Equations de Maxwell

Bilan d’énergie électromagnétique
ARQS (magnétique)

Ondes électromagnétiques

dans le vide

Equation d’onde de d’Alembert
Structure du champ électromagnétique
OPPH polarisées rectilignement
Réflexion sur un métal

Les équations de Maxwell

$$div\left(\vec{E}\left(M,t\right)\right)=\frac{\rho\left(P=M,t\right)}{\varepsilon_0}\quad\left(\text{Maxwell-Gauss}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\left(M,t\right)\right)=-\frac{\partial\vec{B}\left(M,t\right)}{\partial t}\quad\left(\text{Maxwell-Faraday}\right)$$

$$div\left(\vec{B}\left(M,t\right)\right)=0\quad\left(\text{Maxwell-flux}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\left(M,t\right)\right)=\mu_0.\vec{j}\left(P=M,t\right)+\varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial\vec{E}\left(M,t\right)}{\partial t}\quad\left(\text{Maxwell-Ampère}\right)$$

Les équations de Maxwell

- Le caractère axial de B reste-il cohérent?
- Equations de Maxwell dans le vide seulement ?
- Suffisantes pour l'obtention du champ électromagnétique ?
- Conséquence de la linéarité ?
- Et la conservation de la charge ?
- Champs statiques ?
- Formulations intégrales ?
- Cas des distributions surfaciques ?
- Ces équations sont-elles invariantes par changement de référentiel galiléen ?

Bilan d'énergie électromagnétique

Puissance reçue par les charges mobiles i' dans le référentiel du champ

$$P_{i'} = \sum_{i'} q_i{}'.\vec{E}.\vec{v}_{i'}$$

Cas d'un volume infinitésimal avec i types de charges

$$dP = \sum_{i} \rho_i.d\tau.\vec{E}.\vec{v}_i$$

Puissance volumique reçue par les charges mobiles

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$$

Conservation locale de la grandeur énergie électromagnétique

$$div\left(\vec{j}_{énergieEM}\right) + \frac{\partial(e_{EM})}{\partial t} = -\vec{j}.\vec{E}$$

Calcul de la divergence du vecteur de Poynting

$$\vec{j}_{énergieEM} \equiv \vec{\Pi} \equiv \vec{R} \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Bilan d'énergie électromagnétique

$$div\left(\vec{R}\right) + \frac{\partial(e_{EM})}{\partial t} = -\vec{j}.\vec{E}$$

$$\text{avec : } \vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{et : } e_{EM} = \frac{\varepsilon_0.E^2}{2} + \frac{B^2}{2.\mu_0}$$

Énergie d'une zone de champ EM délimité par le volume V :

$$EnergieEM(V) = \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_0.E^2}{2} + \frac{B^2}{2.\mu_0} \right).d\tau$$

Puissance EM traversant une section S orientée :

$$P(S) = \iint_S \vec{R}.d\vec{S} = \iint_S \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}.d\vec{S}$$

Les potentiels retardés

Définitions des potentiels

La propriété intrinsèque de B : $div\left(\vec{B}\left(M,t\right)\right)=0 \;\Rightarrow\; \exists\vec{A}$ avec $\vec{B}\equiv\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$

définit le potentiel vecteur à un gradient prés $\vec{B}\equiv\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}+\overrightarrow{grad}\left(f\right)\right)\;\;\forall f$

L'équation de Maxwell-Faraday permet de relier la composante électrique aux potentiels

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\left(M,t\right)\right)=-\frac{\partial\vec{B}\left(M,t\right)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)=\overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Soit à un gradient de potentiel près :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\left(M,t\right)+\overrightarrow{grad}(V)\right)=\overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

qui aboutit à un choix possible de potentiels

avec $\vec{E}\left(M,t\right)=-\overrightarrow{grad}(V)-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Les potentiels retardés

Conditions de Jauge

L'indétermination des potentiels permet de leur imposer des conditions supplémentaires dites « conditions de jauge ».

En régime variable, on a coutume d'utiliser la jauge de LORENTZ :

$$div\left(\vec{A}\right) + \varepsilon_0 . \mu_0 . \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

qui devient en magnétostatique : $$div\left(\vec{A}\right) = 0$$

(jauge de COULOMB)

Les potentiels retardés

Relation entre potentiels et charges

L'équation de Maxwell-Gauss associée à la relation aux potentiels donne :

$$div\left(-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Soit par définition du Laplacien scalaire : $$-\Delta V-\frac{\partial\left(div\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En statique, on obtient **la relation de Poisson** : $$\boxed{\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

En régime variable et avec la condition de jauge de Lorentz, on obtient l'équation de propagation du potentiel dans le vide :

$$\boxed{\Delta V-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Les potentiels retardés

Relations sources-potentiels

L'obtention du champ électromagnétique créé par une distribution volumique de sources peut se faire par l'intermédiaire des potentiels. Le principe de superposition appliqué à l'expression coulombienne du potentiel créé par une charge ponctuelle permet de valider l'expression suivante :

$$V\left(M,t\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{Distribution} \frac{\rho\left(P,t-\dfrac{PM}{c}\right)}{PM}.d\tau$$

mettant en évidence un retard de propagation associé à une célérité c indépendante du référentiel qui apparait naturellement dans la formulation ondulatoire conséquence directe des équations de Maxwell.

De la même façon, le potentiel vecteur dû aux éléments de courant s'écrit sous forme de l'intégrale de volume (à rapprocher de la loi de Biot et Savard) :

$$\vec{A}\left(M,t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Distribution} \frac{\vec{j}\left(P,t-\dfrac{PM}{c}\right)}{PM}.d\tau$$

L'ARQS

Approximation des **R**égimes **Q**uasi-**S**tationnaires

Elle consiste à négliger les retards de propagation dans l'expression des potentiels :

$$V\left(M,t\right)_{ARQS} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{Distribution} \frac{\rho\left(P,t\right)}{PM}.d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}\left(M,t\right)_{ARQS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Distribution} \frac{\vec{j}\left(P,t\right)}{PM}.d\tau$$

Cette hypothèse associe la distance maximale aux sources de l'observation des effets :

$$\left|PM\right|_{\max}$$

et le temps caractéristique minimal $T_{\min}$ d'évolution des distributions sources par :

$$T_{\min} >> \frac{\left|PM\right|_{\max}}{c}$$

Nous ne sommes donc pas dans le cas stationnaire, mais, suivant les situations physiques (ARQS magnétique ou ARQS électrique) , **l'obtention du champ EM par dérivation de ces potentiels équivaudra à négliger certains termes dans les équations de Maxwell.**

L'ARQS

Approximation des **R**égimes **Q**uasi-**S**tationnaires

Dans le cas d'une évolution périodique de période T caractéristique, on en déduit un ordre de grandeur de distance limite d'utilisation de l'ARQS pour une distribution bornée :

$$\left|PM\right|_{\lim} \# \frac{c.T}{100}$$

-A partir de quelle fréquence, devrait-on tenir compte du délai de propagation dans un circuit électronique de 2m ?

L'ARQS « magnétique »

Dans certaines zones de l'espace, les variations temporelles de la composante électrique du champ sont d'un ordre de grandeur très inférieur au rapport des densités de courant de charge sur la permittivité du vide :

$$\left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| << \frac{\left\|\vec{j}\right\|}{\varepsilon_0}$$

Dans le cas d'un bon conducteur ohmique comme un fil de cuivre :

$$\vec{j} = \gamma.\vec{E} \text{ avec } \gamma \approx 10^7 S.m^{-1}$$

Soit pour un champ EM sinusoïdal : $$\left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| = \omega.\left\|\vec{E}\right\| = 2\pi f.\left\|\vec{E}\right\| << \frac{\left\|\vec{j}\right\|}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma.\left\|\vec{E}\right\|}{\varepsilon_0}$$

que l'on traduira en fréquence par : $$f << \frac{\gamma}{\varepsilon_0.2.\pi} \# \frac{10^7}{10^{-11}.10} = 10^{17} Hz = 100 PHz$$

Dans ce cas, on néglige le courant de déplacement et M.A. se simplifie en :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0.\vec{j}}$$

L'ARQS « magnétique »

L'hypothèse précédente n'induit pas de simplification sur les autres équations de Maxwell et il demeure donc :

$$div\left(\vec{E}(M,t)\right) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M,t)\right) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

$$div\left(\vec{B}(M,t)\right) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M,t)\right) = \mu_0.\vec{j}(M,t)$$

L'équation de conservation de la charge redevient celle des régimes permanents

$$div\left(\vec{j}(M,t)\right) = 0 \Rightarrow \oiint_S \vec{j}.d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{ loi des noeuds}$$

On peut également parler de courants enlacés par un contour :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M,t)\right) = \mu_0.\vec{j}(M,t) \quad \Leftrightarrow \oint_{contour} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0.\sum_i I_{i_{enlacés}}$$

Rq: Dans le cas d'un conducteur, la cohérence avec la loi d'Ohm locale classique induit :

$$div\left(\vec{j}(M,t)\right) = 0 \Rightarrow \gamma.div\left(\vec{E}(M,t)\right) = 0 = \gamma.\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{électroneutralité locale}$$

L'ARQS « électrique »

Lorsque les variations temporelles de la composante magnétique sont suffisamment faibles, on approxime l'équation de Maxwell-Faraday par :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \vec{0} \Rightarrow \exists V \text{ tel que } \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\left(V\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0.\vec{j} + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tout se passe alors comme en statique pour le champ électrique (mais pas pour la composante magnétique !)

