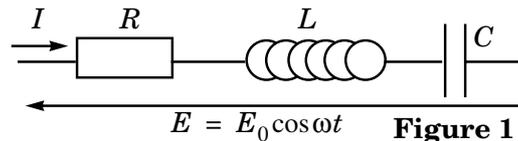


## DM 1: Electrocinétique et induction

### Partie I - Étude d'un circuit RLC

#### I.A - Résonance série

Le dipôle de la figure 1 (une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R$  est montée en série avec un condensateur de capacité  $C$ ), alimenté par une tension sinusoïdale



$$E = E_0 \cos \omega t$$

de pulsation  $\omega$  variable, est parcouru par un courant

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

I.A.1) Exprimer l'impédance complexe  $Z_s$  de ce dipôle.

I.A.2) En déduire l'impédance (réelle)  $Z_s$  de ce dipôle et le retard de phase  $\varphi$  du courant  $I$  sur la tension  $E$  en fonction de la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et du facteur de qualité

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

de ce circuit.

I.A.3) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{Z_s}{R}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

I.A.4) Quelle est la valeur maximale  $I_{0\text{Max}}$  de l'amplitude  $I_0$  du courant ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte ?

Tracer les graphes du rapport

$$\frac{I_0}{I_{0\text{Max}}}$$

et de la phase  $\varphi$  en fonction de  $x$ .

I.A.5) L'acuité de la résonance est définie par le rapport

$$A = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \text{ où } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ (avec } \omega_2 > \omega_1 \text{)}$$

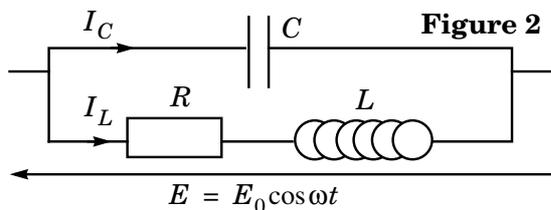
représente la bande de pulsations dans laquelle l'amplitude du courant vérifie

$$I_0(\omega) \geq \frac{I_{0\text{Max}}}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer  $A$  en fonction de  $Q$ . Dans quel domaine varie la phase  $\varphi$  pour  $\omega \in [\omega_2, \omega_1]$  ?

### I.B - Résonance parallèle

On considère maintenant le dipôle de la figure 2 (la bobine  $L$ ,  $R$  est montée en dérivation avec le condensateur  $C$ ), alimenté par la tension sinusoïdale  $E = E_0 \cos \omega t$  de pulsation  $\omega$  variable.



I.B.1) Exprimer l'impédance complexe  $Z_P$  de ce dipôle en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .

I.B.2) En déduire l'expression  $Z_P$  en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $\omega$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $Z_s$  ( $Q$ ,  $\omega_0$  et  $Z_s$  ayant été définis à la question précédente).

I.B.3) Montrer que, lorsque le facteur de qualité est très élevé ( $Q \gg 1$ ) et la pulsation  $\omega$  pas trop faible

$$\left( Q \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \right),$$

$Z_P$  peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{Z_P} \approx \frac{Q^2 R^2}{Z_s}.$$

On utilisera ce résultat dans toute la suite de la question I.B.

I.B.4) Quelle est la valeur de  $Z_P$  pour la pulsation  $\omega_0$  ? Quel est alors le comportement de ce circuit ?

I.B.5) On suppose  $\omega = \omega_0$ . Déterminer les valeurs approximatives des intensités réelles  $I_L$  et  $I_C$  qui traversent respectivement la bobine et le condensateur en fonction de  $R$ ,  $Q$ ,  $\omega$ , du temps  $t$  et de l'amplitude  $E_0$  de la tension d'alimentation du dipôle. Commenter les résultats obtenus.

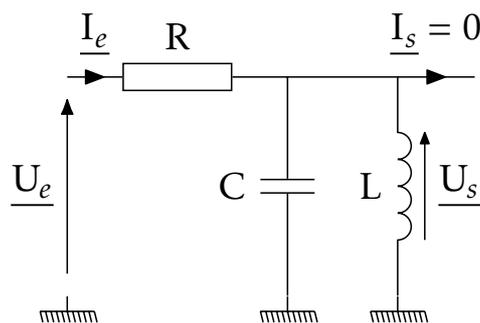
### I.C- Un passe-bande RLC au facteur de qualité inhabituel

On utilise un circuit RLC en filtre comme indiqué sur la figure ci-contre. La sortie est ouverte.

