

# Chapitre MF

## Éléments de mécanique des fluides

Statique des fluides  
Fluides en écoulement  
Cas particuliers d'écoulements du fluide parfait  
Bilans énergétiques : Bernoulli  
Pertes de charges dans les conduites

## L'échelle mésoscopique

Les grandeurs thermodynamiques locales pression  $p$  et température  $T$  ont été définies (en première année) par des modèles cinétiques appliqués aux gaz parfaits (vitesse quadratique moyenne, pression cinétique issue du modèle tridirectionnel...). On obtenait en particulier pour le gaz parfait monoatomique la relation :

$$p = \frac{1}{3} n^* m_p u^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{N}{V} \right) \left( \frac{m_p u^2}{2} \right) = \frac{2U}{3V} = \frac{2}{3} \frac{\left( \frac{3}{2} N k_B T \right)}{V} = \frac{N k_B T}{V} = \frac{n R T}{V}$$

Le modèle initial était donc une population discrète de particules présentant une distribution statistique particulière des vitesses (distribution de Boltzmann) à une température d'équilibre  $T$  **donnée globale** moyennant les vitesses quadratiques et la pression  $p$  prenait alors également une signification **globale** sur la **collection de particules**. Or nous donnerons une interprétation **locale** des ces grandeurs à l'échelle macroscopique !

Cette incohérence d'interprétation ne sera levée que **si l'on peut définir** une échelle « intermédiaire » entre l'échelle microscopique (particulaire !) et l'échelle macroscopique telle que l'on puisse :

- garder les interprétations cinétiques intégrales (moyennes sur des collections suffisantes)
- leur attribuer une signification « locale » fixée par l'échelle du capteur de mesure

Cette échelle est nommée échelle **mésoscopique**. Elle nous autorisera à considérer **locales** les grandeurs moyennées et donc à les intégrer sur des échelles macroscopiques pour des calculs de résultantes comme celle des forces de pression sur des extensions macroscopiques.

# L'échelle mésoscopique

L'appellation « fluide » est indistinctement attribuée à l'état gazeux et l'état liquide puisqu'il exprime la fluidité : déplacement relatif des particules possible à l'échelle macroscopique.

*Le modèle de « fluide » est un milieu continu et déformable (ne possède pas de forme propre). Les interactions interparticulaires restent suffisamment faibles pour autoriser (contrairement aux solides) un « glissement » relatif des particules (discrètes) les unes sur les autres. (Le terme « fluide » a été utilisé en thermodynamique physique pour les systèmes ayant une équation d'état de type  $f(p,T,V)=0$ )*

La différence importante de densité particulaire entre l'état gazeux et l'état liquide nécessite donc de préciser les limites de l'échelle mésoscopique.

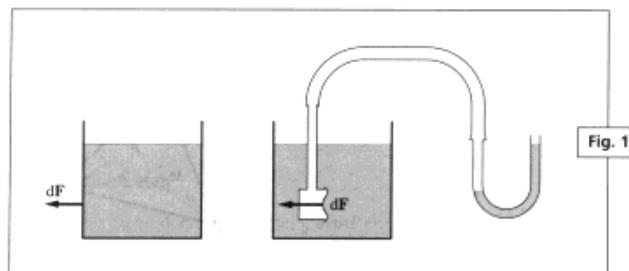
En prenant des ordres de grandeur convenables de masses volumiques de chaque état et de masses molaires, proposez un ordre de grandeur des distances interparticulaires pour l'eau et pour l'air.

Pour l'échelle spatiale, on prendra intuitivement plusieurs centaines de distances interparticulaires pour l'arête d'un cube infinitésimal représentant une collection suffisante de particules. Ce qui donne pour les gaz un ordre de grandeur du micromètre et du dixième de micromètre pour les liquides.

**Le volume élémentaire correspond ainsi au micron-cube pour les gaz et à 1 millième de micron-cube pour les liquides.**

## Résultante des actions pressantes

### Rappel de définition de la pression locale



La force infinitésimale exercée par le fluide sur la membrane s'écrit :  $d\vec{F}_m = p(M).d\vec{S}$  avec une **normale sortante du fluide**. Cette expression définissant la pression exercée par le fluide sur une partie de membrane de surface  $dS$ .

**La force subie** par le fluide  $d\vec{F}_f = -d\vec{F}_m$  s'écrit donc :  $d\vec{F}_f = -d\vec{F}_m = -p(M).d\vec{S}$

force dirigée vers l'intérieur du fluide que subirait cette « surface de fluide » si son repos était assuré par du fluide voisin.

Cette définition est évidemment généralisable aux forces pressantes entre deux solides, solide-fluide etc.

# Résultante des actions pressantes

## cas d'une surface ouverte

$$d\vec{F}_f = -p(M).d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}}$$

soit une résultante pressante **subie** par le fluide :  $\vec{F}_f = \iint_{\text{surface } S} -p(M_s).d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}}$

calcul nécessitant la répartition de la pression en tous les points  $M_s$  de la surface de contact  $S$

*Attention à ne pas confondre la pression (scalaire) avec la force surfacique pressante (vecteur)*

## cas d'une surface fermée (englobant un volume)

si le fluide est intérieur à cette surface fermée, la force subie par ce volume de fluide s'écrit :

$$\vec{F}_f = \oiint_{\text{Surface fermée } S} -p(M_s).d\vec{S}_{\text{sortante}}$$

si le fluide est extérieur à cette surface fermée, la force subie par le fluide extérieur s'écrit :

$$\vec{F}_f = \oiint_{\text{Surface fermée } S} p(M_s).d\vec{S}_{\text{sortante}}$$

*(On prendra l'habitude de choisir **systématiquement** cette orientation sortante pour les systèmes délimités par une surface fermée : une relation intégrale dérivée du théorème de Green (appelée formule du gradient) nous permettra de définir un équivalent volumique des forces de pression)*

# Torseur des actions pressantes

## cas particulier d'une pression uniforme

### surface ouverte

$$\vec{F}_f = \iint_{\text{surface } S} -p(M_s).d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}} = -p \cdot \iint_{\text{surface } S} d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}} = p \cdot \vec{S}_{\text{ext}\rightarrow\text{fluide}}$$

### surface fermée

Montrez que la résultante est alors nécessairement égale au vecteur nul  
(quelle que soit la forme de la surface fermée)

**Ce résultat sera mis à profit pour calculer des résultantes de forces de pression sur un système géométriquement fermé même si la pression n'est pas uniforme sur toute sa surface : on pourra ôter une valeur uniforme (souvent  $p^0=1 \text{ atm}$ ) sur toute la surface et trouver malgré tout la bonne résultante.**

Dans tous les cas, faisons remarquer que la connaissance de la résultante ne suffit pas à la description des actions mécaniques subies par le fluide : le moment des actions pressantes en un point compléterait le torseur.

<p><b>surface ouverte</b></p> $\vec{F}_f \equiv - \iint_S p(M_s).d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}}$ $\vec{M}_O \equiv - \iint_S \overrightarrow{OM_s} \times (p(M_s).d\vec{S}_{\text{fluide}\rightarrow\text{ext}})$	<p><b>surface fermée</b></p> $\vec{F}_{\text{fluide}} \equiv - \oiint p.d\vec{S}_{\text{sortant}}$ $\vec{M}_O \equiv - \oiint \overrightarrow{OM_s} \times p.d\vec{S}_{\text{sortant}}$
--	---

# Torseur des actions pressantes « volumiques »

On pourra démontrer à partir du théorème de Green-Ostrogradsky la « formule du gradient » :

$$\oint\!\!\!\oint f(M_s).d\vec{S}_{\text{sortant}} = \iiint_{V(S)} \overline{\text{grad}}(f(M)).d\tau$$

Appliquée au champ scalaire des pressions, elle permet d'écrire sous forme de **répartition volumique** intérieure la résultante des actions pressantes sur un volume délimité par une surface fermée et son moment en un point O :

$$\vec{F}_{\text{fluide}} \equiv -\oint\!\!\!\oint p(M_s).d\vec{S}_{\text{sortant}} = -\iiint_{V(S)} \overline{\text{grad}}(p(M)).d\tau$$

$$\vec{M}_O \equiv -\oint\!\!\!\oint \overline{OM}_s \times p(M_s).d\vec{S}_{\text{sortant}} = -\iiint_{V(S)} \overline{OM} \times \overline{\text{grad}}(p(M)).d\tau$$

**Faire apparaître ainsi une densité volumique d'une action surfacique devient particulièrement intéressant si les autres actions se décrivent réparties en volume également : on pourra proposer une forme locale volumique lors de l'expression d'un équilibre par exemple. (cf théorème d'Archimède)**