CAS DE L'ESPACE INTER-ARMATURES D'UN CONDENSATEUR

Dans certaines zones de l'espace, les densités de courant sont nulles (ou négligeables devant la densité de courant de déplacement) :

$$\left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| >> \frac{\left\| \vec{j} \right\|}{\varepsilon_0}$$

*C'est le **cas dans un isolant** au voisinage de surfaces chargées sièges d'évolution de charges (espace inter-armatures d'un condensateur) où* $\vec{j} = \vec{0}$

***Les composantes électriques et magnétiques restent couplées par** :*

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) \approx \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

Les équations de Maxwell « dans le vide » en présence de charges et de courants et en régime variable s'écrivent :

$$\begin{cases} div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \\ div(\vec{B}) = 0 & \text{Maxwell flux} \\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

En découplant E et B dans ces équations, on obtient pour E :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right) \equiv \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\overrightarrow{grad}(\rho)}{\varepsilon_0} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \varepsilon_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Soit une équation d'onde pour la composante électrique du champ :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 . \varepsilon_0 . \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\overrightarrow{grad}(\rho)}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 . \vec{j}\right)$$

en présence de charges et de courants libres

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

De la même manière on obtient pour B l'équation d'onde :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right) \equiv \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{B}\right)\right) - \vec{\Delta}\vec{B} = -\vec{\Delta}\vec{B} = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0.\overrightarrow{rot}\left(\vec{j}\right) + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Soit pour la composante magnétique du champ : $\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0.\overrightarrow{rot}\left(\vec{j}\right)$

Aux points de l'espace exempts de charge et de courant, ces équations d'ondes deviennent des **équations de d'Alembert** :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Soit avec la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0.\mu_0}}$$

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

Projetée en cartésiennes, on obtient une équation de d'Alembert pour chaque composante

$$\begin{cases} \Delta E_x(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_x(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_y(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_y(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_z(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_z(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Cas particulier de **l'O**nde **P**lane :

Une onde est plane (OP) lorsque le champ [E,B] est fonction d'une seule variable d'espace ; le lieu des points où le champ est uniforme à un instant donné est une famille de plans orthogonaux à une direction $\mathbf{e_u}$ fixe

Choisissons alors $\mathbf{e_u} = \mathbf{e_x}$ et on aura pour chaque composante :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Propagation d’une OEM dans le vide : modèle de l’OPPH

De manière générale, l’équation de d’Alembert : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

a pour solution une combinaison linéaire d’ondes propagatives :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow f(x,t) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct)$$

$f_+(x-ct)$ progresse dans le sens des x croissants

$$f_+(x_1 - ct_1) = f_+(x_2 - ct_2) \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$$

$f_-(x+ct)$ progresse dans le sens des x décroissants

$$f_-(x_1 + ct_1) = f_-(x_2 + ct_2) \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = -c$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

L'obtention de la solution générale de l'équation de d'Alembert se démontre en introduisant les variables :

$$\begin{cases} u = t - \dfrac{x}{c} \\ v = t + \dfrac{x}{c} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{s'écrit alors} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

En effet : $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\right) = +\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) - \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\right) = +\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

Soit : $$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0 \Rightarrow df(u,v) = \varphi_-(v).dv + \varphi_+(u).du$$

L'intégration sur u puis v donne : $$f(u,v) = f_+(u) + f_-(v)$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

On obtient une équation de propagation de d'Alembert dans bien d'autres domaines de la physique (même s'il s'agit généralement de l'approximation à l'ordre le plus bas des amplitudes vibratoires) :

- **Corde tendue** (infiniment souple, faibles amplitudes transversales, faibles inclinaisons, masse linéique μ, tension T_0)

  La RFD donne pour l'élongation transverse y : $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c=\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

- **Ondes sonores planes** dans un milieu de compressibilité isentropique χ_S et de masse volumique ρ :

  L'équation d'Euler et la conservation de la masse donnent pour la surpression acoustique p :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c=\sqrt{\frac{1}{\rho_0.\chi_S}}$$

- **Courant électrique et tension** le long d'un **cable coaxial** (capacité linéique Γ et inductance linéique Λ, résistivité du conducteur nulle, résistivité de l'isolant infinie) :

  Les lois de Kirchhof de l'électrocinétique aboutissent à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{1}{\Lambda.\Gamma}}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

On appelle donc **O**nde électromagnétique **P**lane **P**rogressive dans le sens des x croissants, la solution **particulière** suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} E_x(x-ct) & B_x(x-ct) \\ E_y(x-ct) & B_y(x-ct) \\ E_z(x-ct) & B_z(x-ct) \end{matrix} \right\} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 . \mu_0}}$$

Que l'on peut encore simplifier grâce aux équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson (flux), puisqu'on a en cartésiennes :

$$div(\vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \text{ soit } E_x \text{ indépendant de x (ondulatoire} \Rightarrow \left\langle E_x \right\rangle = 0 \Rightarrow E_x = 0$$

$$div(\vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \text{ soit } B_x \text{ indépendant de x (ondulatoire} \Rightarrow \left\langle B_x \right\rangle = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

Soit une OPP **transverse électrique et transverse magnétique** dans le vide

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

Toutes les sources d'ondes électromagnétiques vont générer des trains (ou paquets) d'onde, c'est-à-dire une vibration sensiblement périodique sur une durée finie (avec un démarrage et un arrêt de l'oscillation). La transformée de Fourier de cette fonction temporelle de vibration de la source donne un spectre continu dans l'espace des fréquences.

Après propagation, en un point quelconque de l'espace, l'onde correspond donc à la superposition d' **O**ndes **P**lanes **P**rogressives **H**armoniques : les OPPH (ou OPPM).

Toute onde plane peut se décrire comme une superposition d'OPPH qui se révèle donc être la brique élémentaire de toute fonction d'onde.

$$E_y(x-ct) = E_{0y}.\cos\left(k.x-\omega t\right) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$$E_z(x-ct) = E_{0z}.\cos\left(k.x-\omega t+\varphi_{z/y}\right)$$

k est le nombre d'onde (ou la pulsation spatiale).

On définit le vecteur d'onde comme le vecteur dirigé dans le sens de propagation de l'OPPH et de module k.

Ainsi on notera l'expression complexe des composantes électrique et magnétique :

$$\underline{\vec{E}\left(\vec{r},t\right)} = \underline{\vec{E}_0}.e^{j\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}\left(\vec{r},t\right)} = \underline{\vec{B}_0}.e^{j\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

$$\underline{\vec{E}(\vec{r},t)} = \underline{\vec{E}_0}.e^{j\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}(\vec{r},t)} = \underline{\vec{B}_0}.e^{j\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)}$$

La grandeur : $\varphi \equiv \vec{k}.\vec{r} - \omega t$ est la phase locale et instantanée de l'onde.

Les amplitudes complexes $\underline{\vec{E}_0 \text{ et } \vec{B}_0}$ contiennent d'éventuels déphasages fixes entre les différentes projections des champ **E** et **B**.

L'intérêt de ces grandeurs complexes (**dont seule la partie réelle correspond au champ !)** est de simplifier les écritures des dérivations spatiales et temporelles des équations de Maxwell :

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \ \text{ et } \nabla \leftrightarrow -j.\vec{k} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{g}rad(\underline{f}) = -j\vec{k}.\underline{f} \\ div\left(\underline{\vec{u}}\right) = -j\vec{k} \bullet \underline{\vec{u}} \\ \vec{r}ot\left(\underline{\vec{u}}\right) = -j\vec{k} \times \underline{\vec{u}} \end{array} \right.$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

Première conséquence : la transversalité des composantes du champ

Nous retrouvons naturellement la transversalité de l'onde plane :

$$div\left(\vec{E}\right)=0 \text{ devient } \quad \text{-}\ j.\vec{k}.\underline{\vec{E}}=0$$

$$\text{soit } \underline{\vec{E}} \text{ perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane}$$

$$\text{et } div\left(\vec{B}\right)=0 \text{ devient } \quad \text{-}\ j.\vec{k}.\underline{\vec{B}}=0$$

$$\text{soit } \underline{\vec{B}} \text{ perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane}$$

En complétant par les deux équations couplant les composantes :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{devient} \quad \text{-}\ j.\vec{k}\times\underline{\vec{E}}=-j.\omega.\underline{\vec{B}} \Leftrightarrow \underline{\vec{B}}=\frac{\vec{k}\times\underline{\vec{E}}}{\omega}$$

$$\text{soit un trièdre direct formé par } \vec{k},\vec{E},\vec{B}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{qui devient} \quad \text{-}\ j.\vec{k}\times\underline{\vec{B}}=\frac{j.\omega.\underline{\vec{E}}}{c^2} \Leftrightarrow \underline{\vec{E}}=c^2\,\frac{\underline{\vec{B}}\times\vec{k}}{\omega}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

<u>Deuxième conséquence : la relation de dispersion des OPPH dans le vide</u>

L'association des deux relations précédentes permet d'obtenir la relation de dispersion. Retrouvons-la par l'équation de d'Alembert pour insister sur le fait qu'elle lui est directement imputable.

$$\vec{\Delta}\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0} \text{ devient } -j.\vec{k}(-j.\vec{k}.\underline{\vec{E}})+j.\vec{k}\times\left(-j.\vec{k}\times\underline{\vec{E}}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}.\underline{\vec{E}}=\vec{0}$$

$$\text{soit } \vec{0}+\vec{k}.\left(\vec{k}.\underline{\vec{E}}\right)-\underline{\vec{E}}.\left(\vec{k}.\vec{k}\right)=-\frac{\omega^2}{c^2}.\underline{\vec{E}}\Rightarrow k^2.\underline{\vec{E}}=\frac{\omega^2}{c^2}.\underline{\vec{E}}\Rightarrow k=\pm\frac{\omega}{c}$$

Les deux signes de k correspondent respectivement à l'OPPH progressive et régressive

Retenons qu'une équation de propagation de type d'Alembert implique nécessairement la relation de dispersion :

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

<u>Structure de l'OPPH dans le vide :</u>

Le champ magnétique d'une onde plane progressive harmonique, de pulsation ω et de vecteur d'onde k , est lié au champ électrique par la **<u>relation de structure</u>** :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

(**E,B,k**) forment un trièdre direct : les vibrations de **E** et **B** se font dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde électromagnétique (donnée par k) : on dit que le champ est transverse. Les vibrations de E et B sont également en phase.

On appelle **vitesse de phase** la célérité de propagation de la grandeur phase : $\varphi \equiv \vec{k}.\vec{r} - \omega t$

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k} = \pm c \quad \text{dans le cas d'OPPH dans le vide}$$

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

<u>**Structure de l'OPP dans le vide :**</u>

Le champ magnétique d'une **O**nde **P**lane **P**rogressive de direction $\mathbf{e}_u$, est lié au champ électrique par la <u>**relation de structure**</u> :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_u \times \vec{E}}{c} \quad \text{ou } \vec{E} = -c.\vec{e}_u \times \vec{B}$$

($\mathbf{E},\mathbf{B},\mathbf{e}_u$) forment un trièdre direct : les vibrations de **E** et **B** se font dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde électromagnétique : on dit que le champ est transverse. Les vibrations de E et B sont également en phase.

Propagation d'une OEM dans le vide : modèle de l'OPPH

Pourquoi s'intéresser particulièrement à l'onde plane ?

Une onde est sphérique (OS) si les composantes du champ et du potentiel ne dépendent que de la distance r à un point fixe de l'espace.

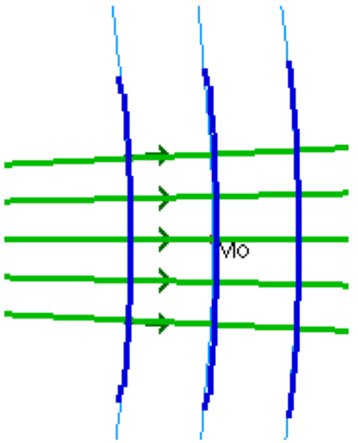
Le lieu des points où le champ est uniforme à un instant donné est une famille de sphères centrée sur ce point fixe.