- Déterminer sans calculs les régimes asymptotiques de ce quadripôle. En déduire la nature du filtre qu'il réalise.
- Déterminer sa fonction de transfert. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(u - 1/u)},$$

en utilisant la pulsation réduite  $u = \omega / \omega_0$ , après avoir introduit une pulsation caractéristique  $\omega_0$  et un facteur de qualité  $Q$ .



- Déterminer les pulsations de coupure  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  à  $-3$  dB et la bande passante  $\omega_{c2} - \omega_{c1}$ .
  - Déterminer les équations des asymptotes (on utilisera  $x = \log y$ ) et tracer le diagramme de Bode pour  $Q = 5$  et  $Q = \frac{1}{2}$ . On calculera en particulier la valeur du gain en dB à la pulsation  $\omega_0$ .
  - Comment choisir  $Q$  pour que ce filtre ne transmette que les fréquences proches de  $\omega_0$  ? Comparer la variation de  $Q$  avec  $R$  au cas du passe-bande du RLC série.

## Problème n° 2 : ELECTROMAGNETISME

**Avertissement : Le but de ce problème est de tester les capacités du candidat à mener à bien un raisonnement à partir d'une situation physique donnée. Le candidat justifiera donc très clairement son raisonnement avant de faire les calculs. Il est demandé de faire des phrases simples mais très claires et très précises.**

### Partie I : Spire en rotation dans un champ magnétique uniforme et constant.

Une spire conductrice circulaire (S), de résistance négligeable, de rayon  $a$ , de surface  $S = \pi a^2$  et de centre O, tourne à vitesse angulaire  $\omega$  supposée constante ( $\omega > 0$ ) autour d'un de ses diamètres servant d'axe Oz au problème. Les axes Ox, Oy et Oz sont munis de la base orthonormée  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . La position de (S) est repérée par l'angle  $\theta = \omega t$  entre le plan xOz des coordonnées cartésiennes et le plan de la spire. L'orientation du sens positif du courant dans la spire est imposée (voir figures 1 et 2). Cette spire est placée dans un champ magnétique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oy et noté  $\vec{B} = B \vec{j}$  (B constante positive). La spire forme un circuit électrique fermé avec un dipôle X (X sera suivant les questions une résistance ou un condensateur), la spire et X étant en série (on ne se préoccupera pas des problèmes techniques engendrés par la connexion électrique entre la spire en rotation et X). Le coefficient d'auto-induction de la spire (S) sera négligé.

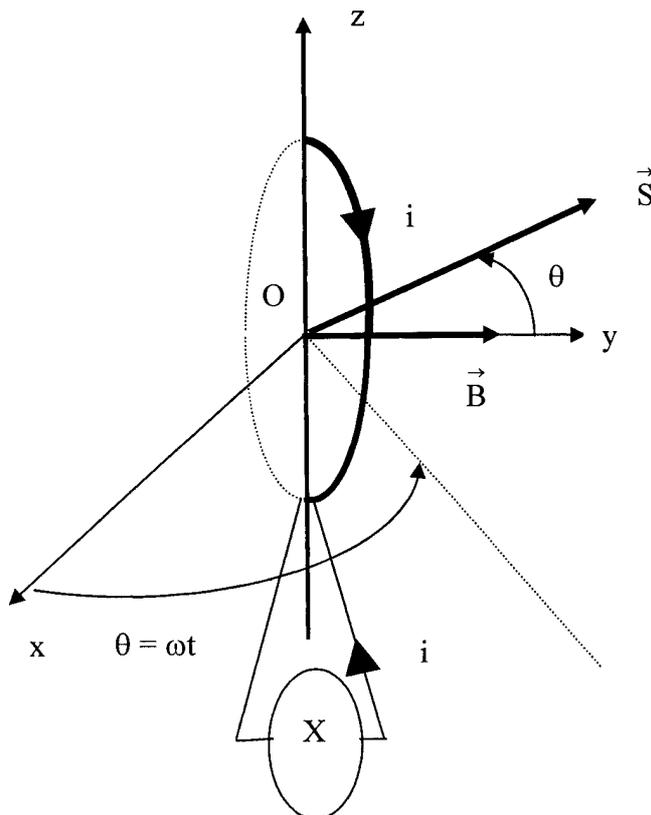


Figure 1 : vue en perspective.

