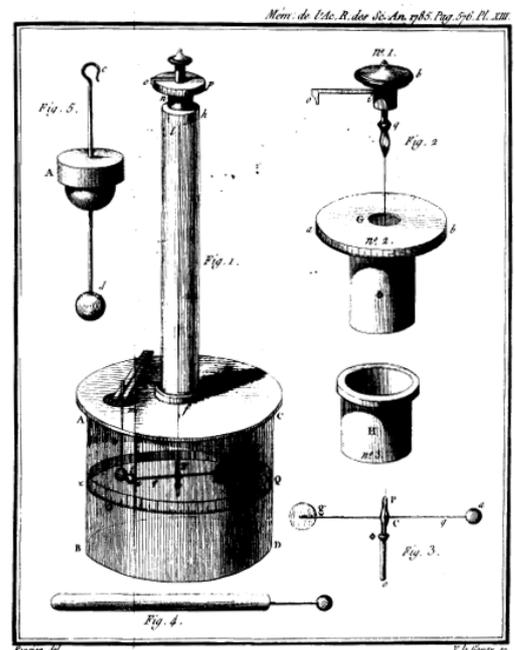
Loi de Coulomb

Caractéristiques de l'interaction coulombienne



En 1785, Charles-Augustin COULOMB déduit d'expériences (balance de torsion à fil d'argent avec épingles à tête chargée électriquement) la forme de l'expression de la force d'interaction entre deux charges placées en A et B :

- la norme de la force $F_{A \rightarrow B}$ exercée par la charge ponctuelle A sur la charge ponctuelle B est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les charges
- la direction de $F_{A \rightarrow B}$ est celle du vecteur position relative \vec{AB}
- les forces qu'exercent entre elles deux charges ponctuelles sont opposées $F_{A \rightarrow B} = - F_{B \rightarrow A}$
- la force résultant de l'action simultanée de A et B sur C est la somme vectorielle $F_{A \rightarrow C} + F_{B \rightarrow C}$



Loi de Coulomb

Caractéristiques de l'interaction coulombienne

Ces premières constatations induisent :

- une expression de la force $F_{A \rightarrow B}$: $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \varphi(A, B) \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}$ avec $\varphi(A, B)$ fonction scalaire des états électriques
- le principe de superposition des actions électrostatiques
- la compatibilité de cette action avec le principe des actions réciproques

L'expérience consistant à modifier la charge en A (q_A remplacée par q'_A) sans modifier la charge en B montre que dans ces situations on trouve :

$$\frac{\vec{F}'_{A \rightarrow B}}{\vec{F}_{A \rightarrow B}} = \frac{\varphi'(A, B)}{\varphi(A, B)} \text{ indépendant de l'électrisation de B}$$

(cette observation étant bien sûr symétrique pour B)

On en déduit que la fonction scalaire est de type : $\varphi(A, B) = k \cdot q_A \cdot q_B$
avec k une constante indépendante des charges.

En écrivant que : $\frac{\vec{F}'_{A \rightarrow B}}{\vec{F}_{A \rightarrow B}} = \frac{\varphi'(A, B)}{\varphi(A, B)} = \frac{q_{A'}}{q_A} \Leftrightarrow \frac{\vec{F}'_{A \rightarrow B}}{q_{A'}} = \frac{\vec{F}_{A \rightarrow B}}{q_A}$ grandeur indépendante de la charge en A

on fait apparaître une grandeur caractérisant l'effet électrostatique en A de la charge q_B en B : son champ électrique

Loi de Coulomb

Expression complète de l'interaction

En choisissant une unité étalon (le Coulomb) pour la charge électrique, l'expression de cette force (dans le vide même si les expériences ont été faites dans l'air sous pression atmosphérique) fait apparaître une constante ϵ_0 appelée permittivité du vide :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot q_A \cdot q_B \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3} = \frac{q_A \cdot q_B}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$$

avec $\vec{u}_{AB} \equiv \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ vecteur unitaire dirigé de A vers B

$$\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ USI} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$$

(plus précisément $\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)