équivalent volumique des forces de pression :

$$\vec{f}_V(M) \equiv -\overline{\text{grad}}(p(M))$$

$$d\vec{F}_f = -\overline{\text{grad}}(p(M)).d\tau = \vec{f}_V(M).d\tau$$

$$\vec{F}_f = \iiint_{V(S)} \vec{f}_V(M).d\tau$$

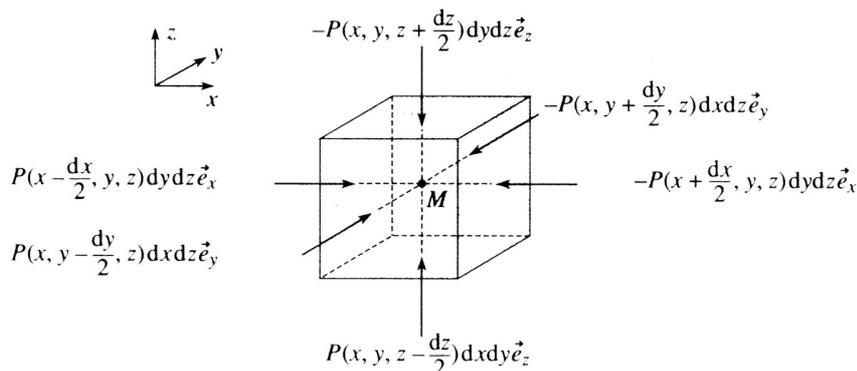
## Statique des fluides

On considère dans cette partie les fluides au repos dans le référentiel terrestre assimilé galiléen. Toute partie mésoscopique (ou macroscopique) est à l'équilibre.

### Présentation infinitésimale cartésienne

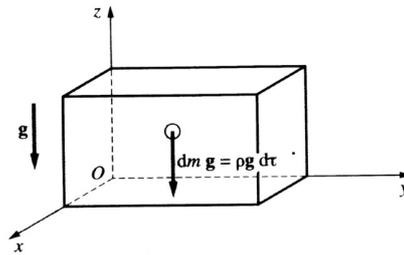
Système : un cube infinitésimal de fluide d'arêtes dx,dy,dz autour d'un point M

Exprimer les trois composantes infinitésimales cartésiennes des forces de pression et retrouver l'expression générale de la densité volumique vectorielle de force pressante volumique.



# Statique des fluides

Déterminer l'expression volumique de l'équilibre local dans le champ de pesanteur



On nomme **relation fondamentale de statique des fluides dans un champ de pesanteur** :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p(M)) + \rho(M) \cdot \vec{g}(M) \quad \text{ou bien} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho \cdot \vec{g}$$

## Cas d'un fluide supposé incompressible dans un champ de pesanteur uniforme

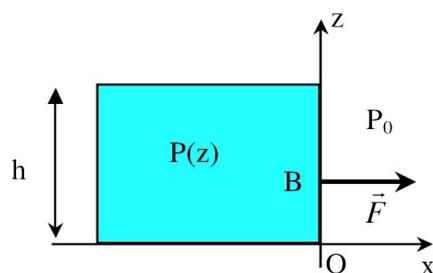
Montrer que le champ de pression à l'équilibre vérifie :  $p(z) = p(0) - \rho_0 \cdot g \cdot z$

Confirmer une augmentation d'environ 1 bar tous les 10m de profondeur sous l'eau.

Pourquoi ce modèle est-il inadapté à l'atmosphère ?

# Statique des fluides : action sur un plan vertical

## Torseur des actions de pression d'un fluide incompressible sur un plan vertical



Montrer qu'en présence du champ de pesanteur uniforme, la résultante des actions de pression sur le plan vertical de hauteur  $h$  placé en  $x=0$  et de dimension transversale  $a$  suivant  $y$  s'écrit :

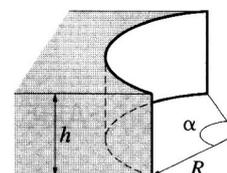
$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_0 g a \frac{h^2}{2} \vec{e}_x$$

**Un point « d'application » B de la résultante des actions pressantes** a été placé sur le plan vertical. Comment est-il défini ? Quel intérêt ?

Déterminer ses coordonnées exactes.

## Calculs de résultante des forces pressantes dans d'autres géométries

On approxime la forme d'un barrage à un secteur cylindrique d'angle  $\alpha$  de rayon  $R$  et soumis à une hauteur d'eau  $h$ . Résultante et point d'application ?



# Equilibre isotherme de l'atmosphère

## Cas d'un fluide compressible dans un champ de pesanteur uniforme

Considérant l'atmosphère en équilibre thermique à  $T_0$  et assimilable à un gaz parfait, montrer que le champ de pression statique vérifie :

$$p(z) = p(0) \cdot \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$$

(L'hypothèse isotherme sera abandonnée pour être améliorée dans un exercice de TD)

Dans la troposphère (0 à 12 km d'altitude environ), on propose en réalité la « formule internationale du nivellement barométrique » donnant une pression en millibars et basée sur un modèle d'atmosphère normalisé (air sec à 15°C au sol et -6,5 °C/km) :

$$p(z) = 1013,25 \cdot \left(1 - \frac{0,0065 \cdot z}{288,15}\right)^{5,255}$$

La valeur de l'exposant vaut littéralement et numériquement :

$$\frac{g}{\alpha \cdot r} = \frac{9,80665}{0,0065 \cdot \frac{8,3145}{28,964 \cdot 10^{-3}}} = 5,255$$

Dans les modèles de convection, on envisage en première approximation des évolutions adiabatiques lorsqu'une masse de fluide se déplace dans l'atmosphère : la loi de Laplace permet de tracer des courbes dites de « gradient thermique adiabatique sec » liant les variations d'altitude à des variations de pression et de température : les abaques se nomment « **émagrammes** ».

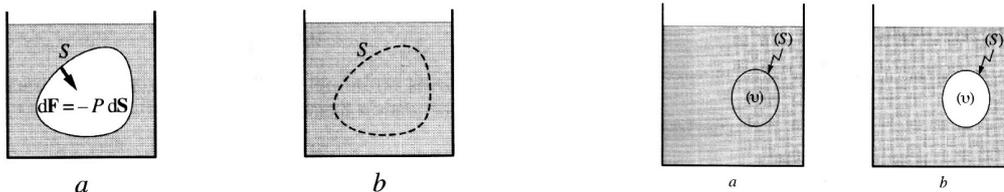
(L'humidité de l'air modifie ces abaques en « adiabatiques humides » sous certaines températures car la condensation fournit de la chaleur et modifie donc le gradient thermique adiabatique (de -2°C/km à 40°C à -10°C/km à -40°C))

## Et la poussée d'Archimède dans tout ça ?

**La poussée d'Archimède n'EST PAS une action mécanique supplémentaire !**

**La poussée d'Archimède EST la résultante des actions pressantes du fluide dans lequel baigne un système !**

Isolons (par la pensée !) un volume de fluide en équilibre mécanique délimité par une surface donnée. Il est en équilibre sous les actions conjuguées de la pesanteur et des actions pressantes. Le gradient de pression dans le fluide est initié par le champ de pesanteur et donne une résultante verticale ascendante compensant exactement la pesanteur : c'est la résultante nommée parfois « poussée d'Archimède »



Un **corps de type différent** épousant parfaitement la même surface frontière subira nécessairement la même répartition surfacique des efforts pressants et donc une poussée d'Archimède rigoureusement identique à celle du fluide « déplacé » soit, par application de l'équilibre mécanique (lorsqu'il s'agissait du même fluide intérieur), un torseur des actions d'Archimède de résultante l'opposée de la pesanteur du fluide déplacé et de moment nul calculé au barycentre du fluide déplacé (appelé centre de poussée). **Ce corps ne sera pas a priori à l'équilibre suivant sa masse et sa répartition !**

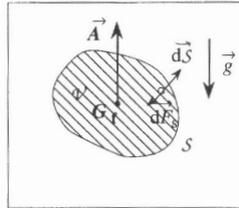
# Et la poussée d'Archimède dans tout ça ?

## Formulation du « principe d'Archimède »

(Théorème depuis sa démonstration au XVIIe siècle)

« Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède. »

## Formulation torsorielle



Actions de pression exercées par un fluide sur un corps solide totalement immergé.

$$\vec{A} \equiv \vec{F}_{pressantes} \equiv -\oint p \cdot d\vec{S}_{sortant} = -\iiint_{V(S)} \overline{grad}(p) d\tau = -\iiint_{V(S)} \rho_{fluide} \cdot \vec{g} d\tau = -m_{fluide \text{ déplacé}} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{M}_O \equiv -\oint \overline{OM} \times p \cdot d\vec{S}_{sortant} = -\iiint_{V(S)} \overline{OM} \times (\rho_{fluide} \cdot \vec{g}) d\tau = \overline{OG_f} \times \vec{A} \quad (\text{nul calculé en } G_f)$$

## Description(s) des écoulements fluides

Lorsque l'on cherche à suivre une particule mésoscopique de fluide lors d'un écoulement, on opte pour la **description Lagrangienne**.