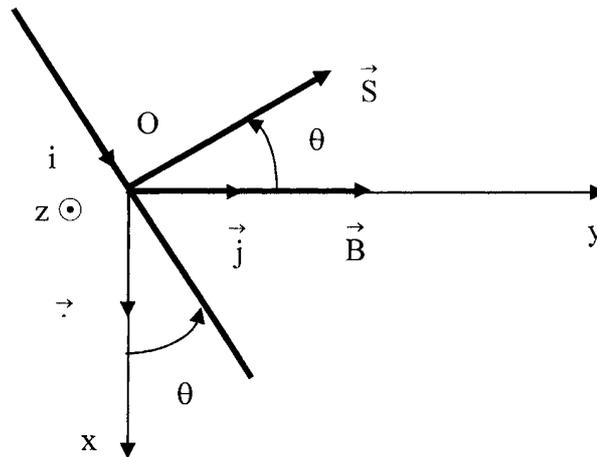


Figure 2 : vue de dessus.

On rappelle que le moment du couple électromagnétique  $\vec{M}$ , qui s'exerce sur un circuit électrique parcouru par un courant  $i$ , dont le vecteur surface est  $\vec{S}$  (orienté en fonction de  $i$ ), et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , est donné par la formule  $\vec{M} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$ . On rappelle également que lors de la rotation d'un solide, la puissance  $P$  d'un couple  $\vec{M}$  est donnée par la formule  $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$  où  $\vec{\omega}$  représente le vecteur rotation du circuit.

**Les grandeurs moyennes demandées seront rapportées à un tour.**

1. Expliquer par quel phénomène physique un courant électrique va circuler dans le circuit formé par la spire et le dipôle X.
2. Le dipôle X est un conducteur ohmique de résistance  $R$ . Déterminer :
  - a. Le courant électrique  $i$  qui va traverser  $R$  en fonction de  $B$ ,  $\omega$ ,  $S$ ,  $R$  et  $t$ ,
  - b. La valeur moyenne  $\langle P_J \rangle$  de la puissance Joule  $P_J$  qui en résulte en fonction de  $B$ ,  $S$ ,  $R$  et  $\omega$ .
3. Montrer qu'un moteur extérieur devra exercer un couple moteur sur la spire pour maintenir la vitesse de rotation constante (on négligera tout frottement). Quelle sera la puissance moyenne  $\langle P_m \rangle$  de ce couple moteur ?
4. Analyser les transferts d'énergie du dispositif.
5. X est maintenant un condensateur de capacité  $C$ , la résistance de la spire étant toujours négligée. On suppose qu'à  $t = 0$ , le condensateur est déchargé. Déterminer le courant dans le circuit en fonction de  $B$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $C$  et  $t$ .
6. Est-il nécessaire d'exercer un couple mécanique sur la spire pour maintenir sa vitesse de rotation *moyenne* constante ?
7. Déterminer la puissance électrique instantanée  $P_e(t)$  mise en jeu dans le condensateur en fonction de  $B$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $C$  et  $t$ . Calculer la valeur moyenne  $\langle P_e \rangle$  de cette puissance.
8. Déterminer les intervalles de temps sur lesquels le condensateur est :
  - a. Récepteur (préciser alors d'où provient l'énergie),
  - b. Générateur (préciser alors où va l'énergie libérée).

## Partie B - Principe du freinage électromagnétique

Aucune connaissance spécifique au chapitre de mécanique n'est requise pour traiter cette partie : les quelques formules nécessaires sont d'ailleurs rappelées et certains résultats sont donnés.

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct  $(Ox, Oy, Oz)$  de base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et supposé galiléen.

Une boucle conductrice rectangulaire **ABCD**, de longueur  $BC = DA = a$  et de largeur  $AB = CD = b$ , possède une résistance  $R$  et une inductance  $L$ . Dans le vide, ce cadre, de masse  $m$ , se déplace en translation sans frottement dans le plan horizontal  $xOy$ , parallèlement à l'axe  $Ox$  et à ses côtés **BC** et **DA**.

La position dans l'espace de la spire est repérée par l'abscisse algébrique  $x$  qui localise la barre **AB** sur l'axe  $Ox$ .

Dans le demi-espace  $x \geq 0$  règne un champ magnétique constant et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  avec  $B_0$  constante positive. L'autre demi-espace  $x < 0$  est dépourvu de champ magnétique (figures **B.1** et **B.2**).

Pour  $x < 0$ , le cadre est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, de vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  avec  $v_0$  constante positive. L'entrée de la spire dans la zone de champ magnétique s'effectue à l'instant initial  $t = 0$  pour lequel  $x = 0$  et  $v = v_0$ .