L'équation de d'Alembert donne dans le cas d'une symétrie sphérique autour d'une origine ponctuelle de l'onde :

$$E_r(r,t) = \frac{1}{r} f_{r+}(r - ct) + \frac{1}{r} f_{r-}(r + ct)$$

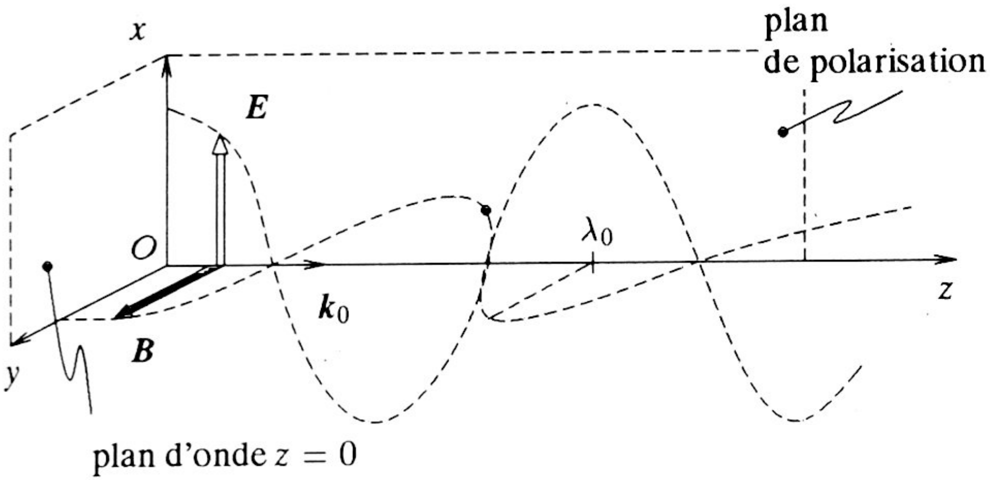
Il s'agit donc de la somme de deux ondes sphériques divergente et convergente qui se déforment au cours de leur propagation puisqu'elles s'atténuent avec la distance r.

Dans la mesure où nous étudierons ces ondes loin de leurs sources, nous serons fréquemment dans le cas d'ondes pseudo-planes (ou quasi-planes).



Les polarisations de l'OPPH

L'OPPH est communément représentée de la façon suivante :



Pourtant il s'agit d'un cas particulier de l'OPPH dans le vide : **l'OPPH polarisée rectilignement.** Les composantes du champ gardent une direction fixe (sens variable). On nomme plan de polarisation le plan formé de (**E**,$\mathbf{k_0}$)

simulation java (VDB)

Dans le cas général d'un train d'onde sinusoïdal, le lieu des extrémités des vecteurs champ décrit pour chacun une **ellipse** sur la durée d'une période.
Les composantes sur les axes (x et y ici) sont déphasées de φ

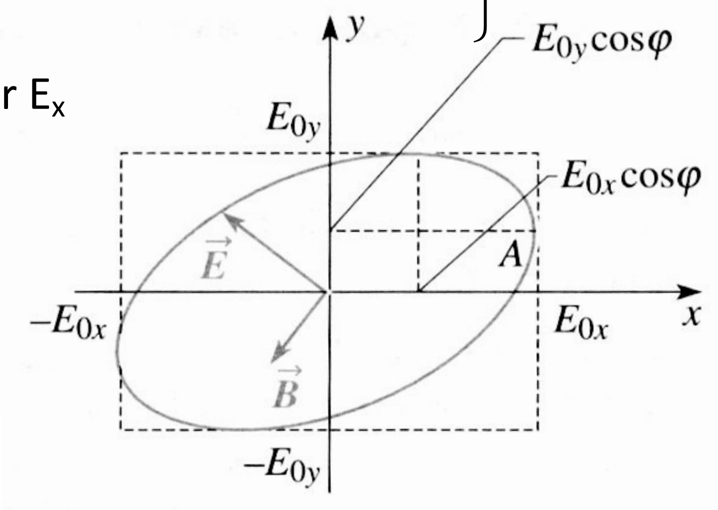
Les polarisations de l'OPPH

La relation de structure permet d'associer les composantes de **E** et B :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}.\cos\left(\omega t - k_0.z + \phi_x\right) \\ E_y = E_{0y}.\cos\left(\omega t - k_0.z + \phi_y\right) \\ E_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_x = -\dfrac{E_{0y}}{c}.\cos\left(\omega t - k_0.z + \phi_y\right) \\ B_y = \dfrac{E_{0x}}{c}.\cos\left(\omega t - k_0.z + \phi_x\right) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

En notant $\varphi \equiv \phi_x - \phi_y$ le retard de phase de E_y sur E_x et en décalant l'origine des temps :

$$\begin{cases} \underline{E_x} = E_{0x}.e^{j(\omega t - k_0 z)} \\ \underline{E_y} = E_{0y}.e^{-j\varphi}.e^{j(\omega t - k_0 z)} \\ \underline{E_z} = 0 \end{cases}$$



Polarisation elliptique.

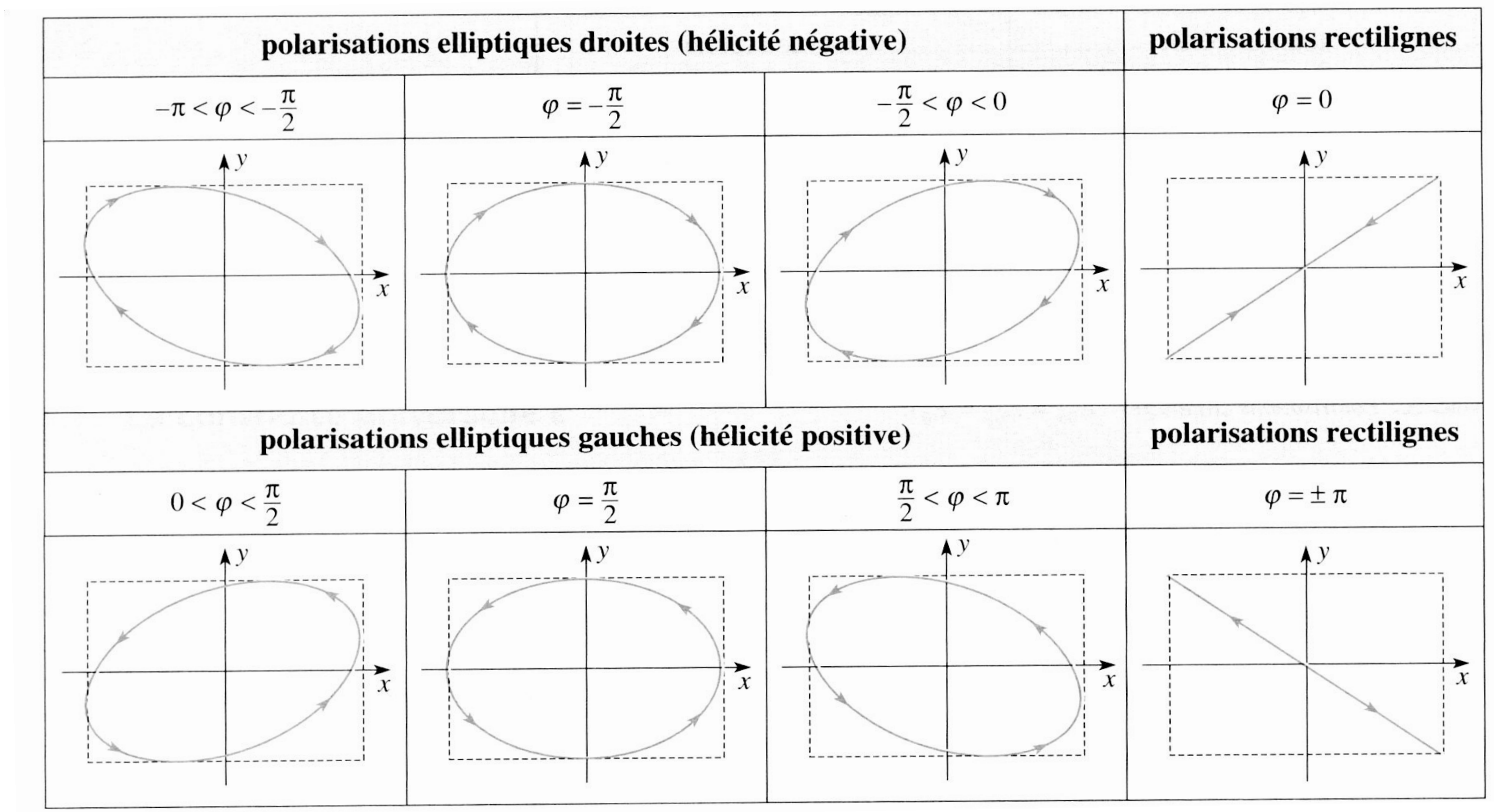
$\left(\text{Cas } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.\right)$

Sur la représentation ci-contre, il est impossible de préciser le signe de φ tant que le sens de parcours de l'ellipse n'est pas spécifié

Les polarisations de l'OPPH

Orientation de l'hélicité de la polarisation elliptique

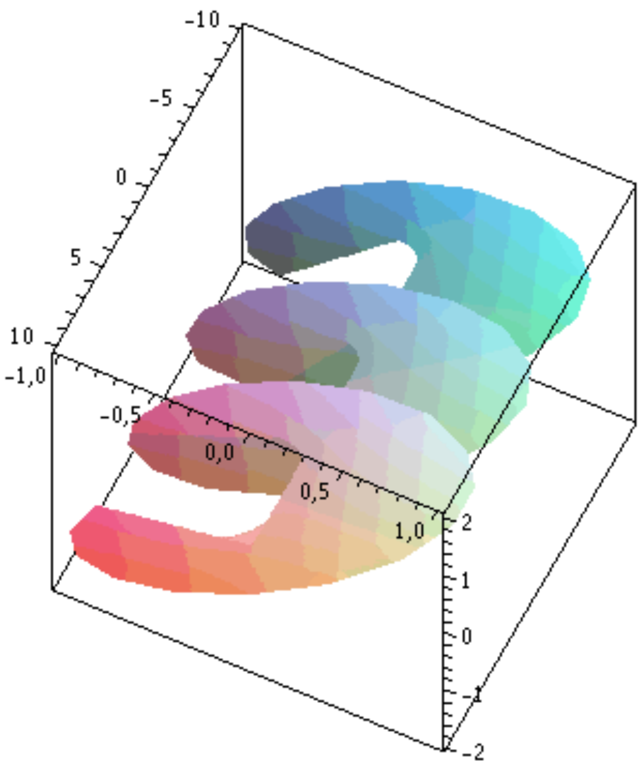
L'observateur qui observe l'onde dans la direction $\mathbf{-k_0}$ « verrait » l'extrémité du vecteur champ électrique parcourir l'ellipse dans le sens trigonométrique si sin φ > 0. La polarisation est alors elliptique gauche PE_g (traversée du demi-plan vertical supérieur vers la gauche) : on dit également que **l'hélicité est positive.**



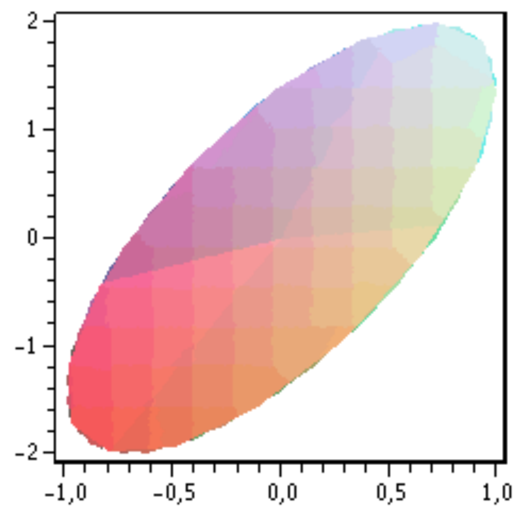
Les polarisations de l'OPPH

Orientation de l'hélicité de la polarisation elliptique

L'observateur qui observe l'onde dans la direction $-\mathbf{k_0}$ « verrait » l'extrémité du vecteur champ électrique parcourir l'ellipse dans le sens trigonométrique si $\sin \varphi > 0$. La polarisation est alors elliptique gauche PE_g (traversée du demi-plan vertical supérieur vers la gauche) : on dit également que **l'hélicité est positive.**