Remarquons l'étonnante similitude avec la force d'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles (ou deux corps à distribution sphérique de masse) énoncée par Newton dans les « Principia » parus en 1687 (un siècle avant) :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -G \cdot m_A \cdot m_B \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3} = -G \cdot m_A \cdot m_B \cdot \frac{\vec{u}_{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$$

avec $G = 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On nommera préférentiellement P la position de la charge responsable de l'action sur la seconde charge placée en M (appelée « charge test » ou « charge d'épreuve ») :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_P q_M \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}$$

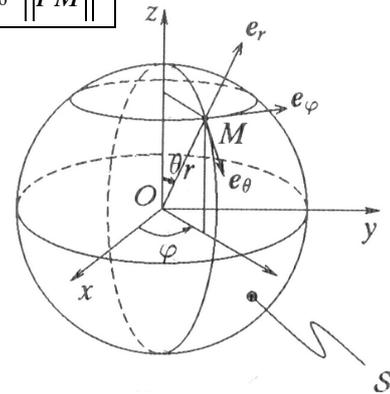
On définit alors le champ électrostatique $E(M)$ créé en M par la charge en P par le rapport indépendant de la charge test :

$$\vec{E}(M)_{/q_P} \equiv \frac{\vec{F}_{P \rightarrow M}}{q_M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_P \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q_P}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}$$

-Ce champ n'est pas défini en $M=P$
-L'unité du champ électrique est le $V.m^{-1}$

Si la charge q est seule immobile dans l'espace, alors on choisit sa position comme origine O des positions dans l'espace de telle façon que le champ qu'elle crée dans tout l'espace s'écrit à une position quelconque M :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$



symétrie sphérique ou isotropie du champ

Principe de superposition

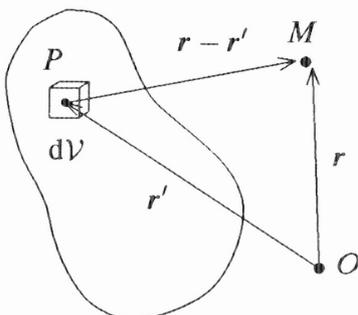
Le champ électrostatique créé par une charge en un point de l'espace est indépendant de la présence d'autres charges.

La force résultante (somme vectorielle des diverses interactions de Coulomb sur une charge) permet donc de définir un champ électrostatique résultant somme des champs créés par chacune des charges d'une distribution discrète aux positions P_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}$$

Dans le cas de distributions continues (volumique, surfacique ou linéique) le champ créé devient une somme continue :

$$dE(M) = \frac{\rho(P) dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$



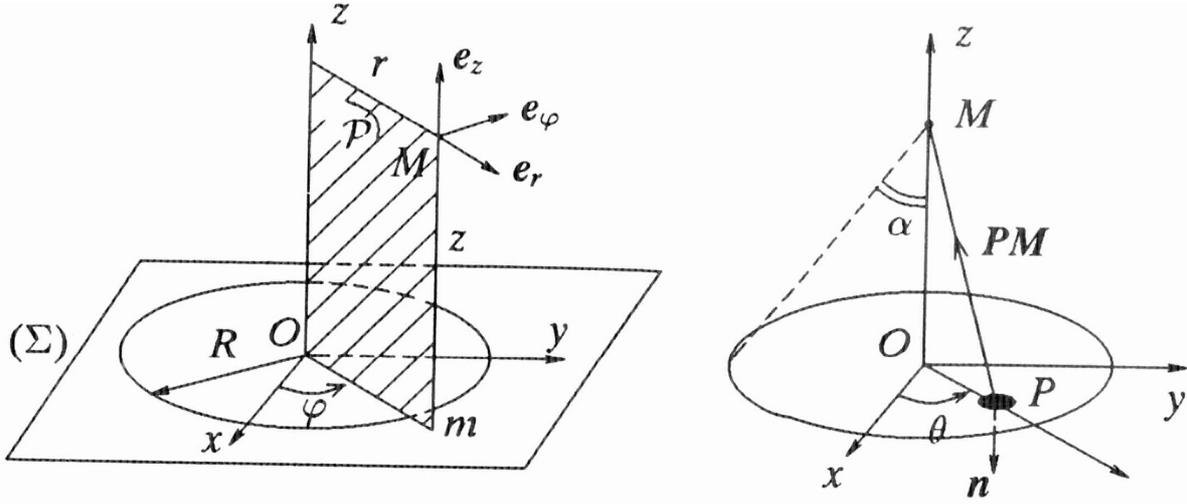
$$\vec{E}(M) = \iiint_{\text{distribution volumique}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{distribution volumique}} \rho(P) \cdot d\tau_P \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{\text{distribution surfacique}} \sigma(P) \cdot dS_P \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\text{distribution linéique}} \lambda(P) \cdot dl_P \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