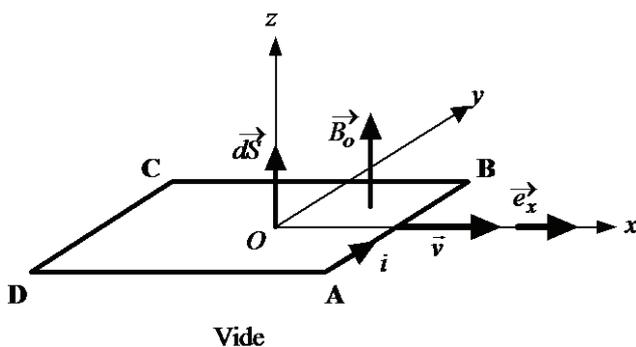


Figure B.1

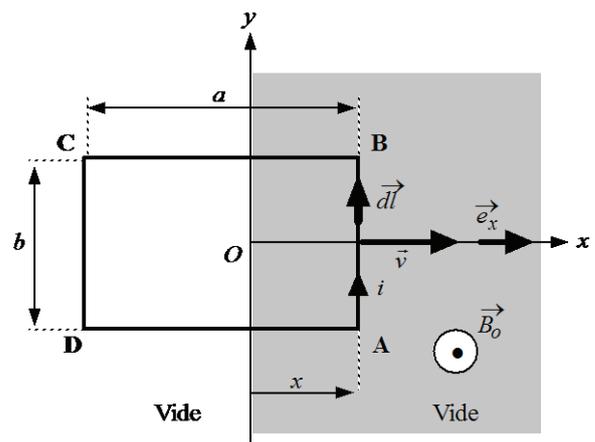
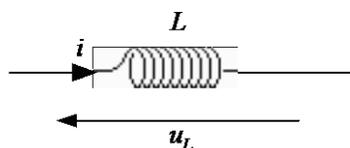


Figure B.2

Hypothèses de travail et rappels

- les forces de pesanteur sont négligées ;
- la vitesse  $v(t)$  d'un mobile, sur l'axe  $Ox$ , est définie par l'équation  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  ;
- le principe fondamental de la dynamique (PFD) est applicable au cadre de masse  $m$  :  

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$
, avec  $\vec{F}_{ext}$  résultante des forces extérieures exercées sur le cadre ;
- la force électromotrice d'induction (f.é.m.)  $e$  est liée à la variation temporelle du flux magnétique par l'égalité :  $e = - \frac{d\Phi}{dt}$  ;
- la tension aux bornes d'une bobine idéale d'inductance  $L$  s'écrit  $u_L = L \frac{di}{dt}$  :



- $dS$  est un élément de surface du cadre ( $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ ) ;

- un élément de circuit filiforme  $\vec{dl}$  (figure **B.2**), plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  et parcouru par un courant conventionnel algébrique  $i$ , orienté dans le même sens que  $\vec{dl}$ , est soumis à la force électromagnétique de Laplace  $\vec{dF} = i (\vec{dl} \wedge \vec{B}_0)$ .

## I. Phénomène d'induction

- I.1.** Exprimer le flux  $\Phi(x)$  du champ magnétique  $\vec{B}_0$  à travers le cadre **ABCD** lorsque  $0 \leq x \leq a$ .
- I.2.** Quelle est l'expression de ce flux lorsque  $x > a$  ? Même question quand  $x < 0$  ?
- I.3.** Lorsque le flux  $\Phi$  varie au cours du mouvement du cadre, un courant induit  $i$  prend naissance dans la boucle conductrice **ABCD** et simultanément, la force de Laplace s'oppose au déplacement. Dans le cas d'une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  positive ( $v > 0$ ) du cadre et pour  $0 \leq x \leq a$  :
- recopier sommairement le schéma de la figure **B.1** ;
  - représenter, sur ce dessin, la résultante  $\vec{F}$  des forces électromagnétiques de Laplace qui s'exercent sur la spire ;
  - préciser le signe de  $i$ .
- I.4.** Donner l'expression vectorielle de cette résultante  $\vec{F}$ , en fonction des grandeurs  $b$ ,  $B_0$  et  $i$  (valeur algébrique de l'intensité).
- I.5.** Le courant induit  $i$  est équivalent à celui que produirait un générateur de tension idéal (c'est-à-dire de résistance interne nulle), de force électromotrice induite  $e$ , f.é.m. algébrique de même signe que  $i$  et inséré dans le circuit (figure **B.3**).