[simulation java (VDB)](#)



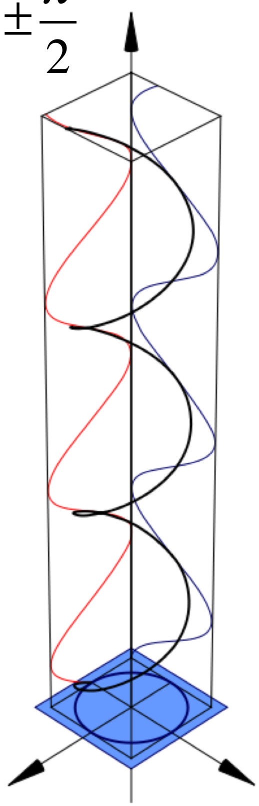
Les polarisations de l'OPPH

Cas particulier de la polarisation circulaire

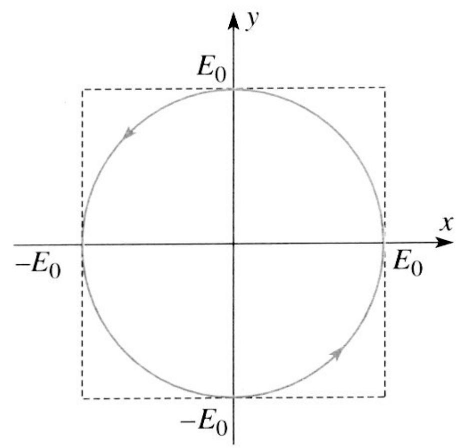
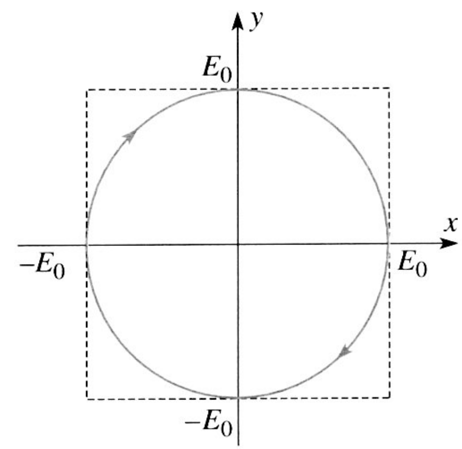
La polarisation est circulaire si le lieu des points des extrémités des vecteurs champ est un cercle. Il ne suffit donc pas que $E_{0x}=E_{0y}$ mais également que $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Exemple de circulaire gauche

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$



Circulaire

polarisations circulaires	
circulaire gauche $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$	circulaire droite $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
	
notation réelle $\begin{vmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix}$	notation réelle $\begin{vmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = -E_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix}$
notation complexe $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0 \mathrm{e}^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0 \mathrm{e}^{j\omega t} \end{vmatrix}$	notation complexe $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0 \mathrm{e}^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0 \mathrm{e}^{j\omega t} \end{vmatrix}$

Doc. 10. *Polarisations circulaires* $(E_{0x} = E_{0y} = E_0)$.

Les polarisations de l'OPPH

Superposition d'états de polarisation

Superposition d'OPPH polarisées rectilignement et en quadrature

Il est intéressant de remarquer que toute OPPH PE peut être décomposée en une somme de deux OPPH PR en quadrature de phase dans des directions orthogonales correspondant aux grand et petit axes de l'ellipse **: l'OemPPH PR apparaît ainsi comme le maillon élémentaire de la théorie des ondes électromagnétiques dans le vide**

Superposition d'OPPH polarisées circulairement droite et gauche

Toute OPPH PR peut elle-même être décomposée en deux OPPH PC_d et PC_g de même amplitude.

$$\left\{\begin{array}{c} E_x = E_0.\cos(\alpha)\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_y = E_0.\sin(\alpha)\cos(\omega t - k_0 z) \\ E_z = 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{E_0}{2}.\cos(\omega t - k_0 z + \alpha) \\ \dfrac{E_0}{2}.\sin(\omega t - k_0 z + \alpha) \\ 0 \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{c} \dfrac{E_0}{2}.\cos(\omega t - k_0 z - \alpha) \\ -\dfrac{E_0}{2}.\sin(\omega t - k_0 z - \alpha) \\ 0 \end{array}\right.$$

OPPH PR (α) OPPH PC_g OPPH PC_d

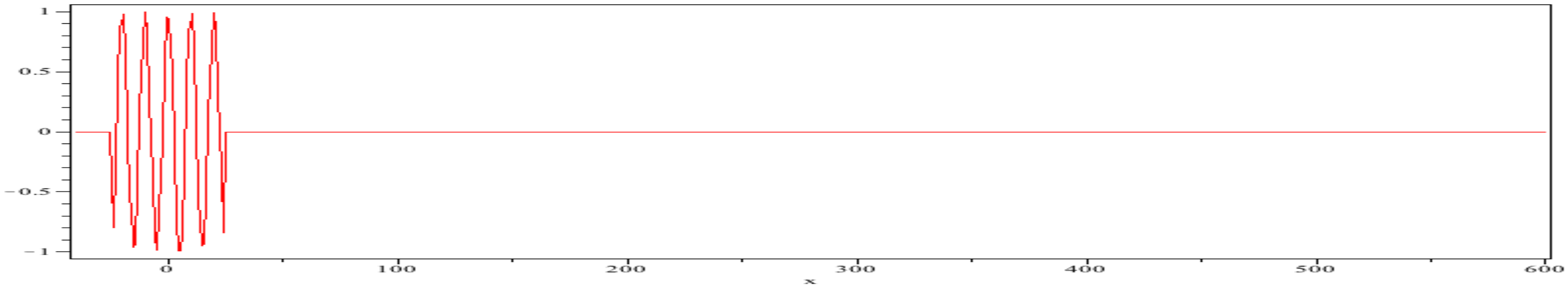
Influence du milieu propagatoire

Une fonction vérifiant l'équation d'onde de d'Alembert lors de sa propagation ne se disperse pas dans le milieu propagateur. C'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide en l'absence de charges et de courants : modèle dans lequel l'équation est vérifiée exactement.

Dans ce cas la vitesse de phase (vitesse de propagation de l'ondulation) est indépendante de la pulsation de la vibration :

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k} = c = Cte \quad (\text{milieu non dispersif}))$$

Ainsi dans le cas d'une vibration superposition quelconque d'OPPH de pulsations diverses, **toutes les composantes harmoniques se propagent à la même vitesse** dans le milieu propagateur de telle façon que le signal somme ne se déforme pas au fur et à mesure de sa propagation.



Influence du milieu propagatoire

CAS GENERAL D'UN MILIEU DISPERSIF

Modélisation du paquet d'onde :

La vibration harmonique (monochromatique par définition) ne permet pas de tester seul la dispersion d'un milieu propagateur. [il s'agirait dans ce cas de balayer l'espace des fréquences et de tester la proportionnalité aux longueurs d'onde]

On modélise un paquet d'onde unidimensionnel progressif de la façon suivante :

$$\Psi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) . e^{j(k.x-\omega.t)} . d\omega$$

où par hypothèse le module de g(ω) ne prend de valeurs non nulles qu'au voisinage proche d'une pulsation moyenne ω_0 .

g(ω) représente le spectre en pulsations de l'onde.

Influence du milieu propagatoire

CAS GENERAL D'UN MILIEU DISPERSIF

Approximation de la dispersion d'un paquet d'onde :

Quelle que soit la relation de dispersion caractéristique du milieu propagateur, on peut alors se limiter à son développement au premier ordre (si le paquet est à spectre suffisamment étroit) :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + (\omega - \omega_0).\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

La fonction d'onde progressive s'approxime donc

$$\Psi(x,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{j(k_0.x-\omega_0.t)}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega).e^{j(\omega-\omega_0)\left[x.\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}-t\right]}.d\omega$$

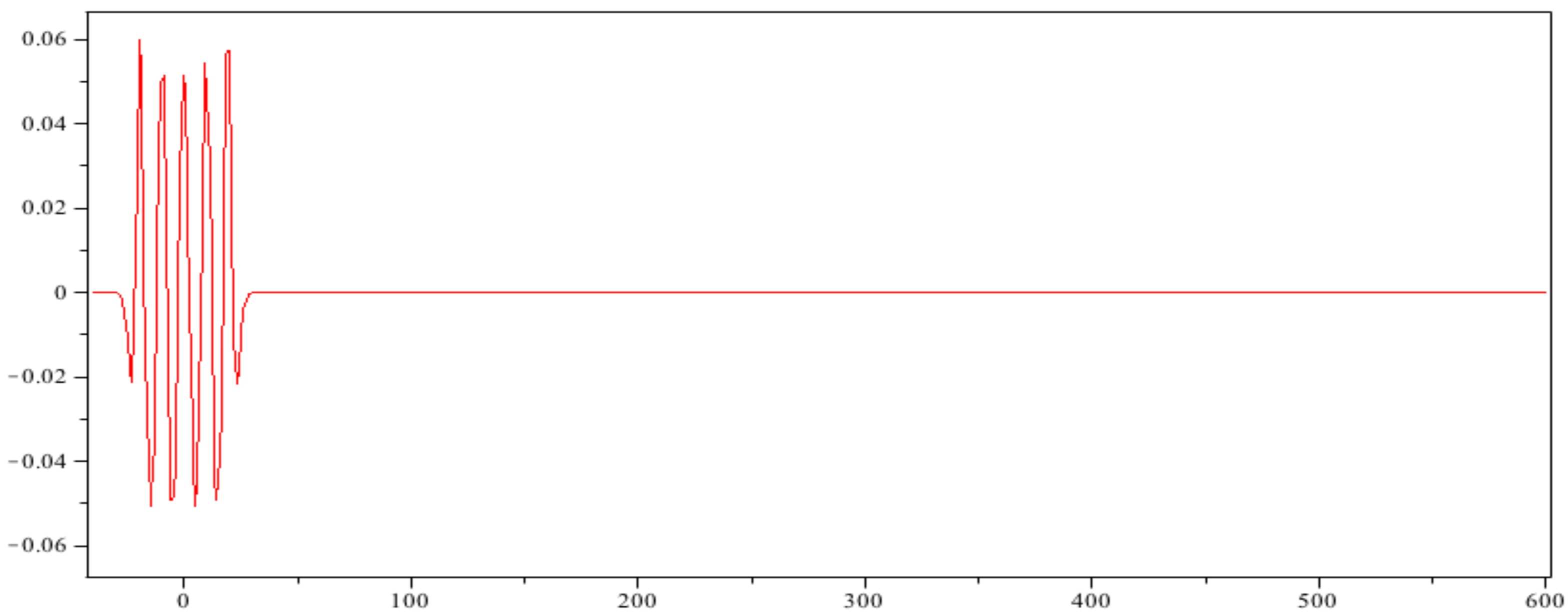
L'intégrale (amplitude ou « enveloppe » du paquet) apparait fonction de la variable :

$$x.\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} - t$$

Soit une enveloppe se « déplaçant » elle-même à la vitesse : $v_{enveloppe} = v_{groupe} \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$