Application du principe de superposition

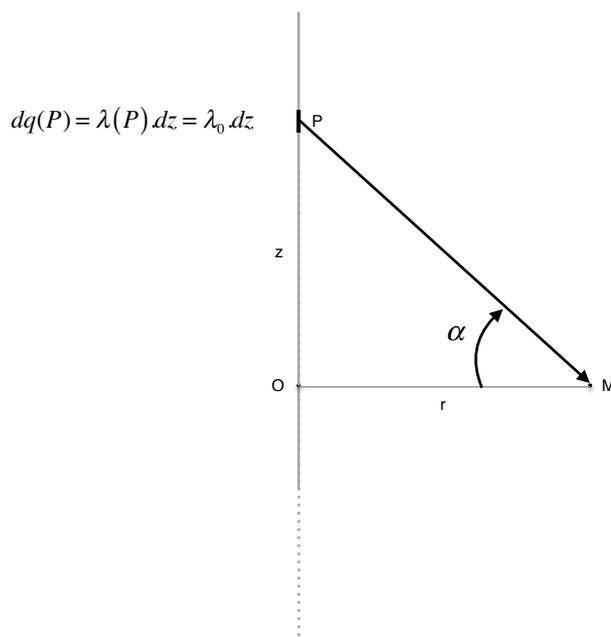
Champ électrostatique
créé par un disque chargé uniformément en surface



cas général + cas particulier du plan infini + 2 plans infinis antisymétriques

Application du principe de superposition

Champ électrostatique
créé à distance r d'un fil infini chargé uniformément



Applications du principe de superposition

Champ électrostatique

créé par une sphère uniformément chargée en volume



Divergence et flux d'un champ coulombien

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Rappel de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(E_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial \varphi} \quad \begin{cases} \theta \neq k\pi \\ r \neq 0 \end{cases}$$

Conséquence sur le flux élémentaire au travers une surface fermée ne contenant pas la charge ponctuelle ($r \neq 0$) ?

Rappel du théorème de Green-Ostrogradski

$$\phi_{\text{sortant}} \equiv \oiint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div}(\vec{E}) d\tau$$

Calcul du flux au travers une sphère fermée de rayon R quelconque centrée sur la charge ponctuelle

$$\oiint_{\text{Sphère } R} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Conséquence sur le flux intégral au travers une surface fermée quelconque contenant la charge ponctuelle ?

Généralisation par le principe de superposition : forme intégrale du théorème de Gauss

La forme intégrale s'écrit donc pour une distribution discrète de charges :

$$\phi_{\text{sortant}} \equiv \oiint_{S(V)} \vec{E}_{TOT} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = \oiint_{S(V)} \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = \sum_i \left(\oiint_{S(V)} \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} \right) = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}(V)}}{\epsilon_0}$$

Pour une distribution continue volumique de charges :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint_{V(S)} \frac{\rho(P) \cdot d\tau}{\epsilon_0} = \oiint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = \iiint_{V(S)} \text{div}(\vec{E}) \cdot d\tau$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout volume (même infinitésimal au voisinage d'un point M quelconque), on peut en déduire la validité de l'équation locale :