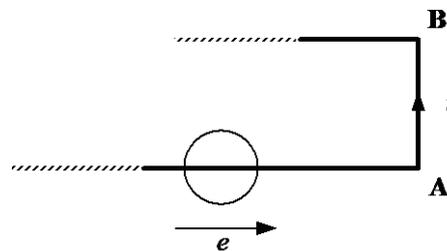


Figure **B.3**

- I.5.a)** Que vaut cette f.é.m.  $e$  si  $x < 0$  (cadre situé en dehors de la zone de champ  $\vec{B}_0$ ) ?
- I.5.b)** Que vaut cette f.é.m.  $e$  si  $x > a$  (cadre totalement immergé dans le champ magnétique) ?
- I.5.c)** Pour une position de la spire définie par  $0 \leq x \leq a$ , au temps  $t$ , établir une relation entre la f.é.m.  $e$  et la vitesse algébrique  $v$  du cadre.

## II. Mouvement du cadre si la spire est uniquement résistive (inductance $L$ négligeable)

Contrairement à la résistance  $R$ , l'inductance  $L$  du conducteur est négligée. L'étude est menée pour  $0 \leq x \leq a$ .

- II.1.** Proposer, à l'aide d'un schéma, un modèle électrocinétique (circuit électrique) du cadre **ABCD** dans lequel apparaissent le générateur de tension idéal de f.é.m.  $e$  (induite), le résistor de résistance  $R$  et le courant  $i$  (induit).

- II.2.** Appliquer la loi des mailles à cette spire résistive et en déduire une relation entre le courant induit  $i$  et la vitesse algébrique  $v$  de ce conducteur.
- II.3.** Etude de la vitesse du cadre
- II.3.a)** Montrer que l'application du PFD permet d'établir, pour le mouvement du cadre, une équation différentielle de la forme :  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ . Exprimer  $\tau$  en fonction des grandeurs  $m$ ,  $R$ ,  $b$  et  $B_o$ .
- II.3.b)** En tenant compte des conditions initiales du mouvement, déterminer l'expression de la vitesse  $v(t)$ .
- II.4.** La position (ou abscisse)  $x(t)$  du cadre s'écrit  $x(t) = X_1 [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$  (expression qui n'est pas à démontrer). La grandeur  $X_1$  est homogène à une longueur. A l'aide de la **Feuille Annexe N° 1** (à rendre avec la copie), tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions  $x(t)$  et  $v(t)$ , dans les deux cas suivants :
- II.4.a)**  $X_1 < a$  (figures **B.3** et **B.4**) ;
- II.4.b)**  $X_1 > a$  (figures **B.5** et **B.6**).
- II.5.** Décrire, en quatre lignes maximum, le mouvement suivi par le cadre dans les deux cas suivants :
- II.5.a)**  $X_1 < a$  ;
- II.5.b)**  $X_1 > a$ .
- II.6.** Sous quelle forme est dissipée l'énergie cinétique initiale  $E_{c,o} = \frac{1}{2} m v_o^2$  dans le cas où le cadre freiné s'immobilise définitivement ( $v_{(t \rightarrow \infty)} = 0 \text{ m s}^{-1}$ ) ?

### III. Mouvement du cadre si la spire est uniquement inductive (résistance $R$ négligeable)

L'inductance  $L$  du conducteur n'est plus négligée. En revanche, la résistance est maintenant considérée comme nulle :  $R = 0 \Omega$ . L'étude est menée pour  $0 \leq x \leq a$ .

- III.1.** Dans quelle condition exceptionnelle un conducteur solide (métallique, par exemple) présente-t-il une résistance parfaitement nulle (réponse en deux lignes maximum) ?
- III.2.** Proposer, à l'aide d'un schéma, un modèle électrocinétique (circuit électrique) du cadre non résistif **ABCD** dans lequel apparaissent le générateur de tension idéal de f.é.m.  $e$  (induite), une bobine idéale d'inductance  $L$  (identique à celle supposée du cadre) et le courant  $i$  (induit).
- III.3.** Appliquer la loi des mailles à cette spire et en déduire une équation différentielle qui relie les dérivées temporelles  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{di}{dt}$ .
- III.4.** Par intégration de l'équation différentielle précédente, établir une relation entre les grandeurs  $i(t)$  et  $x(t)$  en tenant compte des conditions initiales (rappel : à  $t = 0$ ,  $x = 0$  et  $i = 0$ ).

### III.5. Etude de la position $x$ du cadre

**III.5.a)** Montrer que l'application du PFD au cadre permet d'établir une équation différentielle de la forme :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ . Exprimer  $\omega_0$  en fonction des grandeurs  $m, L, b$  et  $B_0$ .

