Analyse vectorielle (PC*)

Opérateurs gradient, divergence, rotationnel, laplacien :

1 – Gradient d'un champ scalaire :

Soit la fonction ou champ scalaire :

$$\vec{r} \quad \rightarrow \quad f(\vec{r}) \in \Re$$

continue et dérivable. L'opérateur gradient agissant sur ce champ scalaire donne un champ vectoriel défini par, où df représente la différentielle de f :

$$df = \overrightarrow{grad}\ f(\vec{r}).d\vec{r} = \vec{\nabla} f(\vec{r}).d\vec{r}$$

* Expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques :

On définit des multiplicateurs μ_i de la manière suivante :

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i ds_i\ \vec{u}_i$$

Tableau des multiplicateurs	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
Coordonnées cartésiennes	x	y	z	1	1	1
Coordonnées cylindriques	ρ	θ	z	1	ρ	1
Coordonnées sphériques	r	θ	φ	1	r	$r\sin\theta$

Dans l'un de ces trois systèmes de coordonnées orthogonales, on peut écrire :

$$\overrightarrow{grad}U = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial U}{\partial s_i} \vec{u}_i$$

* En tout point, le gradient du champ scalaire $f(\vec{r})$ est perpendiculaire à la surface de niveau (la surface iso-f) passant par ce point et il est dirigé suivant la direction de variation la plus rapide de $f(\vec{r})$, dans le sens des valeurs croissantes de $f(\vec{r})$.

Exemple en électrostatique : les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles et le champ est dirigé vers les potentiels décroissants (car $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V(\vec{r}))$.

2 – Divergence d'un champ vectoriel :

Soit le champ vectoriel : $\vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{V}(\vec{r})$. La divergence de $\vec{V}(\vec{r})$ est, formellement, le résultat du produit scalaire de $\vec{V}(\vec{r})$ avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$, soit :

$$div\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{V}(\vec{r})$$

* Expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques :

On utilise l'interprétation locale de la divergence, vue en cours lors de la démonstration locale du théorème de Gauss :

$$div\vec{A}(\vec{r}) = \frac{d\Phi_{sortant}}{d\tau}$$

A partir d'un point M de coordonnées orthogonales s_i, on construit un pavé élémentaire dont les 6 faces sont définies par les valeurs $s_i + ds_i$, … des coordonnées. Les arêtes du pavé ont pour longueur $\mu_i ds_i$ et son volume vaut :

$$d\tau = \mu_1\mu_2\mu_3\ ds_1 ds_2 ds_3$$

Le flux élémentaire à travers les deux surface s_1 et $s_1 + ds_1$ vaut :

$$d\Phi_1 = A_1(s_1 + ds_1, s_2, s_3)\mu_2 ds_2 \mu_3 ds_3 - A_1(s_1, s_2, s_3)\mu_2 ds_2 \mu_3 ds_3$$

Soit :

$$d\Phi_1 = \frac{\partial(\mu_2\mu_3 A_1)}{\partial s_1} ds_1 ds_2 ds_3$$

Par conséquent :

$$div\vec{A} = \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3}\left[\frac{\partial(\mu_2\mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_1\mu_3 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1\mu_2 A_3)}{\partial s_3}\right]$$

En coordonnées cylindriques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

Et en coordonnées sphériques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial\phi}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$$

Pour se persuader de limiter l'utilisation du vecteur Nabla aux seules coordonnées cartésiennes, il suffit d'examiner les expressions du gradient et de la divergence en coordonnées cylindriques : l'expression du gradient suggère de postuler :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

mais si on effectue $\vec{\nabla}.\vec{A}$ (sans précaution !), on ne retrouve l'expression de $div\vec{A}$ obtenue ci-dessus ! Alors, ATTENTION !!!!!

En dehors des coordonnées cartésiennes, il n'est pas nécessaire d'apprendre les expressions des opérateurs (sauf celles du gradient !) ; s'il le faut, l'énoncé les donnera. On peut d'ailleurs par une approche intégrale (théorèmes de Stockes et de Green Ostrogradsky) ne pas avoir besoin de l'expression locale de ces opérateurs.