$$\boxed{\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

forme locale du théorème de Gauss

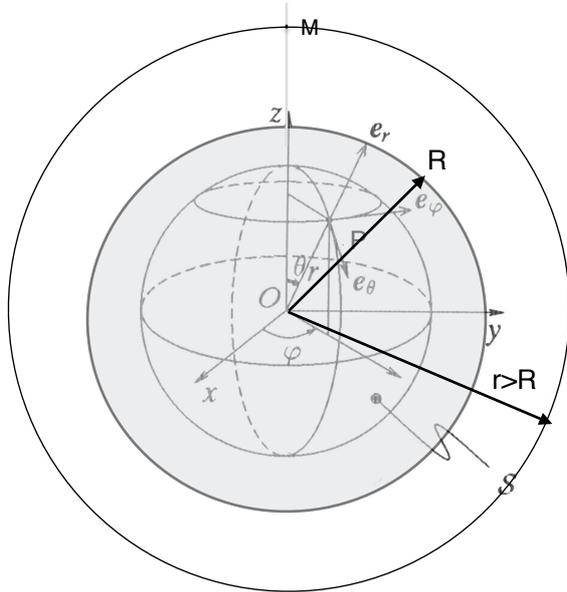
Analogie avec le champ gravitationnel Newtonien

ELECTROSTATIQUE	GRAVITATION
Force électrostatique entre deux charges, attractive ou répulsive: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1,2}$ $\vec{u}_{1,2}$ vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2	Force de gravitation entre deux masses, toujours attractive: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2}$ $\vec{u}_{1,2}$ vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2
Charge q	Masse m
Constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante $-G$
Champ électrostatique créé par une charge q : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$	Champ gravitationnel créé par une masse m : $\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$
Force subit par une particule test q_0 dans le champ électrostatique : $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$	Force subit par une particule test m_0 dans le champ gravitationnel : $\vec{F}_0 = m_0 \vec{g}$
Théorème de Gauss : $\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ $Q_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \rho_{\text{int}} dV$	Théorème de Gauss : $\Phi_g = \oiint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi M_{\text{int}}$ $M_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \rho_{\text{int}} dV$

Applications du théorème de Gauss

Champ électrostatique

créé par une sphère uniformément chargée en volume

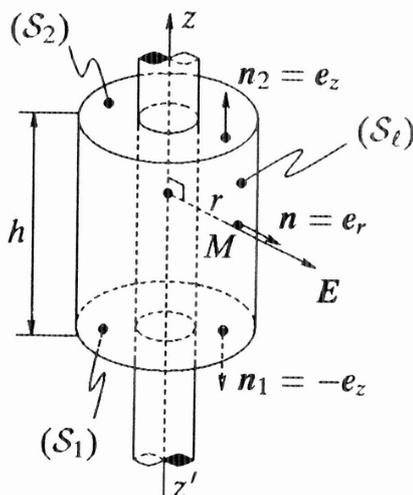


- Expression du champ radial pour $r < R$
puis $r > R$
- Continuité du champ en R
- Et si la sphère n'était chargée qu'en surface ?
 - champ intérieur
 - champ extérieur
- Conclusion sur une distribution à couches sphériques.

Applications du théorème de Gauss

Champ électrostatique

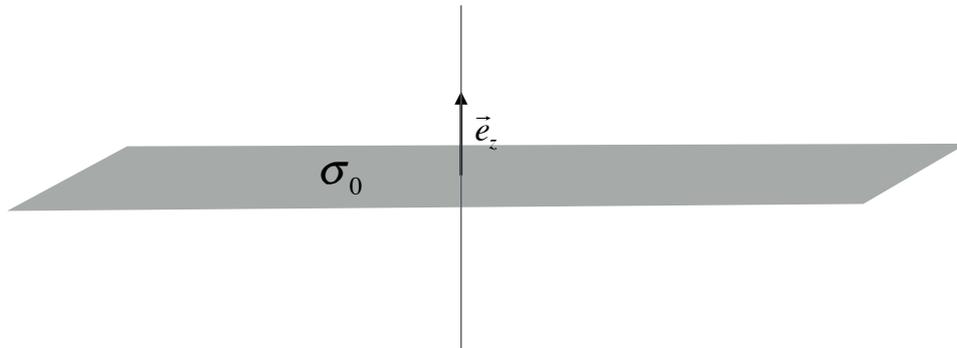
créé par un cylindre chargé en volume



- Expression du champ radial pour $r < R$
puis $r > R$
- Continuité du champ en R
- Et si on assimilait le fil chargé à une distribution linéique ?

Applications du théorème de Gauss

Champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément



- Comment choisir la surface d'intégration du flux ?
- Pouvait-on faire le même choix pour un disque chargé de rayon fini ?
- Continuité du champ en $z=0$?
- Et si on place un second plan infini parallèle de densité surfacique opposée et écarté de la distance e ?