**III.5.b)** La position (ou abscisse)  $x(t)$  du cadre s'écrit  $x(t) = X_2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  (expression qui n'est pas à démontrer). La grandeur  $X_2$  est homogène à une longueur. En tenant compte des conditions initiales du mouvement, déterminer la valeur de l'angle  $\varphi$  et établir l'expression de la vitesse  $v(t)$ .

**III.6.** A l'aide de la **Feuille Annexe N° 2** figures **B.7** et **B.8** (à rendre avec la copie), tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions  $x(t)$  et  $v(t)$ , dans le seul cas où  $X_2 < a$ .

## IV. Mouvement du cadre si la spire est résistive et inductive

L'inductance  $L$  et la résistance  $R$  du conducteur ne sont plus négligées. L'étude est menée pour  $0 \leq x \leq a$ .

**IV.1.** Proposer, à l'aide d'un schéma, un modèle électrocinétique (circuit électrique) du cadre inductif et résistif **ABCD** dans lequel apparaissent le générateur de tension idéal de f.é.m.  $e$  (induite), une bobine idéale d'inductance  $L$  (identique à celle supposée du cadre), un résistor de résistance  $R$  (résistance du circuit) et le courant  $i$  (induit).

**IV.2.** Appliquer la loi des mailles à cette spire et en déduire une équation différentielle qui lie les grandeurs  $v(t)$  et  $i(t)$ .

### IV.3. Etude de la vitesse du cadre

**IV.3.a)** Montrer que l'application du PFD au cadre permet d'établir une équation différentielle de la forme :  $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$ .

Exprimer  $\lambda$ , coefficient d'amortissement, en fonction de  $R$  et  $L$ .

**IV.3.b)** Si  $\lambda$  est élevé ( $\lambda > \omega_0$ ), la position  $x$  de la barre **AB** reste dans l'intervalle  $[0, a]$  et la vitesse s'écrit sous la forme :

$$v(t) = \left[ C_1 \exp(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times t) + C_2 \exp(+\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \times t) \right] \times \exp(-\lambda t)$$

expression dans laquelle  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration (formule qui n'est pas à démontrer).

Décrire, en trois lignes maximum, le mouvement suivi par le cadre.

**IV.3.c)** Si le coefficient  $\lambda$  est faible ( $\lambda < \omega_0$ ) et en admettant que  $x$  reste dans l'intervalle  $[0, a]$ , la vitesse s'écrit, pour tout  $t > 0$ , sous la forme :

$$v(t) = v_0 \left[ \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \times t) \right] \times \exp(-\lambda t) \text{ (formule qui n'est pas à démontrer).}$$

A l'aide de la **Feuille Annexe N° 2** figure **B.9** (à rendre avec la copie), tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction  $v(t)$ .

**IV.3.d)** Quelle devrait être la valeur (littérale) de  $\lambda$  pour que le cadre s'arrête le plus vite possible sans osciller ?

**Fin de l'énoncé**

FEUILLE ANNEXE N° 1 (à rendre avec la copie)

Mouvement de la spire résistive ( $L = 0$  H) :  $x(t)$  et  $v(t)$  pour  $\underline{X_1} \leq a$

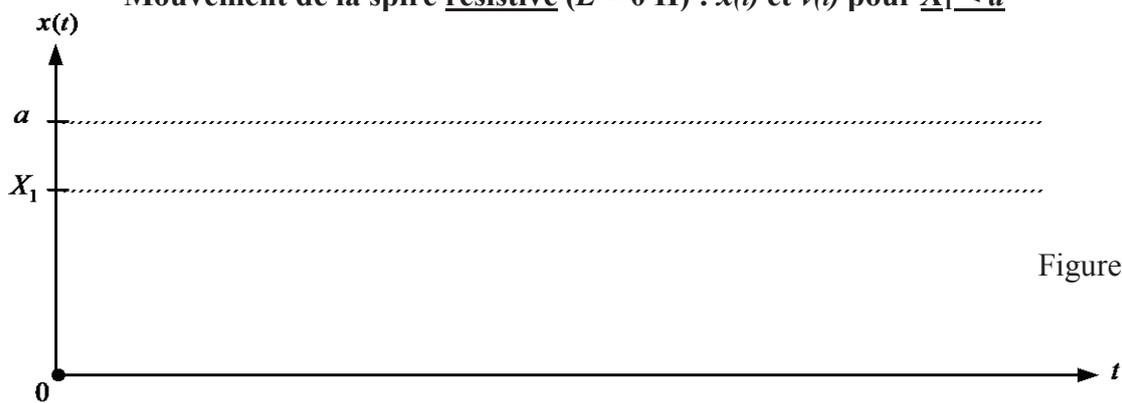


Figure B.3



Figure B.4

Mouvement de la spire résistive ( $L = 0$  H) :  $x(t)$  et  $v(t)$  pour  $\underline{X_1} \geq a$