Influence du milieu propagatoire

<u>PROPAGATION D'UN TRAIN D'ONDES DANS UN MILIEU DISPERSIF</u>



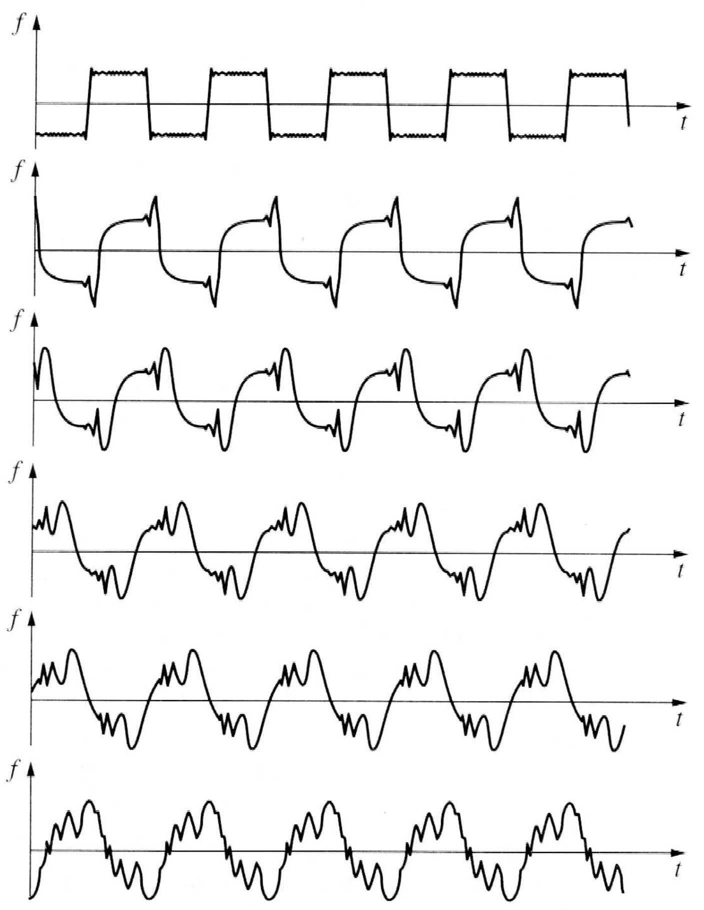
L'animation ci-dessus concerne un train d'onde rectangulaire se propageant dans un milieu dont la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = 2\omega_0 . \left| \sin\left(\frac{k.a}{2} \right) \right|$$

On remarque sur l'animation que les hautes fréquences ont une vitesse de phase inférieure aux basses fréquences d'où la déformation et l'étalement du train.

Influence du milieu propagatoire

<u>CAS DE LA PROPAGATION D'IMPULSIONS DANS UN CABLE</u>



L'écart du délai de propagation sur la longueur totale de cable doit rester inférieur au temps séparant deux impulsions successives.

Influence du milieu propagatoire

CAS PARTICULIER D'UN DLHI TRANSPARENT

Vous avez constaté les effets de la dispersion pour des ondes électromagnétiques visibles au travers de matériaux « dispersifs transparents » comme un prisme de verre ou de plexiglas : séparation angulaire des longueurs d'onde due à la variation de l'indice optique avec la pulsation de la vibration lumineuse

$$\boxed{n(\omega) \equiv \frac{c}{v_\varphi(\omega)} = \frac{c.k(\omega)}{\omega}} \qquad n(\omega \approx \omega_0) \approx \frac{c.\left(k(\omega_0) + (\omega - \omega_0).\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)}{\omega_0} \approx n(\omega_0) + \frac{c.(\omega - \omega_0).\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}}{\omega_0}$$

À rapprocher de la relation empirique de Cauchy : $n(\lambda) = A + \dfrac{B}{\lambda^2} + \dfrac{C}{\lambda^4} + \dots$

Ainsi dans les **D**iélectriques **L**inéaires **H**omogènes **I**sotropes transparents (non-absorbants dans le visible (seulement dans les UV)), on négligera la perte d'énergie du train d'onde au cours de sa propagation mais on observera une dispersion d'autant plus importante que le spectre fréquentiel du train sera large.

La relation de l'indice optique a la permittivité diélectrique du matériau est :

$$\boxed{n(\omega) \equiv \frac{c}{v_\varphi(\omega)} = \frac{\sqrt{\mu_0.\varepsilon(\omega)}}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}}$$

Racine de la permittivité relative du diélectrique

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

Il y aura alors interaction entre les charges présentes et l'onde pénétrant le milieu. Il s'agit alors de modéliser le mouvement des charges sous l'influence de cette onde incidente et le champ rayonné qui s'ensuit.

La plus souvent, le milieu sera globalement neutre mais cela n'implique pas qu'il le reste localement au passage de l'onde.

Dans le cas d'un bon conducteur métallique, le temps de relaxation des charges est approximé par :

$$\tau_{\text{charges}} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19}\, s \text{ pour le cuivre}$$

Dans ce cas le milieu pourra être approximé localement neutre malgré la passage de l'onde tant que la fréquence reste très inférieure à 10^{18} Hz

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

<u>Modélisation du milieu par un fluide continu de densité de charge et de densité de masse proportionnelles</u>

Dans le cas d'un conducteur, il s'agit alors d'appliquer la RFD à un électron libre moyen lorsqu'il est soumis à l'onde et aux interactions avec son environnement.

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{g}rad)\vec{v}\right) = -e.\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) + \vec{F}_{\text{int}eractions}$$

Dans le cas d'un conducteur : $\vec{F}_{\text{int}eractions} \equiv -\frac{m}{\tau}.\vec{v}$

Avec τ un temps caractéristique du « frottement » moyen (collisions) de l'électron avec le réseau cationique dans lequel il se déplace.

Dans le cas d'un plasma, on négligera couramment cette force.

Que proposez-vous de simplifier encore dans cette équation et à quelles conditions ?

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

Modélisation du milieu par un fluide continu
de densité de charge et de densité de masse proportionnelles

Ainsi pour un conducteur : $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}.\vec{E}$$

Avec la relation à la densité locale de courant : $$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} n_i.q_i.\vec{v}_i \approx -n.e.\vec{v}\left(\vec{r},t\right)$$

On obtient une loi d'Ohm locale différente de $\left(\vec{j} = \gamma \vec{E}\right)$

$$\frac{\partial\left(-\vec{j}\right)}{\partial t} - \frac{\vec{j}}{\tau} = -n.e.\frac{e}{m}.\vec{E} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial\left(\vec{j}\right)}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m}.\vec{E}$$

Interprétez

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

<u>Modélisation du milieu par un fluide continu</u>
<u>de densité de charge et de densité de masse proportionnelles</u>

Montrer que la conductivité complexe s'exprime alors :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \quad \text{avec } \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Ecrire la forme complexe des équations de Maxwell (notation nabla)

Montrer qu'en cas de neutralité locale au passage de l'onde elle devient :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 . \underline{\gamma} . \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Une OPPH peut-elle être solution ?

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

On propose alors pour famille de solutions la forme complexe suivante :

$$\text{Pseudo OPPH (*)} \ : \underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{\vec{E}}_0 . e^{j(\omega t - \underline{k}.x)} \quad \text{avec } \underline{k} = k' - jk''$$

Montrer que l'OPPH* est transversale et que la nouvelle relation de structure s'écrit :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \times \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

Montrer que l'équation d'onde sur la composante électrique donne :

$$-\left(\underline{k}^2\right)\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \frac{j.\mu_0.\gamma_0.\omega}{1 + j.\omega.\tau}.\underline{\vec{E}}$$

Soit en introduisant la pulsation « plasma » : $\omega_p \equiv \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0.c^2.\gamma_0}{\tau}}$

la relation de dispersion dans le conducteur : $c^2\underline{k}^2 = \omega^2 - \dfrac{\omega_p^2}{1 + \dfrac{1}{j\omega\tau}}$

Influence du milieu propagatoire

Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

Suivant la pulsation de l'OPPH*, on simplifie la relation de dispersion, on distingue l'absorption de la dispersion et on développe dans chaque domaine la structure de l'onde.

domaine spectral	ondes radio, ..., ondes micrométriques $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$	infrarouge, ..., U.V. $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$	U.V. lointain, rayons X $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$
relation de dispersion	$\underline{k}^2 \approx -j\mu_0\gamma_0\omega$	$\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$	
nombre d'onde ($k_1 \geqslant 0$)	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}(1-j)$	$\underline{k} = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$	$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

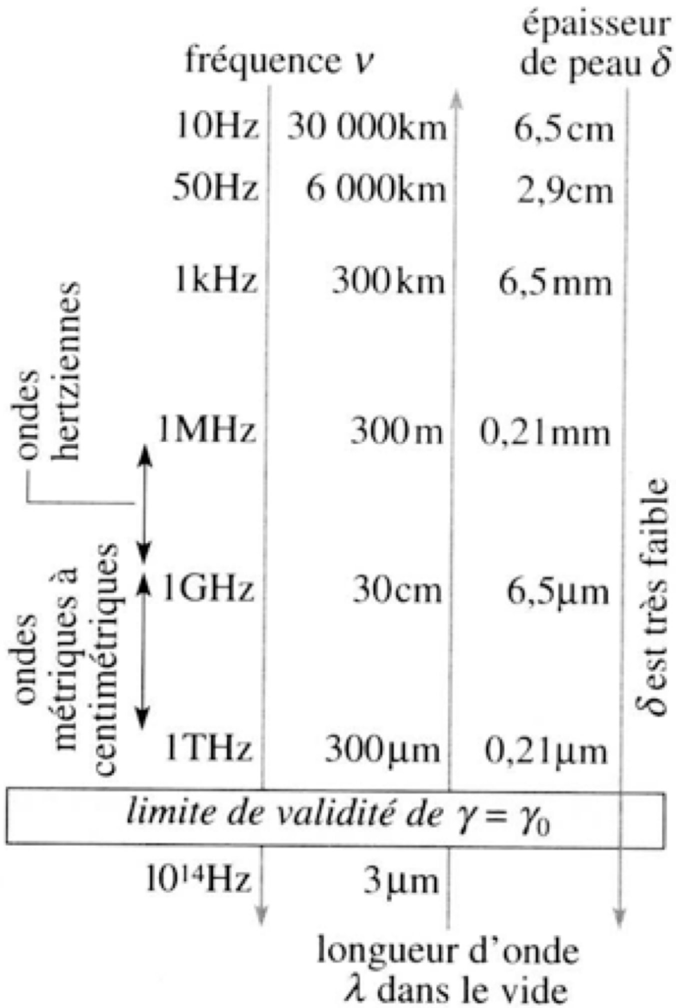
Ex du cuivre : $\tau \approx 10^{-14}\,s$ et $\omega_p \approx 2.10^{16}$ rad.s^{-1}