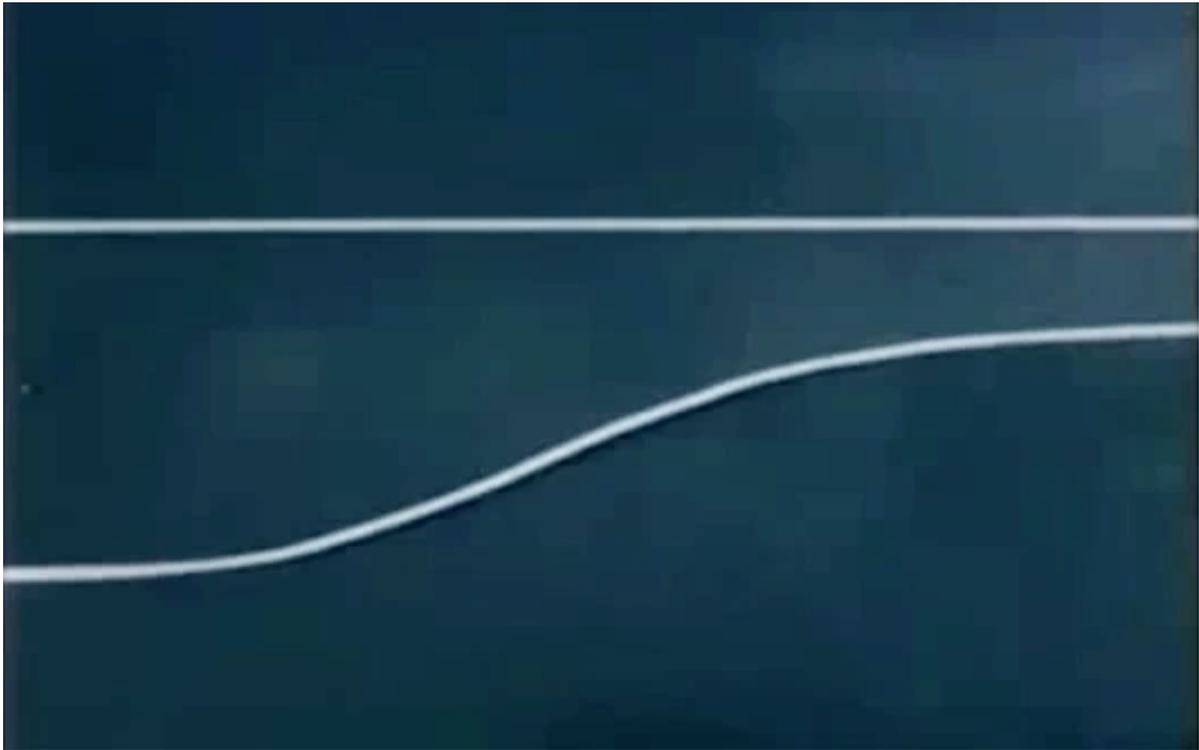
La particule (« marquée » à un instant origine) suit **une trajectoire** donnée tant qu'elle ne se dissocie pas. Ses vecteurs position, vitesse et accélération instantané sont définis à chaque instant et on peut envisager une expression du PFD sur ce **système fermé qui se déplace** dans le référentiel d'étude. La description de l'écoulement nécessite la connaissance de ces grandeurs pour l'ensemble des particules dans le champ d'observation (certaines y entrant d'autres en sortant).

L'évolution d'une particule de fluide (liquide) peut donc être visualisée en « colorant » de manière fugace une zone de fluide et en prenant des clichés successifs de cette tache mobile. La vitesse serait mesurée grâce au déplacement infinitésimal de la tache entre deux clichés. La superposition de ces photos donnerait (en pointillés) la trajectoire de la particule de fluide.

ATTENTION : **Il ne faut pas confondre trajectoire et ligne d'émission** (souvent utilisée pour la visualisation).

**Une ligne d'émission est obtenue par coloration continue d'une zone de fluide. Un cliché à l'instant t permet de visualiser les positions occupées par l'infinité continue de particules de fluide étant passées par la position d'émission à des dates successives.** (Les tangentes à cette ligne à l'instant t sont les directions des vecteurs-vitesse instantanés des différentes particules constituant la ligne)

# De Lagrange à Euler



## Description Eulérienne du champ des vitesses

Comme nous l'avons vu dans la video précédente, les propriétés d'un écoulement ne seront mesurables que localement dans le référentiel du laboratoire. A chaque position fixe dans ce référentiel, il s'agira d'**une grandeur locale concernant une nouvelle particule mésoscopique à chaque nouvel instant.**

On constate que l'on se dirige donc vers l'**étude de systèmes ouverts** dans la description Eulérienne et que certains écoulements auront la particularité d'être **stationnaires** dans un référentiel judicieux (en translation avec la vague précédente par exemple).

Parmi les champs eulériens caractérisant une zone d'écoulement, on a le champ des vecteurs vitesses locaux.

Le point M de l'espace devient un point fixe !  $OM = \vec{r}$

**Le vecteur-vitesse local ne s'écrit donc certainement pas comme une dérivée :**  $\vec{v}(t) \neq \frac{d\vec{r}}{dt}$

Le champ vectoriel des vitesses est vu comme une fonction spatio-temporelle (sans relation entre la position et l'instant) :  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$  en 3D(+1 !) cartésiennes

**Il s'agit pour chaque position de l'espace du vecteur-vitesse de la particule mésoscopique passant à cette position à l'instant t.**

La variation explicitement temporelle de cette vitesse locale définira l'accélération eulérienne locale :

$$\vec{a}_{Euler}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

...différente de l'accélération particulaire (lagrangienne) qui est complétée par l'accélération convective (lié au déplacement de la particule dans le champ) :

$$\vec{a}_{Lagrange}(\vec{r}(t), t) \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{(\vec{v} \cdot \text{grad})}_{\text{accélération convective}}(\vec{v}) + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\text{accélération eulérienne}}$$

$\frac{D\vec{v}}{Dt}$  : dérivée particulaire de la vitesse

# Description Eulérienne du champ des vitesses

Nous n'aurons pas besoin des grandeurs particulières tant que nous ne réalisons pas nos bilans sur des systèmes fermés mais sur des systèmes ouverts : le PFD sur une particule de fluide aurait nécessité l'accélération lagrangienne ! (**Euler et Navier-Stokes Hors-programme**)

Une description (**partielle !**) du champ vectoriel des vitesses est envisageable par les tracés de **lignes de courant** (« lignes de champ des vecteurs-vitesse »).

A chaque instant  $t$ , on trace un réseau de courbes (lignes en 2D et nappes en 3D) **tangentes en chaque point au vecteur-vitesse instantané**.

*Une ligne de courant est une ligne de champ des vitesses : elle est tangente en chaque point de l'espace à la vitesse eulérienne instantanée. Elle n'a donc de signification qu'instantanée (à l'instant  $t$  uniquement).*

Mathématiquement, tout déplacement élémentaire le long d'une ligne de courant vérifie l'équation :

$$\vec{v} \times d\vec{l} = \vec{0}$$

Soit en cartésiennes par exemple :  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = k(M, t)$

Application littérale :

Soit le champ des vitesses d'expression :  $\vec{v}(x, y, z, t) = v_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x + v_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y$   
avec  $v_0$  et  $\omega$  des constantes.

qui représente donc le cas particulier d'un champ uniforme et variable.

1. donner l'équation cartésienne des lignes de champ à l'instant  $t$

2. donner l'équation de la trajectoire d'une particule située initialement en  $M(x_0, y_0)$

## Écoulements particuliers

### UNIFORME

Un écoulement est uniforme si tous ses champs caractéristiques sont indépendants de la position considérée.

L'application de tout opérateur spatial de dérivation à une grandeur caractéristique donne un résultat nul.

### STATIONNAIRE (ou PERMANENT)

Un écoulement est stationnaire lorsque toutes les grandeurs locales ne dépendent pas explicitement du temps.

L'application de l'opérateur de dérivation temporelle à une grandeur caractéristique donne un résultat nul.

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{0} \quad \forall \vec{g} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad \forall g$$

Attention : les grandeurs particulières (comme la vitesse particulaire) pourront dépendre **implicitement** du temps : la vitesse d'une particule peut avoir changé car elle s'est déplacé dans un champ qui n'était pas uniforme. En passant à une position différente où il « règne » une vitesse différente, elle a accéléré ou décéléré.