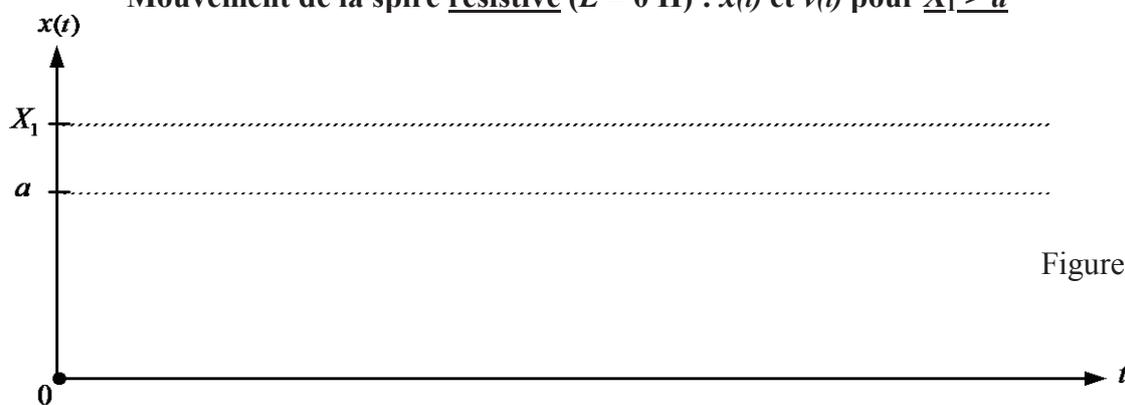


Figure B.5



Figure B.6

FEUILLE ANNEXE N° 2 (à rendre avec la copie)

Mouvement de la spire inductive ( $R = 0 \Omega$ ) :  $x(t)$  et  $v(t)$  pour  $X_2 < a$