Influence du milieu propagatoire

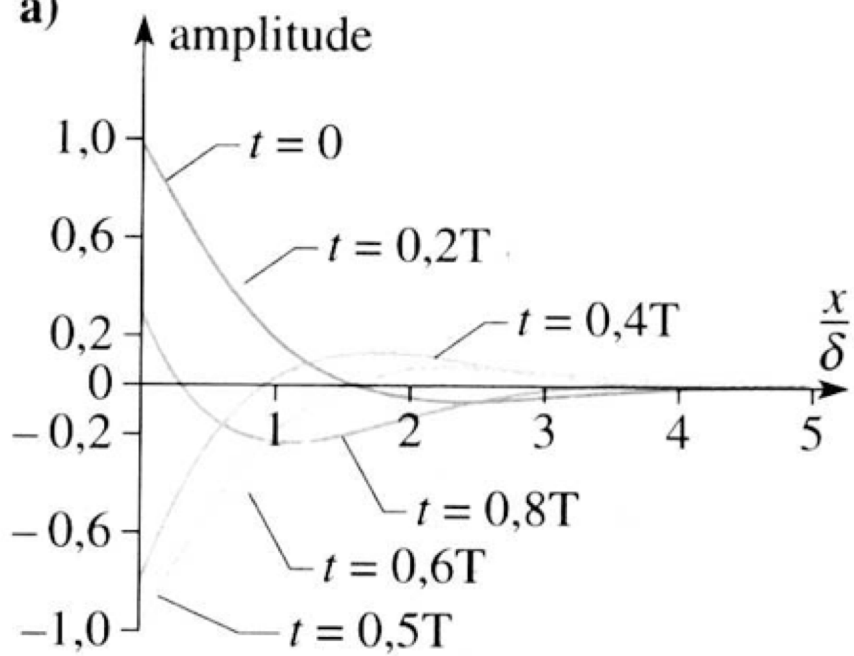
Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

« BASSES » FREQUENCES

b)



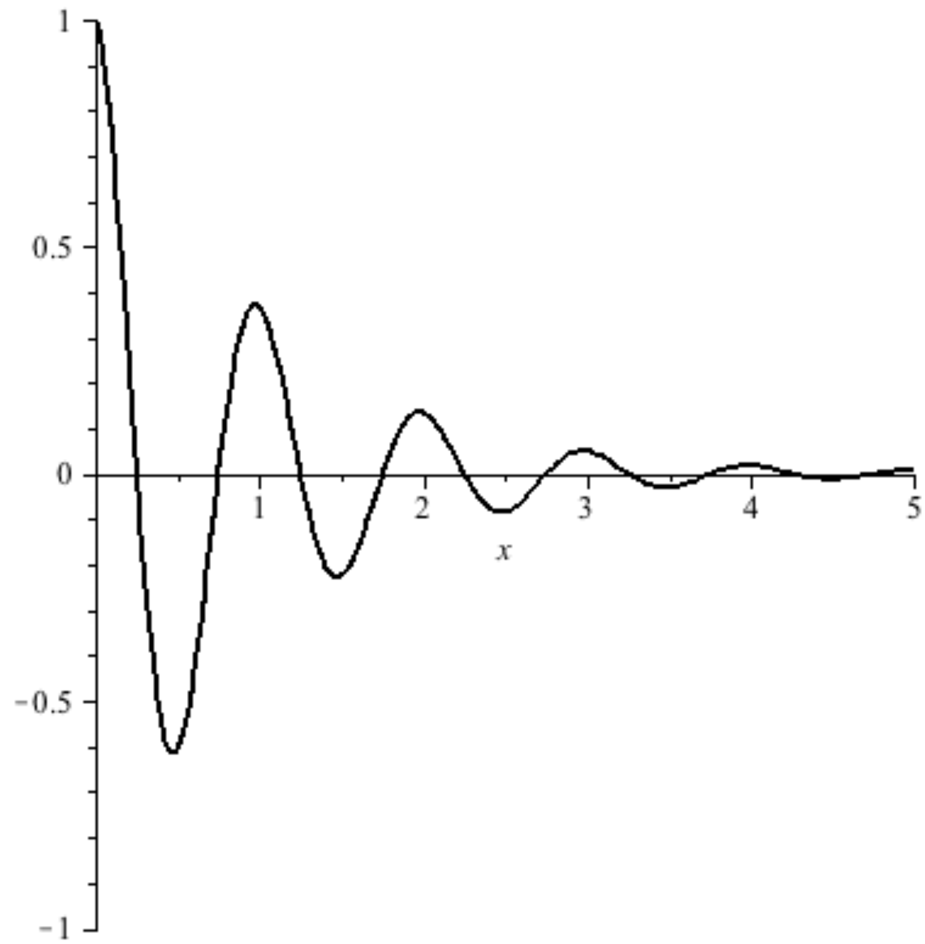
a)



Influence du milieu propagatoire

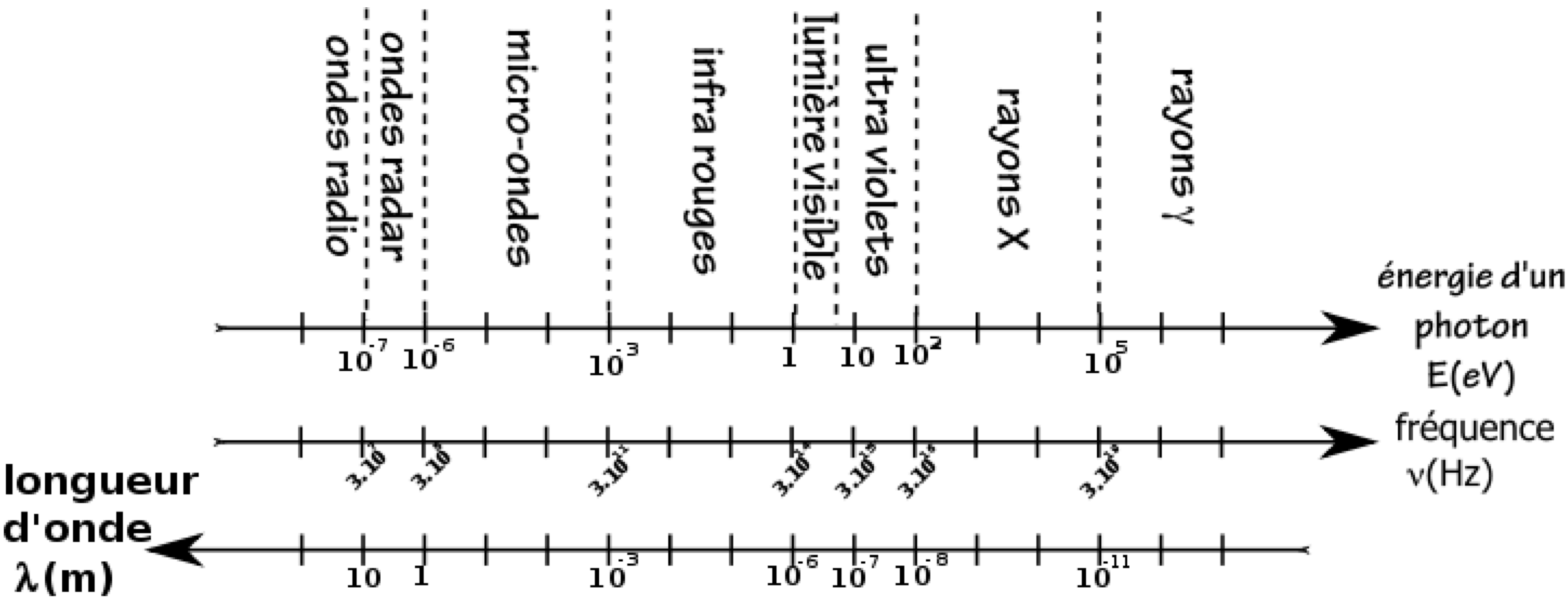
Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

« BASSES » FREQUENCES



Influence du milieu propagatoire

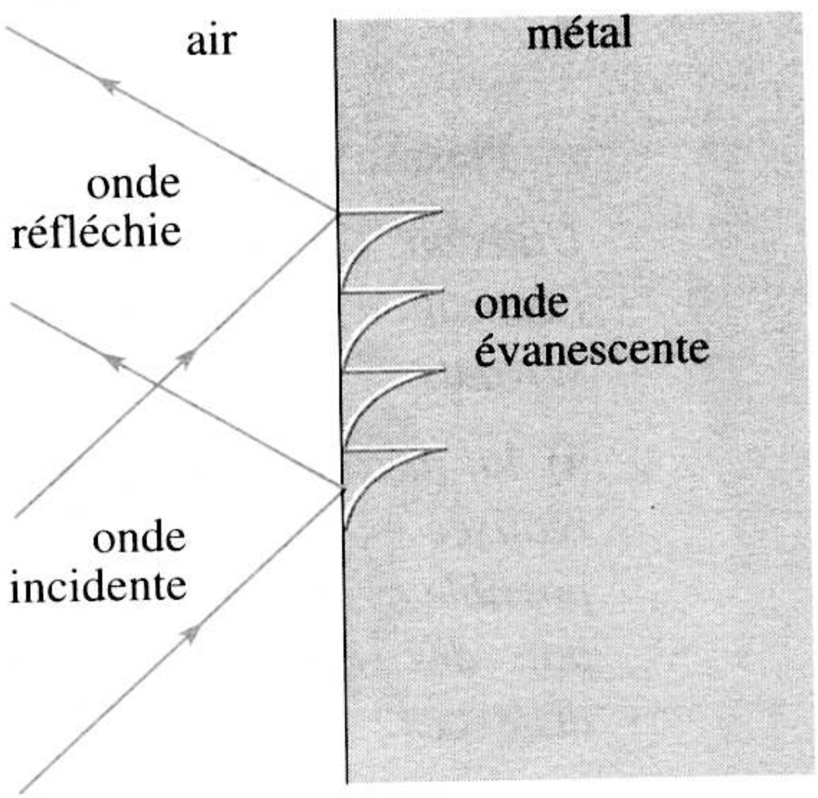
Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma



Influence du milieu propagatoire

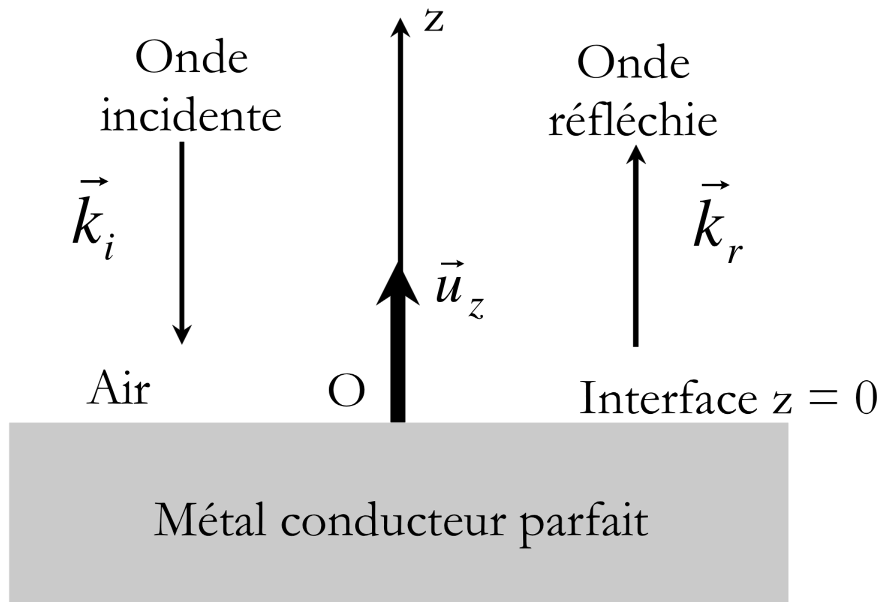
Propagation des OEM dans un conducteur ou un plasma

« MOYENNES » FREQUENCES



Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

Cas de l'incidence « normale »



La composante électrique étant purement tangentielle : $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$

qui donne par application de la loi de la réflexion en incidence normale :

$$\vec{k}_r = -\vec{k}_i \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-\vec{k}_i \times -\vec{E}_i}{\omega} = \vec{B}_i$$

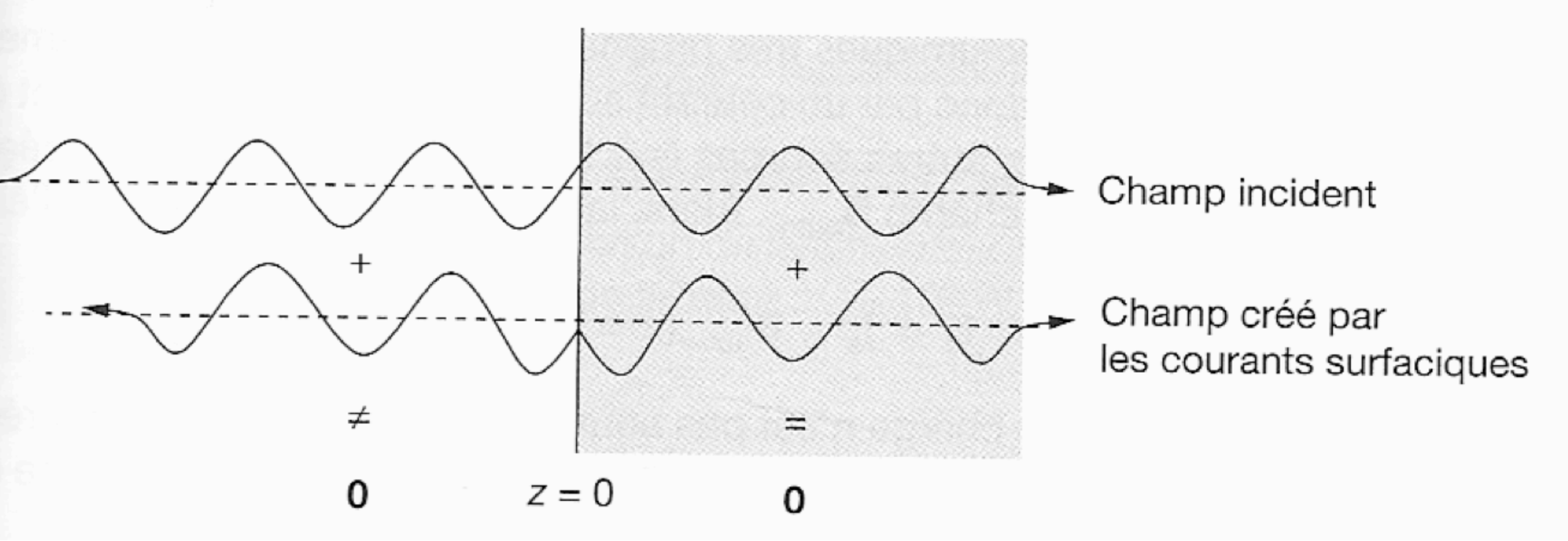
Soit une discontinuité tangentielle de $2B_i$ à la surface du conducteur parfait
=> courants surfaciques

Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

Cas de l'incidence « normale »

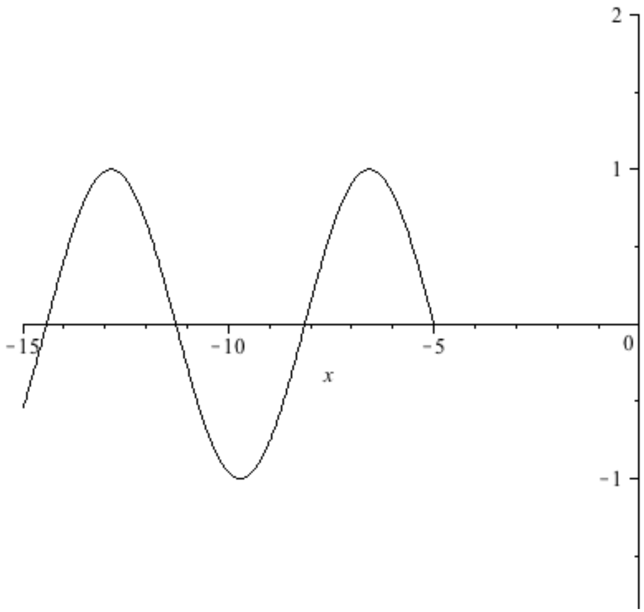
$$2.\vec{B}_i - \vec{0} = \mu_0 . \vec{j}_s \times \vec{u}_z = 2.\frac{-k_i.(\vec{u}_z \times \vec{E}_i)}{\omega} = 2\frac{\vec{E}_i}{c} \times \vec{u}_z$$

$$soit \quad \vec{j}_s = 2\frac{\vec{E}_i}{\mu_0 c} = \frac{2}{\mu_0 c}.\vec{E}_{0i}.e^{j\omega t}$$

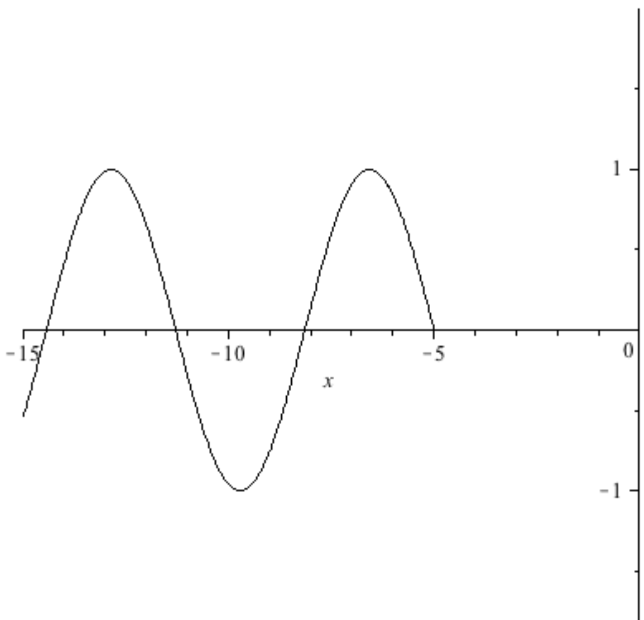


Réflexion d’une OPPH sur un conducteur parfait

Et avant le régime permanent ?



Réflexion normale de la **composante électrique E** d’une OPPH PRectilignement



Réflexion normale de la **composante magnétique B** d’une OPPH PRectilignement

Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

L'onde stationnaire résultant d'une incidente normale

Choisissons une OPPH incidente polarisée rectilignement

$$\underline{\vec{E}_i} = E_{0i}.e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i.\vec{r})}.\vec{u}_y$$

Montrez que les composantes résultantes s'écrivent :

$$\vec{E} = -2.E_0.\sin(k.z).\sin(\omega t).\vec{u}_y$$

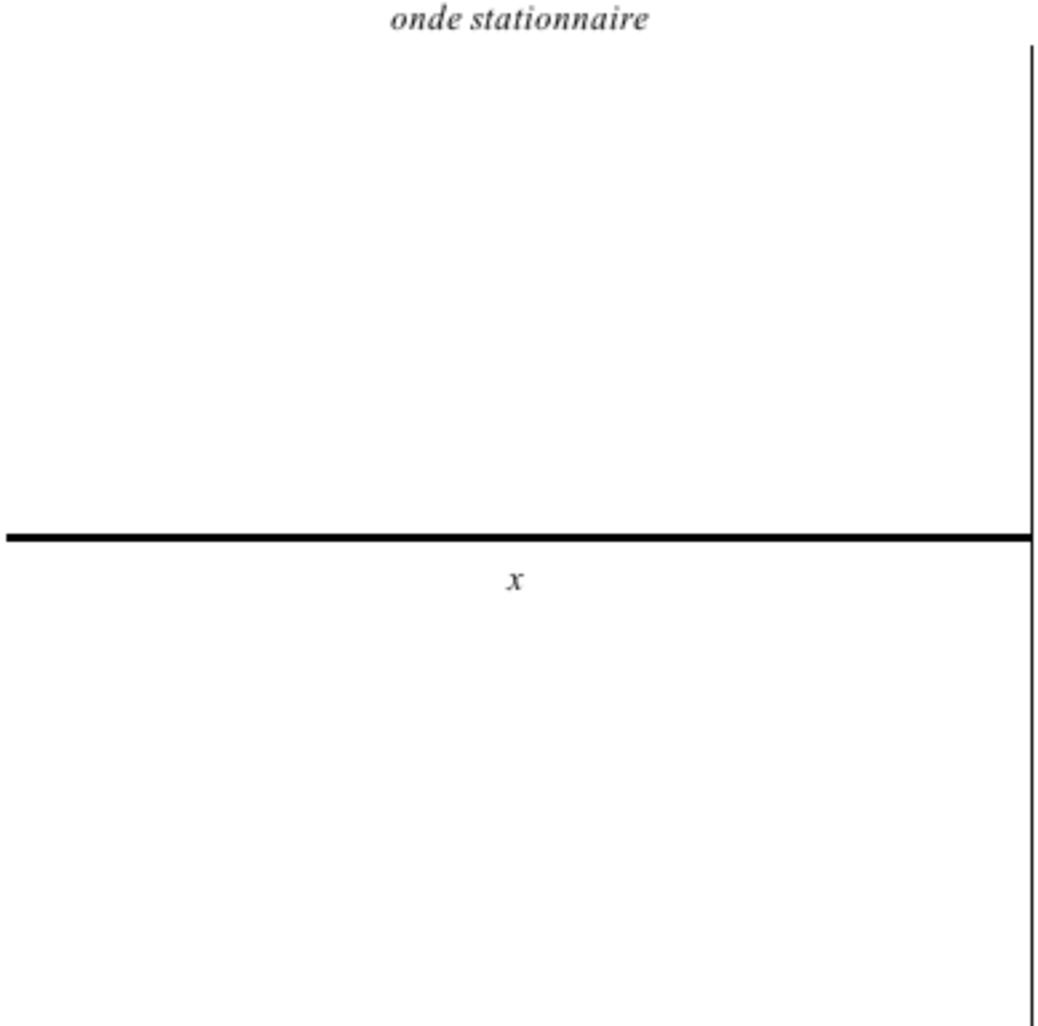
$$\vec{B} = \frac{2.E_0}{c}.\cos(k.z).\cos(\omega t).\vec{u}_x$$

Il s'agit ici **d'ondes stationnaires** : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément. La dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de l'espace vibrent en phase ou en opposition de phase.