Circulation d'un champ vectoriel

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}(M)$ d'un point P à un point Q le long d'une courbe orientée Γ est par définition

$$C_{PQ} = \int_P^Q \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}.$$

La circulation du champ sur un contour est notée
fermé orienté

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M) \cdot d\vec{l}.$$

► Le signe de la circulation dépend de choix de l'orientation du contour.

- cas d'un champ coulombien ?
- cas général d'un champ électrostatique ?

Circulation d'un champ de gradient

La circulation d'un gradient d'un point à un autre est indépendante du chemin suivi. En particulier, la circulation d'un gradient sur un contour fermé est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} G \cdot d\vec{l} = 0.$$

► Un champ de gradient est à circulation conservative.

- définition du potentiel électrostatique V
- quelle est l'origine des potentiels ?

Théorème de Stokes-Ampère

La circulation d'un champ vectoriel \vec{A} le long d'un contour fermé Γ est égale au flux de son rotationnel à travers *toute* surface Σ s'appuyant sur ce contour, si \vec{A} est continu sur Σ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(P) \cdot d\vec{P} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A}(Q) \cdot d\vec{S}.$$

► Il est remarquable de noter que l'intégrale double, qui fait intervenir les valeurs de $\vec{A}(M)$ en tout point $M \in \Sigma$, peut être calculée par une intégrale simple ne faisant intervenir que les valeurs de $\vec{A}(M)$ sur le contour Γ .

Champ à circulation conservative

D'après le théorème de Stokes-Ampère,

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(P) \cdot d\vec{P} = 0 \iff \text{rot } \vec{A} = \vec{0}.$$

► **Tout champ à rotationnel identiquement nul est à circulation conservative.**

Rotationnel du champ électrostatique

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Surfaces équipotentielles

- Montrer qu'elles sont perpendiculaires en tout point aux lignes de champ

Expression des potentiels

- Potentiel créé par une charge ponctuelle
- Potentiel créé par une sphère chargée en volume
- Potentiel créé par une sphère chargée en surface
- Cas d'un champ uniforme :
 - évolution du potentiel dans l'espace intérieur d'un condensateur plan infini et relation entre le champ et la ddp.
 - relation entre la charge portée et la ddp
 - capacité d'un condensateur plan dans le vide

Equation de Poisson de l'électrostatique

$$\text{div}(\vec{E}) = \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)) \equiv -\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

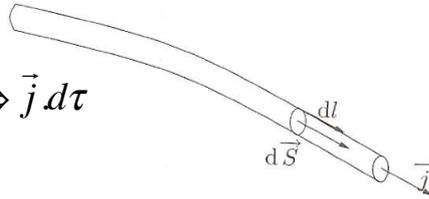
Relation entre distribution volumique de charges et potentiel électrostatique :

- repérage des charges par les extrema de potentiel.
- résolution de l'équation de Poisson avec des conditions aux limites (TP Python)

Champ magnétostatique créé par des distributions volumiques et linéiques

Les sources de champ magnétostatiques sont de deux types : les aimants (Hors-programme) et les distributions de courant (décomposables en éléments de courant)

On a montré qu'un élément de courant pouvait s'écrire suivant le modèle (linéique ou volumique) : $i \vec{dl} \Leftrightarrow \vec{j} d\tau$



La loi de BIOT et SAVART donne le champ **B** par superposition de contributions élémentaires :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{distribution volumique de courant}} \frac{(\vec{j}_P \cdot d\tau_P) \times \vec{PM}}{PM^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{distribution linéique de courant}} \frac{(i(P) \cdot d\vec{l}_P) \times \vec{PM}}{PM^3}$$

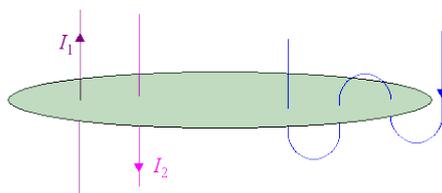
Ce qui est totalement Hors-Programme 2015 !!