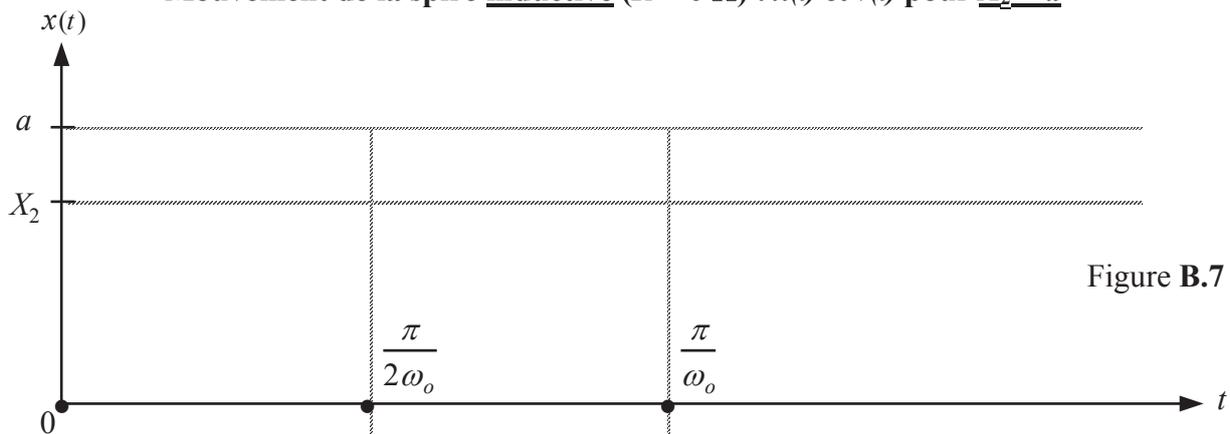


Figure B.7

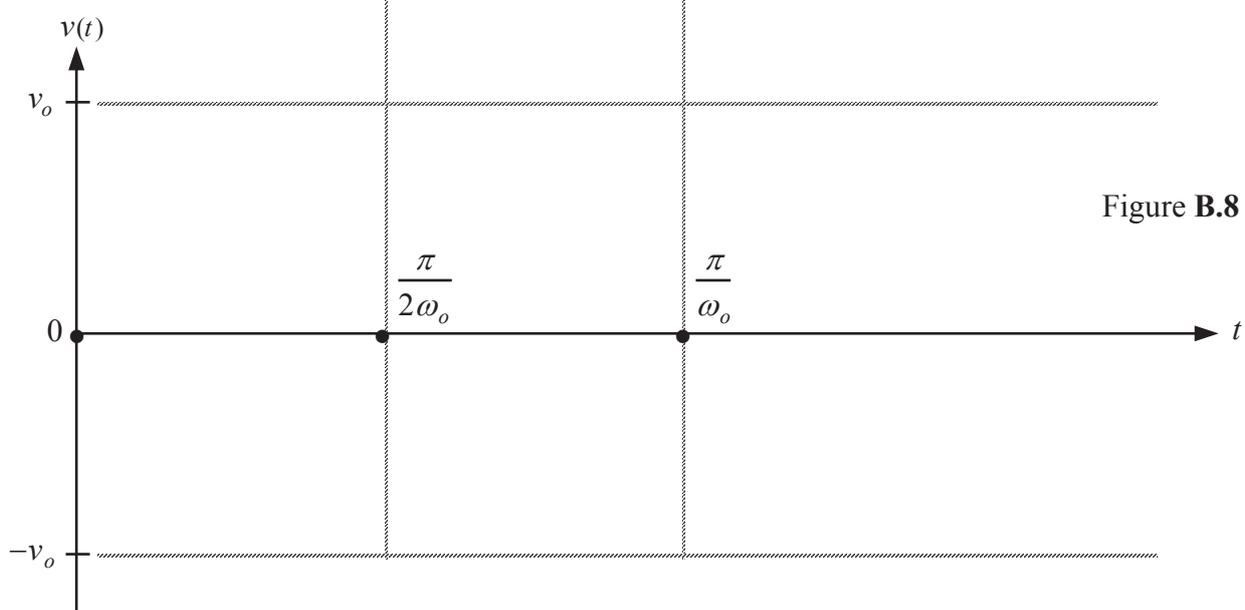


Figure B.8

Mouvement de la spire inductive et résistive, cas  $\lambda < \omega_o$  :  $v(t)$

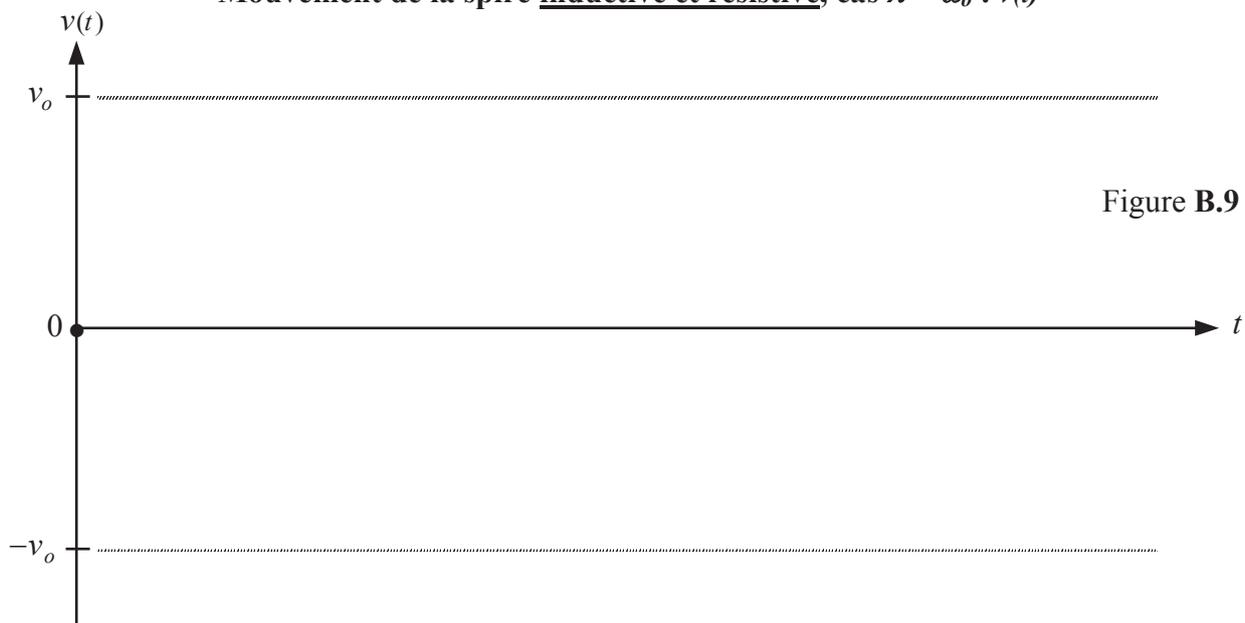


Figure B.9