Définition générale d'une onde stationnaire : $\Psi(\vec{r},t) = f\left(\vec{r}\right).g(t)$

Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

L'onde stationnaire résultant d'une incidente normale



Réflexion d’une OPPH sur un conducteur parfait

L’onde stationnaire résultant d’une incidente normale

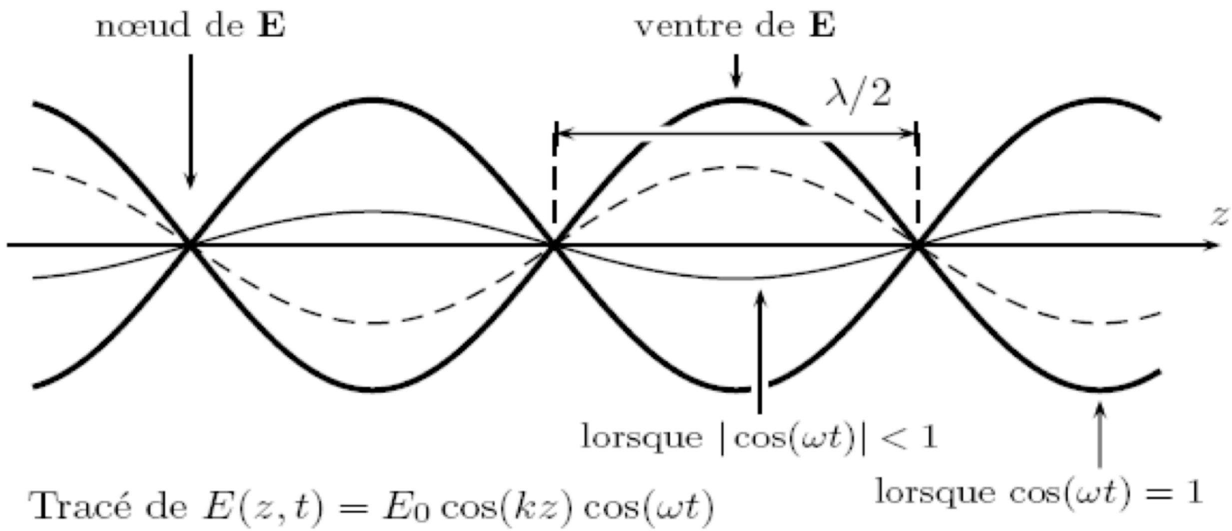
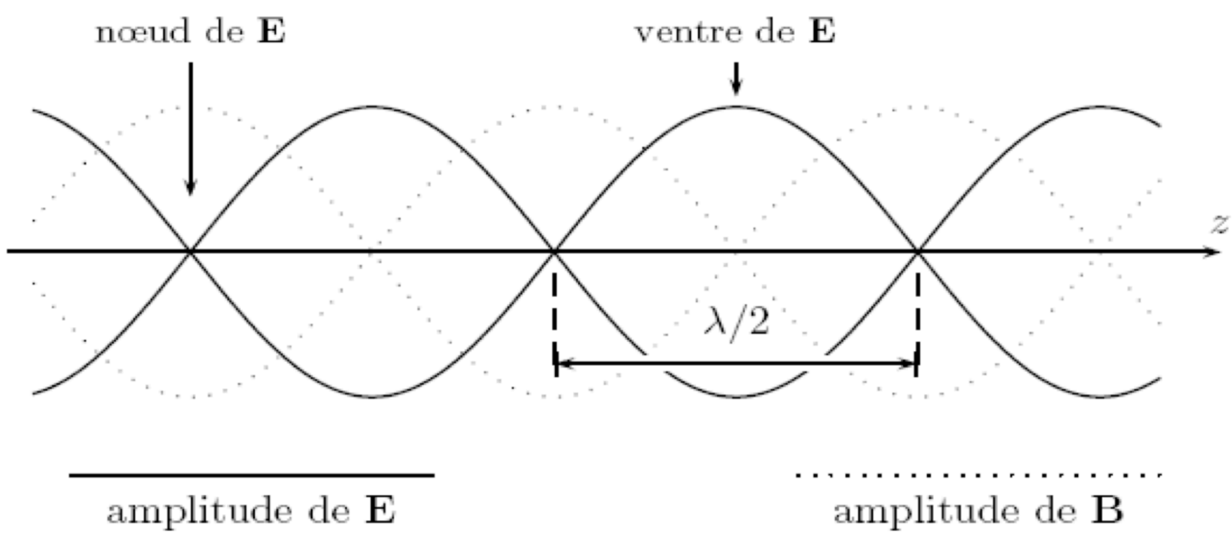
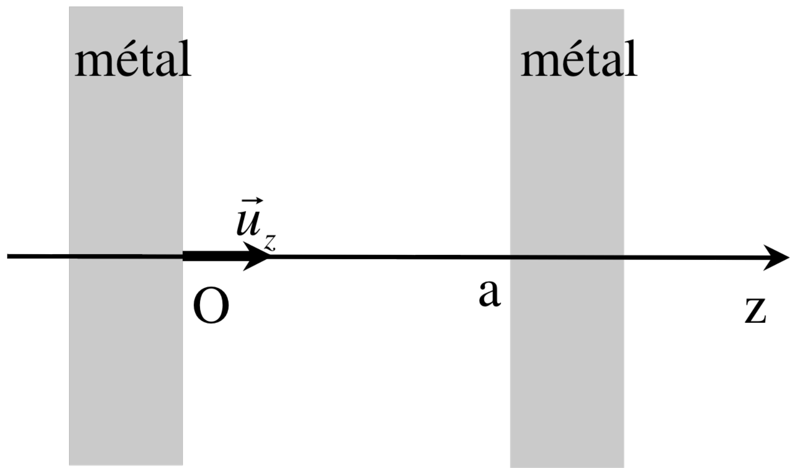


Figure 38.3 – Nœuds et ventres d’une onde stationnaire



Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

Cavité unidimensionnelle



Si l'on recherche uniquement la superposition stationnaire d'ondes progressives et régressives suivant z (réfléchies de part et d'autre), les composantes électriques transverses s'écrivent :

$$\underline{E}_x = f(z).e^{-j\omega t} \Rightarrow f''(z) = -\frac{\omega^2}{c^2}.f(z) \text{ par d'Alembert}$$

Dont la solution compatible avec les conditions aux limites est :

$$f_p(z) = \sin\left(\frac{\omega}{c}.z\right) = \sin\left(\frac{p\pi}{a}.z\right) \text{ avec p entier}$$

correspondant aux pulsations particulières : $\boxed{\omega_p = \frac{p\pi.c}{a}}$

Réflexion d'une OPPH sur un conducteur parfait

Cavité unidimensionnelle

On en déduit l'expression générale :

$$\underline{\vec{E}}(z,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\left(E_{0x,p}.\vec{u}_x+\underline{E}_{0y,p}.\vec{u}_y\right).\sin\left(p.\frac{\pi}{a}.z\right).e^{-j\frac{p\pi c}{a}.t}$$

dont les composantes réelles sont :

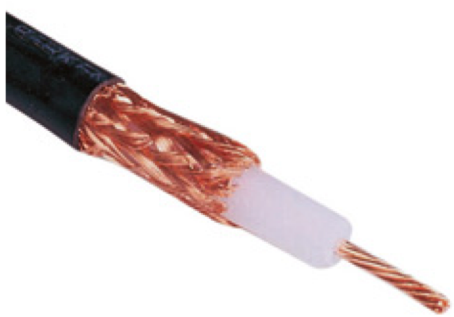
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}E_{0x,p}.\sin\left(p.\frac{\pi}{a}.z\right).\cos\left(\frac{p\pi c}{a}.t\right)\\ \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}E_{0y,p}.\sin\left(p.\frac{\pi}{a}.z\right).\cos\left(\frac{p\pi c}{a}.t+\varphi_p\right)\\ 0\end{cases}$$

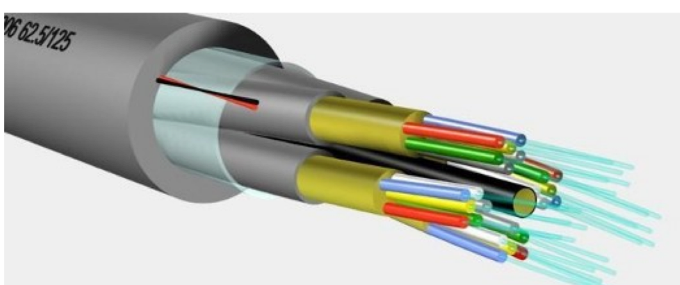
Cette onde transverse EM ne constitue évidemment pas une solution propagative :
La propagation ne se fera pas dans la direction z mais éventuellement sur x et y et on devine qu'il s'agira de la superposition d'OPPH séparément transverses EM (zig-zag de réflexions successives) dont la somme ne sera plus simultanément transverse E et M.

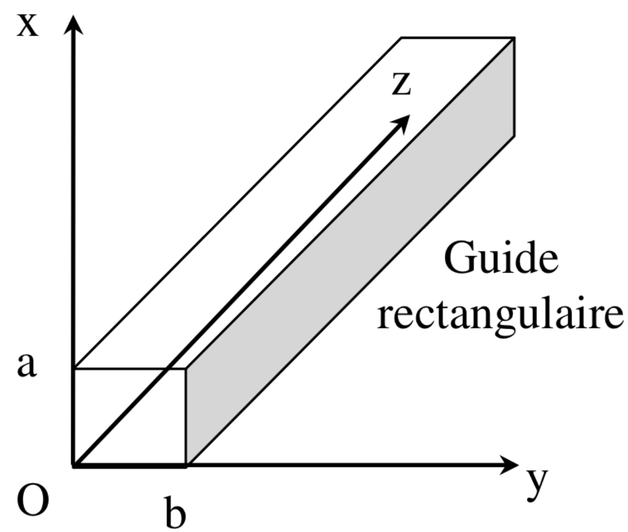
Les guides d'ondes

Le guide d'onde rectangulaire

Les guides d'ondes sont utilisés pour conduire les ondes électromagnétiques de leur source (magnétron, klystron, diode gunn pour les ondes centimétriques) vers la cavité résonante (four micro-onde) ou l'antenne émettrice (radar). On y canalise donc l 'énergie électromagnétique et on évite également les interférences avec des rayonnements extérieurs. Les cables coaxiaux et les fibres optiques constituent également des guides d'onde.







Attention : Contrairement aux exemples précédents l'axe du guide et donc de la propagation souhaitée de l'énergie est l'axe z.