On retient tout de même que le principe de superposition peut être utilisé pour déterminer un champ magnétostatique : champ indépendant créé par chaque source

Théorème d'Ampère de la magnétostatique

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé et orienté est égal à μ_0 fois l'intensité enlacée par ce contour (règle du « tire-bouchon » pour l'orientation du courant)

$$\oint_{C(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{(C)}$$



sur l'exemple ci-contre, on a « oublié » de préciser le sens de circulation. Ecrivez correctement le théorème d'Ampère après avoir fait un choix d'orientation

En utilisant l'opérateur rotationnel, proposer une version locale de ce théorème (cas d'une distribution volumique de courant).

Rotationnel du champ magnétostatique

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

Rappels sur les lignes et tubes de champ

Les **lignes de champ** sont tangentes en tout point au vecteur champ. Une ligne de champ d'un champ de vecteur $A(M)$ quelconque est une courbe orientée dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.

Ainsi le déplacement élémentaire orienté suivant une ligne de champ au point M

vérifie : $\vec{A}(M) \times \overrightarrow{dl}(M) = \vec{0}$ (à savoir écrire dans tous les systèmes de coordonnées)

Conséquences :

- Des lignes de champ ne peuvent se croiser (en dehors de points de champ nul ou infini)
- Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

Tube de champ : Soit un contour fermé Γ tel qu'en chaque point de Γ passe une ligne de champ particulière ($\vec{A} \neq \vec{0}$ et non colinéaire au contour). En prolongeant ces lignes de champ, on construit un tube de champ.

Conséquences

- La surface latérale d'un tube de champ n'est traversée par aucun flux de ce vecteur. On définit souvent des sections d'entrée et de sortie de la grandeur débitée.
- Lorsqu'un champ est à flux conservatif, le flux est le même quelle que soit la section de tube choisie.

Flux d'un champ magnétostatique

Le champ magnétostatique est **un champ à flux conservatif**, c'est à dire qu'il se conserve le long d'un tube de champ : si on définit une section droite « d'entrée » et une section droite de « sortie », le flux d'entrée égale le flux de sortie.

Et si on choisit un volume fermé quelconque dans l'espace (qu'il contienne des sources de courant ou pas), on peut écrire de façon plus générale :

$$\oint_{\text{surface fermée quelconque}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Quelle était la grandeur à flux conservatif en mécanique des fluides lorsque l'écoulement était incompressible ?

Comment écrivait-on cette propriété sous forme locale ?

Divergence du champ magnétostatique

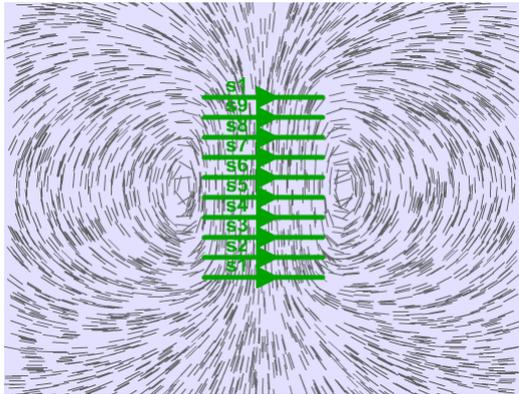
$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

Calculs de champs magnétostatiques par le théorème d'Ampère

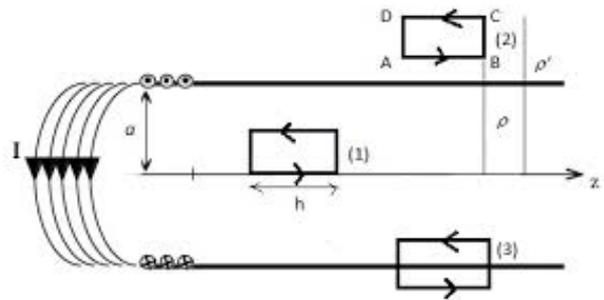
Le fil rectiligne infini de section nulle parcouru par un courant I

Le fil rectiligne infini de section S non nulle parcouru par un courant de densité uniforme \vec{j}_0

Le solénoïde infini présentant n spires par unité de longueur parcourues par un courant I



