

## I Divergence

### 1°- Définition intrinsèque

Soit  $\mathbf{V}$  un champ de vecteurs quelconque et soit  $\Delta\tau$  un élément de volume centré en un point  $M$  et délimité par une surface fermée  $\Delta S$ . Notons  $\Delta\phi$  le flux de  $\mathbf{V}$  à travers  $\Delta\tau$ .

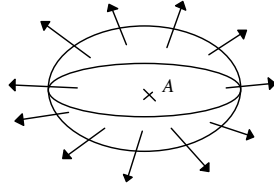
On appellera "divergence de  $\mathbf{V}$ " le scalaire:

$$\text{div} \mathbf{V} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau}$$

$\text{div} \mathbf{V}$  est donc le flux de  $\mathbf{V}$  par unité de volume au voisinage de  $M$ .

### 2°- Signification physique

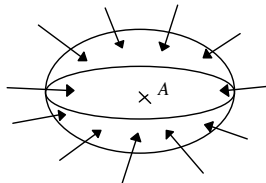
Supposons que le champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  soit émis à partir d'un point  $A$  de l'espace. Pour un volume  $\Delta\tau$  limité par  $\Delta S$  entourant le point  $A$ , on aura nécessairement  $\Delta\phi > 0$  (flux sortant) donc  $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta\tau} \geq 0$



Ainsi,  $\text{div} \mathbf{V}$  est positive ou nulle en tout point source de champ  $\mathbf{V}$  (la nullité ayant lieu lorsque  $\Delta\phi$  est infiniment petit devant  $\Delta\tau$ ).

De plus,  $\text{div} \mathbf{V}$  rend compte de la tendance qu'a le champ  $\mathbf{V}$  à s'éloigner d'un point  $A$ , d'où le nom de *divergence* donné à l'opérateur ainsi défini.

A l'inverse, si le champ  $\mathbf{V}$  converge vers un point  $A$  de l'espace, alors on aura  $\Delta\phi < 0$  (flux entrant) et donc  $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta\tau} \leq 0$ . Ainsi,  $\text{div} \mathbf{V}$  est négative ou nulle en un point de convergence du champ  $\mathbf{V}$ .



On déduit de la définition intrinsèque de la divergence que si le champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  est à flux conservatif, le flux de  $\mathbf{V}$  à travers la surface  $\Delta S$  est nul et donc  $\text{div} \mathbf{V} = 0$ : le champ  $\mathbf{V}$  ne peut pas diverger d'un point  $A$  ou converger vers un point  $A$ . Ainsi, la divergence d'un champ uniforme est nulle.

### 3°- Formule d'Ostrogradsky (ou de la divergence)

Soit une surface fermée  $S$  délimitant un volume  $\tau$ . La définition de  $\text{div} \mathbf{V}$  permet d'écrire:

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \mathbf{V} d\tau$$

Cette formule importante permet de transformer une intégrale de surface (le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée) en une intégrale volumique.

## 4°- Expression analytique

On calculera la divergence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  en un point  $M$  de l'espace en utilisant le système de coordonnées dans lequel  $\mathbf{V}$  est défini:

■ En cartésiennes :

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z) \mathbf{e}_x + V_y(x,y,z) \mathbf{e}_y + V_z(x,y,z) \mathbf{e}_z$$

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

■ En cylindriques :

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(\rho,\theta,z) = V_\rho(\rho,\theta,z) \mathbf{e}_\rho + V_\theta(\rho,\theta,z) \mathbf{e}_\theta + V_z(\rho,\theta,z) \mathbf{e}_z$$

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

■ En sphériques :

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(r,\theta,\varphi) = V_r(r,\theta,\varphi) \mathbf{e}_r + V_\theta(r,\theta,\varphi) \mathbf{e}_\theta + V_\varphi(r,\theta,\varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

## III Laplacien

### 1°- Laplacien scalaire

$f$  étant une fonction scalaire des trois variables scalaires  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on appelle *laplacien de  $f$*  noté  $\Delta f$  la *divergence du gradient* de  $f$ :

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad} f)$$

$$\text{Ainsi : } \Delta f = \text{div} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \right)$$

$$\text{soit } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques on a :

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et en coordonnées sphériques:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$