### INCOMPRESSIBLE

Un écoulement est incompressible lorsque toute particule de fluide garde une masse volumique constante lors de son déplacement. Ce qui s'écrit avec la notation dérivée particulaire :  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

On montrera que cette propriété se traduit sur le champ des vitesses par :  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  (hors d'un puits ou d'une source de masse)

Rq : Un fluide supposé incompressible ne peut s'écouler que de façon incompressible mais un fluide compressible peut très bien subir un écoulement incompressible. Son caractère compressible peut être très peu exploité lors de son écoulement. Ainsi de nombreux exercices porteront sur des écoulements gazeux supposés incompressibles.

# Écoulements particuliers

## INCOMPRESSIBLE-HOMOGENE

Un écoulement est incompressible-homogène lorsque sa masse volumique est une constante  $\mu_0$  (indépendante de l'espace et du temps)

*Rq : En effet un écoulement simplement incompressible peut être celui d'un corps fluide hétérogène (« grumeaux » dans une soupe)*

## IRROTATIONNEL (ou POTENTIEL)

Un écoulement est irrotationnel dans un domaine si l'opérateur rotationnel appliqué au vecteur-vitesse est nul en tout point de ce domaine. Sinon il est appelé tourbillonnaire.

Le rotationnel d'un gradient étant identiquement nul : cela implique qu'il existe un potentiel scalaire dont dérive le champ vectoriel des vitesses par l'expression :  $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \varphi \vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$

*c'est la raison pour laquelle on parle aussi d'écoulement potentiel.*

On appelle vecteur tourbillon le vecteur local instantané de rotation :  $\vec{\Omega} \equiv \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v})$

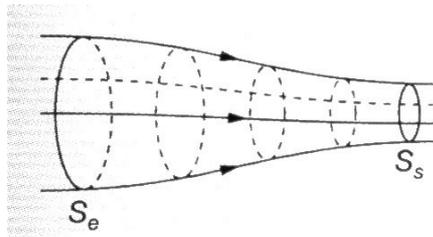
(qui serait uniforme dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe)

*Attention aux faux-amis ! Voici deux champs dont vous calculerez le rotationnel en un point quelconque :*

$$\vec{v}(M) = a.y \vec{e}_x \qquad \vec{v}(M) = \frac{b}{r} . \vec{e}_\theta$$

*Vous pouvez choisir des contours particuliers pour y calculer la circulation du vecteur-vitesse et confirmer le résultat du calcul du rotationnel.*

## Tube(s) de courant



On définit un contour quelconque dans l'écoulement (3D) délimitant une famille de surfaces d'entrée. On en choisit une et on considère l'ensemble des lignes de courant traversant les points de ce contour qui constitueront la surface latérale du **tronçon de courant** (non traversée par des particules mésoscopiques à l'instant t). On définit alors une section de sortie dont le contour est également porté par les mêmes lignes de courants qui ont défini la section d'entrée mais n'ayant aucun point en commun avec le contour d'entrée. L'ensemble constitue alors un tronçon de courant : surface géométriquement fermée d'un système ouvert.

Un **tube de courant** est une surface ayant pour directrices l'infinité de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé .

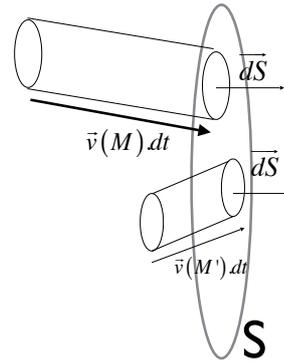
# Débit de volume = flux de vitesse

**Le débit volumique est par définition le volume qui traverse une section donnée par unité de temps.**

Il peut donc s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant de volume à travers une surface S :

$$D_v = \frac{\delta V}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_v \cdot d\vec{S}$$

*Le schéma ci-contre figure des cylindres biseautés (supposés infinitésimaux en longueur et en section au voisinage immédiat de S) contenant les particules mésoscopiques qui vont traverser S pendant dt*



Le volume (doublement infinitésimal) qui traversera dS pendant dt s'écrit :  $\delta^2 V = \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S}$

Soit un volume traversant toute la surface S pendant dt  $\delta V = \iint_S \delta^2 V = \iint_S \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S}$

et donc un débit volumique 
$$D_v = \frac{\delta V}{dt} = \frac{\iint_S \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S}}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

**Ainsi le vecteur-vitesse apparaît-il comme la densité de courant volumique local :**

$$\vec{j}_v = \vec{v} \quad \text{et} \quad D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

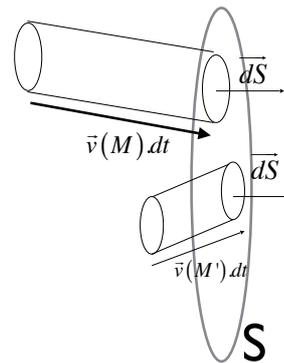
# Débit de masse = flux de $\mu\vec{v}$

**Le débit massique est par définition la masse qui traverse une section donnée par unité de temps.**

Il peut donc s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant de masse à travers une surface S :

$$D_m = \frac{\delta m}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

*Le schéma ci-contre figure des cylindres biseautés (supposés infinitésimaux en longueur et en section au voisinage immédiat de S) contenant les particules mésoscopiques qui vont traverser S pendant dt*



La masse (doublement infinitésimale) qui traversera dS pendant dt s'écrit :  $\delta^2 m = \mu \cdot (\vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S})$

Soit une masse traversant toute la surface S pendant dt  $\delta m = \iint_S \delta^2 m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S}$

et donc un débit massique 
$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \frac{\iint_S \mu \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S}}{dt} = \iint_S (\mu \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

**Ainsi la densité de courant massique local s'écrit:**

$$\vec{j}_m = \mu \vec{v} \quad \text{et} \quad D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

# Généralisation

**Le débit d'une grandeur scalaire G est par définition la quantité de G qui traverse une section donnée par unité de temps.**

Il peut toujours s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant de grandeur G à travers une surface S :

$$D_G = \frac{\delta G}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_G \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \vec{j}_G = (\mu \cdot g) \vec{v}$$

$$\text{soit } \boxed{D_G = \iint_S (\mu \cdot g) \vec{v} \cdot d\vec{S}}$$

avec:

$\mu$  la masse volumique locale et instantanée

$g$  la **densité massique locale et instantanée de la grandeur G**

$\mu g$  la **densité volumique locale et instantanée de la grandeur G**

On confirme qu'en effet :

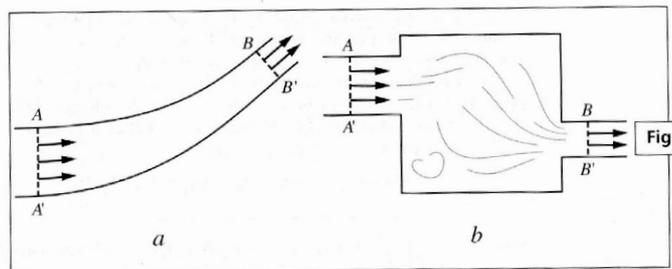
- Pour la masse m, la densité massique locale et instantanée de masse vaut toujours 1 d'où :

$$D_m = \iint_S \mu \cdot 1 \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- Pour le volume V, la densité massique locale et instantanée de volume vaut ( $v=1/\mu$ ) d'où :

$$D_V = \iint_S \mu \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

## Bilans sur un système ouvert en entrée et sortie



Qu'il s'agisse d'un tronçon de tube de courant (a) ou d'un système ouvert seulement en entrée et en sortie (surface « latérale » imperméable aux particules) (b), la surface de contrôle (ABB'A'A) est géométriquement fermée et le flux d'une grandeur G quelconque au travers la totalité de cette surface pourra alors se décomposer ainsi :

$$\Phi_{\text{globalement sortant}} \equiv \oiint_{S(V)} \vec{j}_G \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = \iint_{S_e} \vec{j}_G(M_e) \cdot d\vec{S}_{e(\text{sortant})} + \iint_{S_s} \vec{j}_G(M_s) \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} + \vec{0}$$

$$\Phi_{\text{globalement sortant}} = \iint_{S_s} \vec{j}_G(M_s) \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} - \iint_{S_e} \vec{j}_G(M_e) \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} = D_{G(\text{en sortie})} - D_{G(\text{en entrée})}$$

Ainsi l'équation générale de conservation globale d'une grandeur  $G_{\Sigma O}$  caractérisant un système ouvert s'écrira :

$$\frac{\partial G_{\Sigma O}}{\partial t} = -\Phi_{\text{sortant}} + \frac{\delta G^P}{dt} = - \left( \iint_{S_s} \mu_s \cdot g_s \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} - \iint_{S_e} \mu_e \cdot g_e \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} \right) + \frac{\delta G^P}{dt} = D_{G(\text{entrée})} - D_{G(\text{sortie})} + \frac{\delta G^P}{dt}$$

# Bilan de masse

**La masse est conservative** (dans le domaine des faibles énergies échangées) donc le terme de production est toujours nul. Il reste donc :

$$\frac{\partial M_{\Sigma O}}{\partial t} = -\Phi_{\text{sortant}} = -\left( \iint_{S_s} \mu_s \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} - \iint_{S_e} \mu_e \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} \right) = D_{m(\text{entrée})} - D_{m(\text{sortie})}$$