Allure des lignes de champ au voisinage d'un solénoïde fini



La force électromagnétique de LORENTZ

La force exercée par une distribution volumique de charges et de courants décrite par les densités $\{\rho(P,t), \vec{j}(P,t)\}$ sur une charge ponctuelle q située à l'instant t en un point M et possédant un vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ dans le référentiel d'étude est donnée par la formule de LORENTZ :

$$\vec{F}(M,t) \equiv q \cdot \left(\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t) \times \vec{B}(M,t) \right)$$

où $\{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\}$ est le champ électromagnétique créé au point M par la distribution $\{\rho(P,t), \vec{j}(P,t)\}$

La force électromagnétique de

Interrogations

- force dépendante du référentiel à cause de $\vec{v}(M,t)$??
- Le champ électromagnétique $\{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\}$ est-il invariant par changement de référentiel ??
- Qu'induit la différence de localisation entre les sources $\{\rho(P,t), \vec{j}(P,t)\}$ et le champ $\{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\}$??
- Les composantes électriques $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ ont-elles les mêmes propriétés de symétrie vis à vis des distributions sources ??

Invariances par opérations de symétrie

PRINCIPE DE CURIE

«Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits»

«Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.»

«Sur la symétrie des phénomènes physiques»
(*Journal de physique, 3e série, t.III, 1894*)

Invariances par opérations de symétrie

Les lois fondamentales de la physique classique sont laissées invariantes par un ensemble de transformations appelé groupe d'invariance. (elles gardent la même forme lors de ces transformations)

Exemples :

- invariance euclidienne : translations et rotations dans l'espace euclidien
on vérifie aisément qu'une translation ne modifie en rien le principe fondamental de la mécanique du point par exemple :

$$\text{si } m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}) \text{ alors } m \cdot \frac{d^2(\vec{r} + \vec{r}_0)}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r} + \vec{r}_0) \text{ est vérifiée également.}$$

translation de la cause vectorielle (force) => translation de l'effet vectoriel (accélération)

C'est ce que vous utilisez pour justifier les invariances de E et B par translation le long d'un axe ou par rotation autour d'un axe lorsque les distributions sources admettent ces symétries : vous admettez que les équations reliant sources et champs sont invariantes par ces opérations de symétrie et vous obtenez donc les invariances sur les champs vectoriels à partir des invariances sur leurs causes.

- invariance temporelle : lois physiques invariantes par translation dans le temps (reproductibilité)

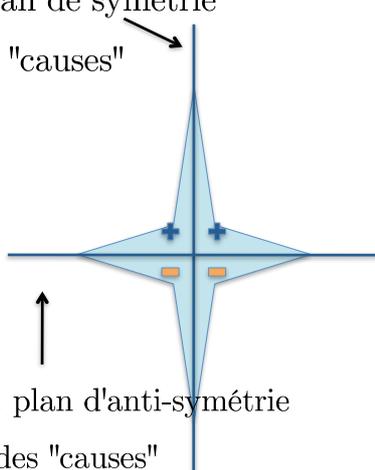
Invariances par symétrie plane (ou parité)

Application à la composante électrique \vec{E}

Cause :
distribution de charges uniforme et fixe

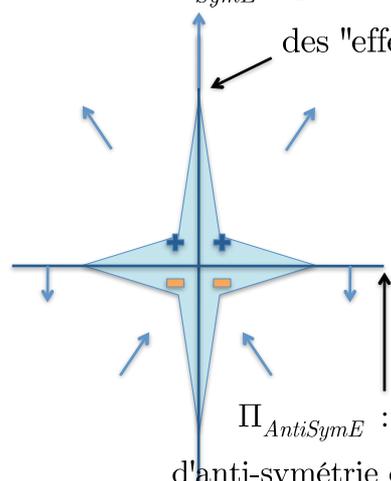
« Effet » :
Champ électrostatique

Π_{SymC} : plan de symétrie
des "causes"



$\Pi_{AntiSymC}$: plan d'anti-symétrie
des "causes"