3 – Rotationnel d'un champ vectoriel :

Soit le champ vectoriel : $\vec{r} \;\to\; \vec{V}(\vec{r})$. Le rotationnel de $\vec{V}(\vec{r})$ est, formellement, le résultat du produit vectoriel de $\vec{V}(\vec{r})$ avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$, soit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\vec{r})$$

* Expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques :

En coordonnées cartésiennes, le calcul du rotationnel à l'aide du vecteur nabla est simple :

$$\overrightarrow{rot}\;\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

4 – Laplaciens scalaire et vectoriel :

Par définition, pour un champ scalaire :

$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 \qquad soit \qquad \Delta f = div(\overrightarrow{grad}\, f)$$

En coordonnées cartésiennes, par exemple :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Par définition, le laplacien d'un champ vectoriel est le vecteur $\Delta\vec{A}$ dont les composantes, **en coordonnées cartésiennes**, sont les laplaciens scalaires des composantes du champ vectoriel :

$$\Delta\vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$$

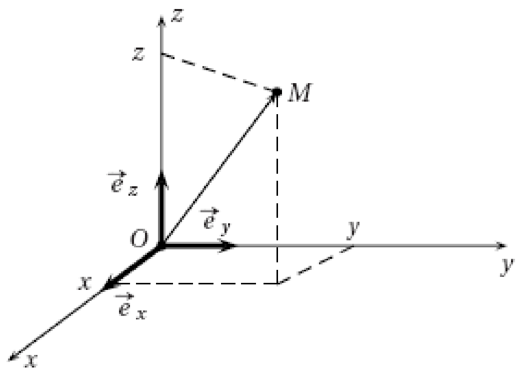
5 – Quelques formules d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} U) = \vec{0}$$
$$div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Formulaires d'analyse vectorielle

I. Expression des opérateurs différentiels dans différents systèmes de coordonnées

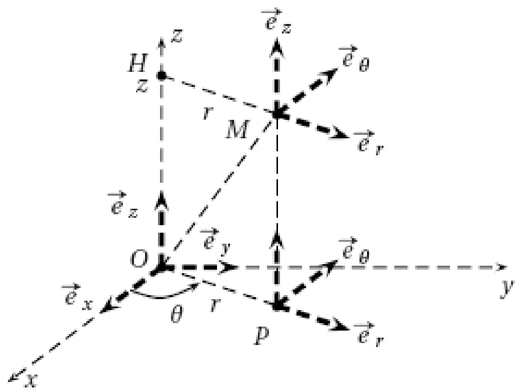
1) Coordonnées cartésiennes



$U = U(x,y,z)$
$\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\vec{e}_z.$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\,U &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z \\
\Delta U &= \frac{\mathrm{d}^2A_x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2A_y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2A_z}{\mathrm{d}z^2} \\
\text{div}\,\vec{A} &= \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}z} \\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}z}\right)\vec{e}_x \ldots \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}x}\right)\vec{e}_y \ldots \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}y}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

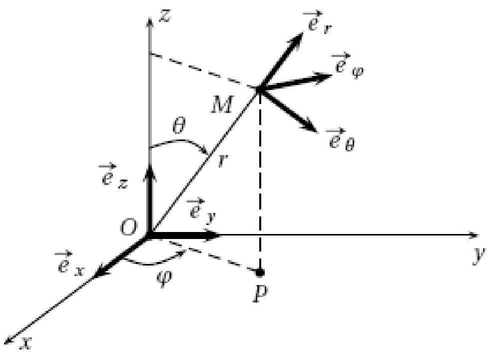
2) Coordonnées cylindriques



$U = U(r,\theta,z)$;
$\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + A_z(r,\theta,z)\vec{e}_z.$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\,U &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z \\
\Delta U &= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} \\
\text{div}\,\vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rA_r)}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A_\theta}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}z} \\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}\theta} - \frac{\mathrm{d}A_\theta}{\mathrm{d}z}\right)\vec{e}_r \ldots \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}A_r}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e}_\theta \ldots \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}(rA_\theta)}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}A_r}{\mathrm{d}\theta}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

3) Coordonnées sphériques



$U = U(r,\theta,\varphi)$;
$\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\Delta U &= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rU)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\right)\ldots \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\varphi^2} \\
\mathrm{div}\,\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2A_r)}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(\sin\theta A_\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}A_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\mathrm{d}(\sin\theta A_\varphi)}{\mathrm{d}\theta} - \frac{\mathrm{d}A_\theta}{\mathrm{d}\varphi}\right)\vec{e}_r\ldots \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}A_r}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}(rA_\varphi)}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e}_\theta\ldots \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}(rA_\theta)}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}A_r}{\mathrm{d}\theta}\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

II. Quelques formules importantes

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) &= \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(UV) &= U\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + V\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U \\
\mathrm{div}\left(U\vec{A}\right) &= U\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(U\vec{A}\right) &= U\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U\wedge\vec{A} \\
\mathrm{div}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) &= \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) &= \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{B} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) &= (\mathrm{div}\,\vec{B})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} - (\mathrm{div}\,\vec{A})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}
\end{aligned}
$$

Théorème de Stokes :

$$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathscr{S}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,.$$

Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau\,.$$