Dans le cas particulier des **régimes stationnaires** :

$$\frac{\partial M_{\Sigma O}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{D_{m(\text{entrée})} = D_{m(\text{sortie})}} \Leftrightarrow \iint_{S_s} \mu_s \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} = \iint_{S_e} \mu_e \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})}$$

Dans le cas particulier des **régimes stationnaires unidimensionnels entrée-sortie** :

$$\boxed{D_{m(\text{entrée})} = D_{m(\text{sortie})}} \Leftrightarrow \iint_{S_s} \mu_s \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} = \iint_{S_e} \mu_e \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} \Rightarrow \mu_s \cdot \vec{v}_s \cdot \vec{S}_{s(\text{sortant})} = \mu_e \cdot \vec{v}_e \cdot \vec{S}_{e(\text{entrant})}$$

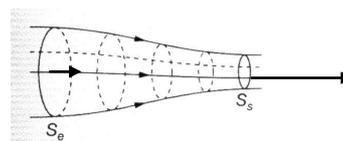
Soit en choisissant des sections d'entrée et de sortie perpendiculaires localement au tube de courant :

$$\boxed{\mu_s \cdot v_s \cdot S_{s(\text{sortant})} = \mu_e \cdot v_e \cdot S_{e(\text{entrant})}}$$

Dans le cas encore plus particulier des **régimes stationnaires unidimensionnels entrée-sortie et incompressible-homogène** :

$$\boxed{v_s \cdot S_{s(\text{sortant})} = v_e \cdot S_{e(\text{entrant})}}$$

On reconnaîtra alors un zone de ralentissement de fluide par un évasement de tube de courant et inversement une accélération par une diminution de section de tube :



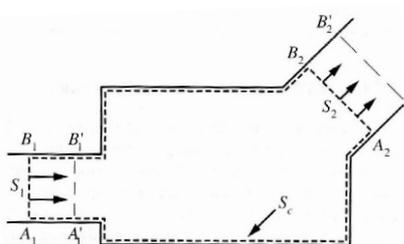
# Bilan de volume

**Le volume n'est pas a priori conservatif pour un système fermé !**

On peut penser à la dilatation d'un ballon baudruche fermé sous une cloche dans laquelle on fait progressivement le vide

$$\frac{\partial V_{\Sigma O}}{\partial t} = -\left( \iint_{S_s} \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} - \iint_{S_e} \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} \right) + \frac{\delta V^p}{dt} = D_{V(\text{entrée})} - D_{V(\text{sortie})} + \frac{\delta V^p}{dt} (???)$$

Intéressons nous alors à un système **fermé** particulier qui a avancé entre t et t+dt de (A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>A<sub>1</sub>) à (A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>B'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>A'<sub>1</sub>):



Souvent le système **ouvert** correspondant à la partie commune (A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>B'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>A'<sub>1</sub>) aura un volume V<sub>ΣO</sub> constant **même si le régime n'est pas stationnaire !**

Il suffit alors d'invoquer l'extensivité du volume pour écrire :

$$V_{\Sigma F}(t) = V_{\Sigma O} + D_{V_e} dt$$

$$V_{\Sigma F}(t + dt) = V_{\Sigma O} + D_{V_s} dt$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial V_{\Sigma O}}{\partial t} = 0 = D_{V(\text{entrée})} - D_{V(\text{sortie})} + \frac{dV_{\Sigma F}}{dt}$$

Et c'est donc dans le cas particulier des écoulements **INCOMPRESSIBLES**  $\boxed{\frac{dV_{\Sigma F}}{dt} = 0}$  que l'on pourra écrire :

$$\boxed{D_{V(\text{entrée})} = D_{V(\text{sortie})}} \Leftrightarrow \iint_{S_s} \vec{v}_s \cdot d\vec{S}_{s(\text{sortant})} = \iint_{S_e} \vec{v}_e \cdot d\vec{S}_{e(\text{entrant})} \Rightarrow v_s \cdot S_{s(\text{sortant})} = v_e \cdot S_{e(\text{entrant})}$$

(cas particulier des **systèmes unidimensionnels entrée-sortie**)

# Formes locales des bilans

On a montré (chapitre Tphi1) que l'expression globale de la conservation d'une grandeur :

$$\frac{dG}{dt} = -\oint_{S(V)} \vec{j}_G \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} + \frac{\delta G^p}{dt}$$

pouvait s'écrire avec les grandeurs locales et le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\frac{d\left(\iiint_{V(S)} \mu g d\tau\right)}{dt} = -\iiint_{V(S)} \text{div}(\vec{j}_G) d\tau + \iiint_{V(S)} \sigma_G^p d\tau$$

soit sous forme locale et instantanée :  $\frac{\partial(\mu g)}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_G) + \sigma_G^p$  ou  $\boxed{\text{div}(\vec{j}_G) + \frac{\partial(\mu g)}{\partial t} = \sigma_G^p}$

appliquée à **la masse** (grandeur conservative) :  $\boxed{\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial(\mu)}{\partial t} = 0}$

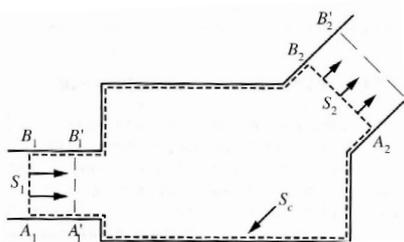
appliquée **au volume** :  $\boxed{\text{div}(\vec{v}) + \frac{\partial(1)}{\partial t} = \text{div}(\vec{v}) = \sigma_V^p}$

et comme il a été montré précédemment (pour un système ouvert de volume constant) que  $\frac{\partial V^p}{dt} = \frac{dV_{\Sigma F}}{dt}$   
le terme de production égalait l'augmentation du volume du système fermé qui avance

soit pour un écoulement **INCOMPRESSIBLE** :  $\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}$

## Premier principe appliqué aux systèmes ouverts

Intéressons nous toujours à un système **fermé** particulier qui a avancé entre t et t+dt de (A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>A<sub>1</sub>) à (A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>B'<sub>2</sub>A'<sub>2</sub>A'<sub>1</sub>):



Le système **ouvert** correspondant à la partie commune (A'<sub>1</sub>B'<sub>1</sub>B<sub>2</sub>A<sub>2</sub>A'<sub>1</sub>) voit toutes ses grandeurs caractéristiques évoluer avec le temps tant que le régime n'est pas stationnaire.

Il suffit alors d'invoquer l'extensivité de l'énergie (sous toutes ses formes) pour écrire :  $E_{\Sigma F}(t) = E_{\Sigma O}(t) + D_{Ee} dt$

$$E_{\Sigma F}(t + dt) = E_{\Sigma O}(t + dt) + D_{Es} dt$$

Or le premier principe de Thermodynamique des systèmes fermés stipule :

$$\frac{dE_{\Sigma F}}{dt} = P_{th} + P_{\text{méca non conservatives}} = P_{th} + P_{\text{pression amont (entrée) et aval (sortie)}} + P_{\text{pression parties mobiles}} + P_{\text{autres non conservatives}}$$

qui devient pour le système ouvert :

$$\boxed{\frac{\partial E_{\Sigma O}}{\partial t} + D_{Es} - D_{Ee} = P_{th} + P_{\text{pression amont (entrée) et aval (sortie)}} + P_{\text{pression parties mobiles}} + P_{\text{autres non conservatives}}}$$

Relation générale aux systèmes avec une entrée et une sortie que nous allons simplifier dans le cas très particulier des écoulements **incompressibles-homogènes et stationnaires de fluides PARFAITS**.

# Premier principe appliqué aux systèmes ouverts

$$\frac{\partial E_{\Sigma o}}{\partial t} + D_{Es} - D_{Ee} = P_{th} + P_{\text{pression amont (entrée) et aval (sortie)}} + P_{\text{pression parties mobiles}} + P_{\text{autres non conservatives}}$$

=0 si stationnaire

appelée aussi **puissance indiquée Pi**  
 puissance reçue par le fluide de la part d'un opérateur extérieur (humain, compresseur, turbine..)