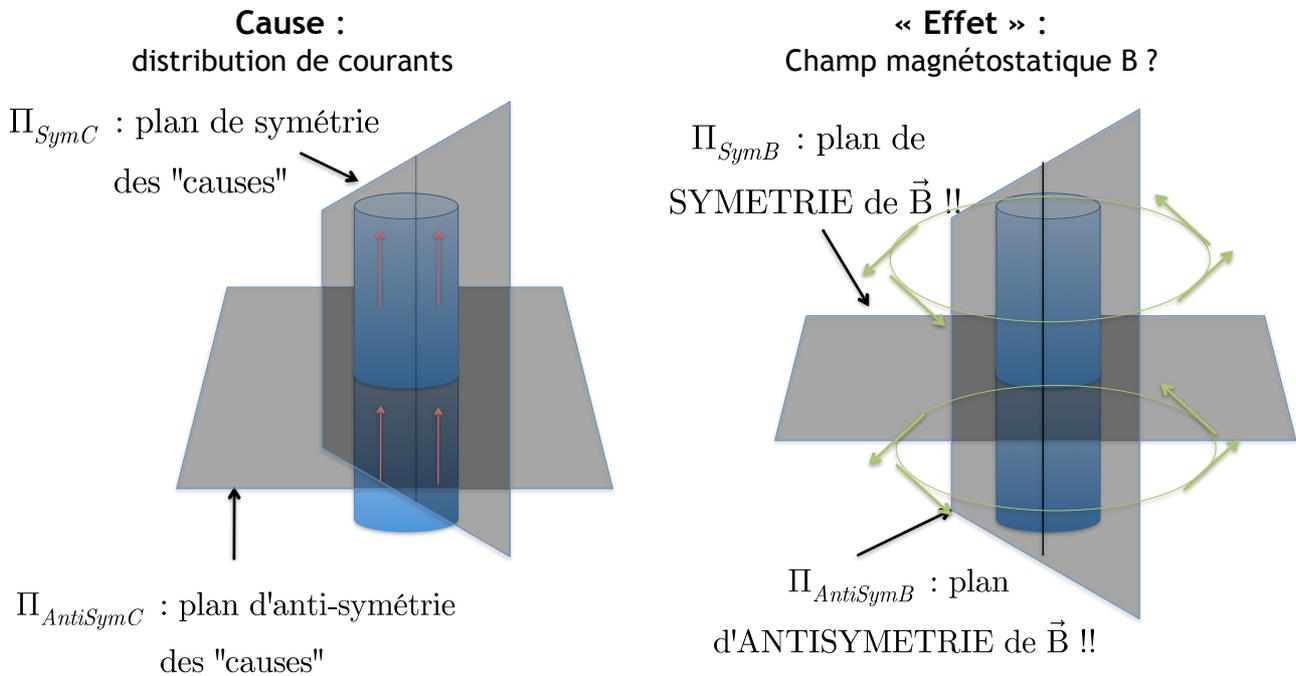
Π_{SymE} : plan de symétrie
des "effets"



$\Pi_{AntiSymE}$: plan
d'anti-symétrie des "effets"

Invariances par symétrie plane

Application à la composante magnétique \vec{B}



Invariances par opérations de symétrie

L'effet est en vérité la contribution $q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ de la force de Lorentz qui fait intervenir l'orientation de l'espace dans le produit vectoriel.

La composante magnétique vectorielle du champ a un sens lié à une convention d'orientation : c'est un **pseudo-vecteur** (ou un vecteur **axial**) (contrairement à la composante électrique du champ qui est un vecteur **polaire**)

Ainsi on aura les propriétés des deux composantes par rapport aux plans de symétrie et d'antisymétrie **des sources** :

-E appartient aux plans de symétrie **des sources** et est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie **des sources**

-Inversement, **B** appartient aux plans d'anti-symétrie **des sources** et est perpendiculaire aux plans de symétrie **des sources**

Invariances par opérations de symétrie

Les conséquences de l'existence de plans de symétrie ou d'antisymétrie des distributions traitées plus avant sont directement issues de **l'invariance des lois de l'électromagnétisme vis à vis de la symétrie plane** (opération de symétrie de seconde espèce) .

Plus visuellement , on affirme ainsi que les lois de la physique gardent leur forme de « l'autre côté du miroir ». En raisonnant alors sur l'association de la distribution réelle et de son image, on s'aperçoit que **la représentation du champ \mathbf{B}** ne respecte pas la parité mais cela ne signifie pas que les équations de Maxwell violent le principe de parité !