=0 si fluide parfait

**Un fluide est parfait si l'on peut négliger tout phénomène diffusif en son sein.** Ce qui exclut toute viscosité en périphérie du système. (la viscosité correspond à une diffusion de quantité de mouvement)

$D_{Es} = \underbrace{D_{ms}}_{\text{débit massique en sortie}} \cdot \left( \underbrace{u_s}_{\text{énergie interne massique en sortie}} + \underbrace{ec_s}_{\text{énergie cinétique d'ensemble massique en sortie}} + \underbrace{ep_s}_{\text{énergie potentielle extérieure massique en sortie}} \right)$   
 $D_{Ee} = \underbrace{D_{me}}_{\text{débit massique en entrée}} \cdot \left( \underbrace{u_e}_{\text{énergie interne massique en entrée}} + \underbrace{ec_e}_{\text{énergie cinétique d'ensemble massique en entrée}} + \underbrace{ep_e}_{\text{énergie potentielle extérieure massique en entrée}} \right)$

et si l'écoulement est stationnaire :  $D_{me} = D_{ms} = D_m$   
 qui permet l'écriture du terme sous la forme :

$$D_m \cdot [u + e_c + e_p]_e^s$$

travail élémentaire reçu de la part du fluide en amont de l'entrée :

$$\delta W_e = -p_e(0 - \delta V_e) = p_e \cdot \left( \frac{1}{\mu_e} \cdot D_m \cdot dt \right) \Rightarrow P_{\text{fluide en amont}} = \frac{D_m \cdot p_e}{\mu_e}$$

$$\delta W_s = -p_s(\delta V_s - 0) = -p_s \cdot \left( \frac{1}{\mu_s} \cdot D_m \cdot dt \right) \Rightarrow P_{\text{fluide en aval}} = -\frac{D_m \cdot p_s}{\mu_s}$$

soit  $P_{\text{pression amont et aval}} = -D_m \cdot \left[ \frac{p}{\mu} \right]_e^s = -D_m \cdot [p \cdot v]_e^s$  avec  $v = \frac{1}{\mu}$  volume massique

$\mu_s = \mu_e = \mu$  si incompressible-homogène

# Premier principe appliqué aux systèmes ouverts

$$\frac{\partial E_{\Sigma o}}{\partial t} + D_{Es} - D_{Ee} = P_{th} + P_{\text{pression amont (entrée) et aval (sortie)}} + P_{\text{pression parties mobiles}} + P_{\text{autres non conservatives}}$$

devient donc pour un écoulement **incompressible-homogène et stationnaire de fluide PARFAIT**

$$D_m \cdot [u + e_c + e_p]_e^s = P_{th} - D_m \cdot [p \cdot v]_e^s + P_i + 0$$

soit en faisant apparaître l'enthalpie massique h :

$$D_m \cdot [u + pv + e_c + e_p]_e^s = D_m \cdot [h + e_c + e_p]_e^s = P_{th} + P_i$$

On utilisera **extrêmement fréquemment** dans les machines thermiques, ce que l'on nommera : **BILAN ENTHALPIQUE DU SYSTEME OUVERT ET EN REGIME PERMANENT**

$$D_m \cdot [h + e_c + e_p]_e^s = P_{th} + P_i$$

et si l'on tient compte de la **viscosité** de cet écoulement **incompressible-homogène et stationnaire**

$$D_m \cdot [h + e_c + e_p]_e^s = P_{th} + P_i + P_{\text{visc}}$$

# Premier principe appliqué aux systèmes ouverts

Dans le modèle d'un fluide **en écoulement parfait**, il ne peut y avoir de création d'entropie pendant l'écoulement (cette création de désordre accompagnant la conversion d'énergie cinétique ordonnée en énergie interne d'agitation thermique) ainsi l'augmentation d'énergie interne d'agitation thermique ne peut être due qu'au transfert de chaleur à travers la surface frontière du système.

Dans ce modèle (ET UNIQUEMENT DANS CE MODÈLE !), les bilans d'énergie mécanique (ordonnée) et d'énergie thermique (désordonnée) sont **découplés** :

$$\text{Bilan d'énergie THERMIQUE : } \boxed{D_m \cdot [u]_e^s = P_{th}}$$

$$\text{Bilan d'énergie MECANIQUE : } \boxed{D_m \cdot [p.v + e_c + e_p]_e^s = P_i}$$

Appliqué à un système **aux frontières fixes**, on obtient **pour l'écoulement parfait** :

$$\left[ \frac{p}{\mu} + e_c + e_p \right]_e^s = 0$$

## Relation de BERNOULLI

Ainsi pour un écoulement **incompressible-homogène et stationnaires de fluide PARFAIT** soumis au seul champ de pesanteur uniforme et n'échangeant aucune puissance au travers sa surface de contrôle hormis celle associée aux pressions d'admission et de refoulement (appelée parfois puissance de transvasement), on obtient cette relation de BERNOULLI :

$$\left[ \frac{p}{\mu} + e_c + e_p \right]_e^s = 0 = \left( \frac{p_s}{\mu} + \frac{c_s^2}{2} + g.z_s \right) - \left( \frac{p_e}{\mu} + \frac{c_e^2}{2} + g.z_e \right)$$

Soit une grandeur constante **dans un tube de courant** de ce type d'écoulement :

$$\boxed{\frac{p}{\mu} + \frac{c^2}{2} + g.z = Cte}$$

*Comme on a pu découpler les deux bilans, cette relation peut se démontrer à partir du PFD de la mécanique des fluides (alias équation d'Euler HP) en écrivant le théorème de la puissance cinétique (ou la conservation d'énergie mécanique) : c'est ce que demande le Programme Officiel de la PT et qui est proposé sur la diapo suivante.*

***Mais si BERNOULLI est démontrable « mécaniquement » pour le fluide parfait, le caractère « réel » (visqueux) de tout écoulement fluide réduit à néant la démonstration mécanique et il faut revenir à un bilan global d'énergie !!***

# Relation de BERNOULLI (« démo » officielle)

On admettra qu'un fluide **parfait** en écoulement **stationnaire** et **incompressible-homogène** peut faire l'objet d'un bilan énergétique purement mécanique (sans prendre en compte l'aspect thermodynamique : sous-entendu sans prendre en compte l'énergie interne et la puissance thermique échangée)

Ainsi pour un écoulement **incompressible-homogène** et **stationnaires de fluide PARFAIT** soumis au seul champ de pesanteur uniforme et n'échangeant aucune puissance mécanique au travers sa surface de contrôle hormis celle associée aux pressions d'admission et de refoulement (appelée parfois puissance de transvasement), on écrit le **théorème de la puissance cinétique** :

$$\frac{dEc_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\partial Ec_{\Sigma F}}{\partial t} + D_{Ec_s} - D_{Ec_e} = P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{transvasement (admission et refoulement)}}$$

Les hypothèses du modèle simplifient l'équation en :

$$0 + D_m \left[ \frac{c^2}{2} \right]_e = P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{transvasement (admission et refoulement)}}$$

Les puissances restantes s'écrivent :  $P_{\text{transvasement}} = -D_m \left[ \frac{p}{\mu} \right]_e$  (démontré préalablement)

et dans un champ de pesanteur uniforme:  $P_{\text{pesanteur}} = -\frac{d(Ep_{\Sigma F \text{ pesanteur}})}{dt} = -\underbrace{\frac{\partial(Ep_{\Sigma O \text{ pesanteur}})}{\partial t}}_{=0 \text{ car stationnaire}} - D_m \cdot [g \cdot z]_e = -D_m \cdot [g \cdot z]_e$

On confirme ainsi la relation de BERNOULLI

$$D_m \cdot \left[ \frac{c^2}{2} \right]_e = -D_m \cdot \left[ \frac{p}{\mu} \right]_e - D_m \cdot [g \cdot z]_e \Rightarrow \boxed{\frac{p}{\mu} + \frac{c^2}{2} + gz = cte} \text{ le long d'un tube de courant}$$

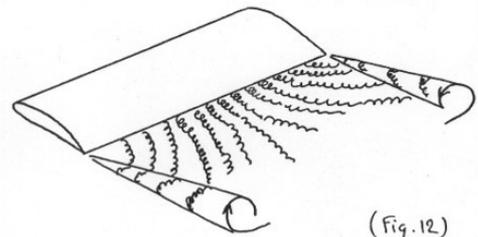
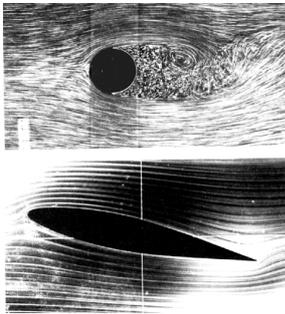
# Et pour les fluides réels (= visqueux) ?

Parmi les fluides réels, certains liquides peuvent présenter de fortes interactions entre des couches de fluides voisines entravant le glissement relatif de l'une sur l'autre : la plus rapide tirant la plus lente par une action tangentielle à l'interface les séparant. Dans le cas d'une interface solide-liquide (rencontrée en SI pour des mécanismes huilés ou graissés), on parle d'ailleurs de « frottements fluides » et on propose des modèles de résultante (proportionnelle ?) à la vitesse relative des deux matériaux en interaction.

Naturellement, entre un gaz peu dense et un goudron, on imagine que l'intensité de ces contraintes tangentielles variera de plusieurs ordres de grandeur, rapport lié à des grandeurs « viscosité caractéristique » dans le même rapport.

Mais n'y a-t-il qu'un modèle de contrainte tangentielle ? Ce modèle de couches glissant les unes sur les autres (permettant de définir un gradient local du champ des vitesses) est-il toujours pertinent ?

Et sinon, la validité du modèle mésoscopique « laminaire » correspond-il a priori au même domaine de vitesses quelquesoit la viscosité du milieu, sa masse volumique et les obstacles que l'on placera sur l'écoulement fluide ?



(Fig. 12.)

**Lecture de l'approche documentaire (1) : Description d'écoulement par régimes et par zones. Nombre de Reynolds**

## Zones d'écoulements de fluides réels

### Écoulement en régime LAMINAIRE :

Une zone d'écoulement est laminaire si les lignes de courant glissent les unes sur les autres en restant « parallèles ». Cette zone d'écoulement (distribution macroscopique des particules mésoscopiques) apparaît ordonnée : le vecteur-vitesse local varie régulièrement d'un point à l'autre et son évolution temporelle locale est suffisamment lente pour être suivie.

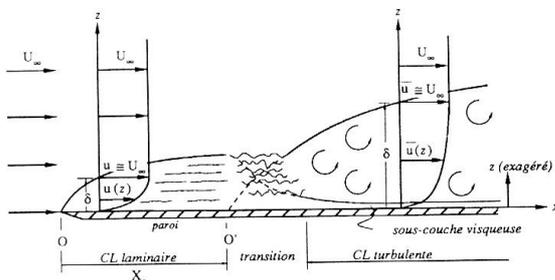
### Écoulement en régime TURBULENT :

Une zone d'écoulement est turbulente si sa structure est chaotique : la vitesse variant erratiquement et de façon relative importante d'un point à un autre et d'un instant à un autre. La description de la distribution mésoscopique devient impossible : les grandeurs n'ont d'intérêt que par leur moyenne sur des distances macroscopiques et des durées importantes. (les filets de fluide traçant sont brisés)

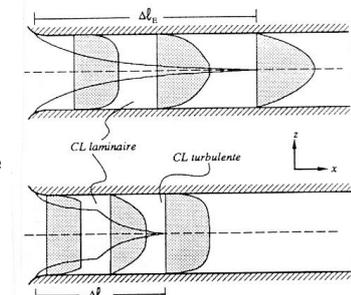
**Remarque : il ne faut pas confondre la notion d'écoulement tourbillonnaire (rotationnel) et turbulent (turbidité=chaos)**

### COUCHE LIMITE :

Compte-tenu de la viscosité, le filet de fluide (non-parfait) au contact direct avec l'obstacle présente une vitesse relative nulle relativement à l'obstacle (condition aux limites spatiales). Il existe donc un gradient de vitesse de la proximité à l'infini de l'obstacle. Ce gradient est essentiellement localisé sur une fine couche de fluide au voisinage immédiat de l'obstacle et on l'appelle couche limite. **Elle ne reste pas nécessairement laminaire sur toute sa longueur et devient turbulente aux nombres de Reynolds élevés dans la couche limite.** Elle gouverne le type et la largeur du sillage qui sera observé en aval de l'obstacle. **La couche limite et le sillage constituent la zone de dissipation d'énergie mécanique en énergie thermique. c'est en leur sein que les forces de viscosité ne sont pas négligeables.**



Types d'écoulements à l'entrée d'une conduite



# Conséquences sur les résultantes

## Écoulement LAMINAIRE RAMPANT (ou LINEAIRE) ( $Re \leq 1$ !)

Des billes lisses de densités et de tailles différentes chutant dans une éprouvette de glycérine obéissent à une loi de force de type **Stokes** :

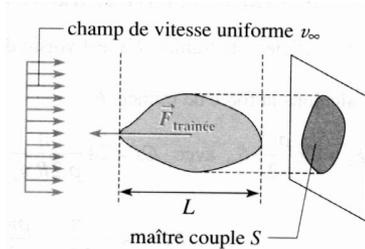
$$\vec{F}_{trainée} = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot \vec{v}_{\infty}$$

avec R le rayon de la sphère

**et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide.**

### Définition générale du coefficient de traînée $C_x$ :

Dans le cas d'écoulements à sillage nettement **turbulent** (parachute par exemple) la proportionnalité de la force de traînée à la vitesse relative est totalement inappropriée ! On remarque plutôt une proportionnalité de la résultante au carré de la vitesse relative loin du corps. On adopte donc une définition générale du coefficient de traînée d'un obstacle dans un fluide en mouvement relatif :

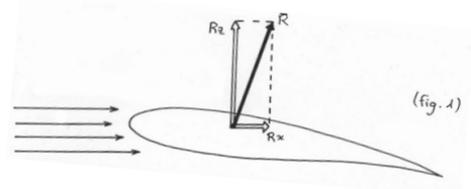


$$\vec{F}_{trainée} = -C_x(\mu, S, \eta, v_{\infty}) \cdot \left( \frac{\mu \cdot v_{\infty}^2}{2} \right) \cdot S \cdot \frac{\vec{v}_{\infty}}{v_{\infty}}$$

### Portance :

La force de traînée est la composante anticolinéaire à la vitesse de l'obstacle relative au fluide. Souvent cette vitesse est présentée horizontale et la composante de traînée également.

Dans ce cas, on nomme **portance** la composante verticale de la résultante des actions (essentiellement pressantes) du fluide



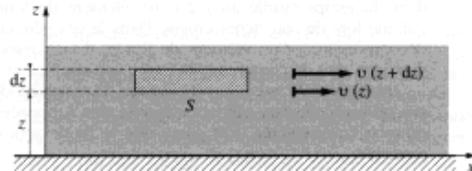
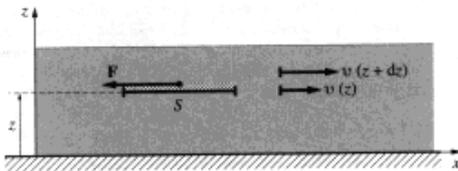
## Fluide Newtonien

### Définition :

A l'exception de fluides particulièrement denses et visqueux (non-newtoniens donc), le modèle commun d'expression des forces de viscosité est donné sous la forme surfacique suivante (pour un écoulement laminaire unidirectionnel rotationnel donc tourbillonnaire !) :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x = \left( -\eta \cdot S \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_x$$

où  $\eta$  représente la viscosité dynamique du fluide sur cette interface



On peut alors montrer que l'équivalent volumique locale de ce type d'interaction tangentielle de cisaillement s'écrit :

$$\vec{f}_{cisaillement} = \eta \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{e}_x \quad \text{pour notre symétrie et dans le cas général.} \quad \vec{f}_{cisaillement} = \eta \cdot \vec{\Delta} \vec{v}$$

### Remarques :

- ce ne sont pas les seules forces de viscosité : il peut exister aussi un terme de viscosité de compressibilité dans le cas d'écoulements de fluides (évidemment compressibles)
- cette présentation volumique est idéale pour une expression locale du PFD : l'ajout de ce terme à l'équation d'Euler (écoulements de fluides parfaits) donne l'équation dite de Navier-Stokes (hors-programme)
- ce modèle newtonien nous permet de définir et de comparer les viscosités dynamiques de différents fluides en envisageant des viscosimètres dont le fonctionnement sera basé sur un équilibre : mesure de force ou de couple résistant à un fluide en mouvement de translation ou de rotation uniforme.

# Viscosité(s) : dynamique et cinématique

## Définition :

On appelle viscosité cinématique la grandeur scalaire :

$$v \equiv \frac{\eta}{\mu} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \eta \text{ la viscosité dynamique} \\ \mu \text{ la masse volumique} \\ v \text{ la viscosité cinématique} \end{array}$$

$\eta$  s'exprime en poiseuille qui correspond à l'unité internationale de viscosité dynamique : 1 poiseuille = 1 Pa.s  
On utilise encore assez fréquemment la poise : 1 poiseuille = 10 poise = 1 décapoise.  
La viscosité cinématique s'exprime quant à elle en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

## Quelques valeurs de viscosité(s) :

A 20°C	$\eta$ (PI)	$v$ ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
eau	<b>1,0 <math>10^{-3}</math></b>	1,0. $10^{-6}$
Glycérine pure	0,93	0,63. $10^{-3}$
mercure	1,6. $10^{-3}$	0,12. $10^{-6}$
Air ( $10^5$ Pa)	<b>1,81.<math>10^{-5}</math></b>	1,43. $10^{-5}$
« graisses »	$10^3$ !!	/

*La viscosité des liquides diminue avec la température (vous avez tous chauffé et observé l'étalement de l'huile dans une poêle).*

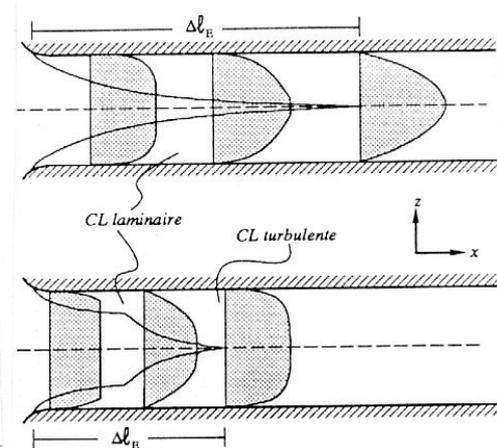
*A 100°C la viscosité de l'eau est divisée par 4 :  $2,5 \cdot 10^{-4}$  PI*

*La viscosité de l'eau à 20 °C est utilisée comme limite pour séparer les fluides « mobiles » ( $\eta < 10^{-3}$  PI) des fluides « visqueux » ( $\eta > 10^{-3}$  PI).*

*Au contraire la viscosité des gaz augmente avec la température et varie peu avec la pression.*

# Ecoulements visqueux dans les conduites

Nous avons signalé le rôle de la couche limite et de son régime d'écoulement intérieur sur la distribution des vitesses :



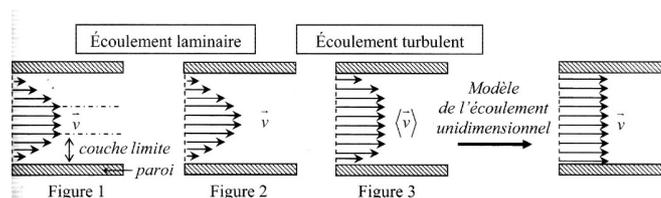
Les forces de viscosité exerceront bien sûr une traction sur la conduite mais il ne s'agit pas d'un de nos objectifs de calcul de résultante. (par symétrie, la résultante des forces de pression **sur la conduite** sera nulle).

Les profils de vitesse « grisés » sur les figures ci-contre sont nettement différents :

- plat à l'entrée puis parabolique dans le cas laminaire
- plat au centre puis s'aplatissant dans le cas turbulent

**Il faut absolument garder à l'esprit qu'il s'agit d'une vitesse moyenne temporelle dans le cas turbulent !**

En cas de régime turbulent, on adoptera souvent un modèle d'écoulement unidimensionnel : vecteur-vitesse uniforme et perpendiculaire à la section droite de l'écoulement (de module la vitesse uniforme correspondant au débit)



Que l'écoulement soit laminaire ou turbulent, nous serons toujours dans une situation où la couche limite emplit la totalité du conduit et donc la dissipation d'énergie mécanique se fera partout.

# Relation de BERNOULLI « modifiée »

Revenons à l'expression générale de la conservation de l'énergie du système ouvert **sous toutes ses formes** :

$$\frac{\partial E_{\Sigma o}}{\partial t} + D_{Es} - D_{Ee} = P_{th} + \underset{\substack{\text{pression} \\ \text{amont (entrée)} \\ \text{et} \\ \text{aval (sortie)}}}{P} + \underset{\substack{\text{pression} \\ \text{parties} \\ \text{mobiles}}}{P} + \underset{\substack{\text{autres} \\ \text{non} \\ \text{conservatives}}}{P}$$

Les forces dissipatives de viscosité (à la frontière du système) induisent un terme de puissance négatif.

Ainsi pour un écoulement **incompressible-homogène et stationnaires de fluide REEL** soumis au seul champ de pesanteur uniforme et **n'échangeant aucune puissance thermique**, ni aucune puissance indiquée (parois fixes) au travers sa surface de contrôle hormis celle associée aux pressions d'admission et de refoulement (appelée parfois puissance de transvasement), on obtient cette inégalité :

$$\left[ u + \frac{p}{\mu} + e_c + e_p \right]_e^s = \frac{P_{\text{viscosité frontière}}}{D_m} < 0$$

En présence de frottements intérieurs, il y aura nécessairement une dégradation d'énergie cinétique ordonnée en énergie interne  $u$  (échauffement) de telle façon que l'énergie interne en sortie ne pourra qu'être supérieure à l'énergie interne en entrée et on écrira donc :

$$\left[ \frac{p}{\mu} + e_c + e_p \right]_e^s = \frac{P_{\text{viscosité frontière}}}{D_m} - [u]_e^s = \frac{P_{\text{viscosité frontière}}}{D_m} + \frac{P_{\text{viscosité interne}}}{D_m} < 0$$

## La perte de charge dans une conduite

La somme précédente est donc d'autant plus négative que les puissances des forces dissipatives de viscosité sont importantes.

On définit alors la charge d'un écoulement unidimensionnel la grandeur  $C$  ayant la dimension d'une pression exprimée pour une section droite de fluide à l'abscisse (parfois curviligne)  $x$  :

$$C(x) \equiv p(x) + \frac{1}{2} \mu \bar{c}^2(x) + \mu g \bar{z}(x)$$

La perte de charge sera communément définie entre deux abscisses différentes :

$$\Delta C \equiv -\Delta \left( p + \frac{1}{2} \mu \bar{c}^2 + \mu g \bar{z} \right)$$

Il existe parfois une ambiguïté de dénomination lorsque le terme de « perte de charge » est indûment associé à la dénivellation de fluide communément définie ainsi :

$$\Delta H \equiv -\Delta \left( \frac{p}{\mu g} + \frac{1}{2} \frac{\bar{c}^2}{g} + \bar{z} \right)$$

La prise en compte (et la définition) de la perte de charge permettent de réécrire un **Théorème de BERNOULLI généralisé** :

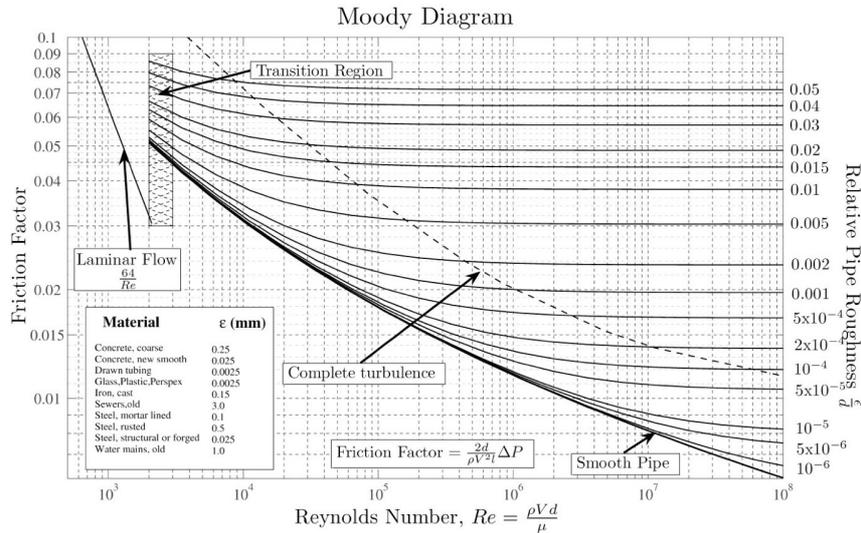
$$p_e + \frac{1}{2} \mu \bar{c}_e^2 + \mu g \bar{z}_e = p_s + \frac{1}{2} \mu \bar{c}_s^2 + \mu g \bar{z}_s + \Delta C$$

# Perte de charge régulière et singulière

Soit L une longueur de conduite, on définit un **coefficient de perte de charge**  $\lambda$  sans dimension et dépendant à priori de la rugosité relative  $\epsilon_r$  de la conduite et du nombre de Reynolds  $Re$  de l'écoulement. On détermine alors la perte de charge par unité de longueur de conduite avec la formule de Darcy-Weisbach (qui n'est en fait que la définition de  $\lambda$ ) :

$$\frac{\Delta C}{L} \equiv \lambda(R_e, \epsilon_r) \cdot \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{c}^2(x)$$

Le coefficient de perte de charge est généralement lu sur des abaques telle le **diagramme de MOODY** :



# Perte de charge régulière et singulière

On démontre qu'un flux laminaire dans une conduite obéissant à un profil de Poiseuille de vitesses (paraboloïde des vitesses), le coefficient de perte de charge (ou de friction) ne dépend plus de la rugosité mais seulement du nombre de Reynolds par :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

On peut l'interpréter simplement en remarquant qu'une pellicule de fluide est alors « collée » à la périphérie de la conduite masquant ainsi les aspérités.

Il existe également des formules empiriques approchées pour d'autres régimes d'écoulement (Colebrook...)

On choisit d'utiliser une expression « cousine » pour les singularités de la conduite : coude, rétrécissement, élargissement, clapet, vanne, grille diffusante...

$$\Delta C \equiv K \frac{1}{2} \rho \bar{c}^2(x)$$

