

CORRIGÉ DM(5):

EXERCICE (1): Corrosion électrochimique Cuivre - Zinc

I.A.1 a)

Le potentiel d'une solution à l'équilibre peut s'exprimer à partir des concentrations de miniposte quel couple redox présent à l'équilibre en solution par:

$$E = E_{Ox/Red}^0 + \frac{0,06}{n} \log \frac{(Ox)^{\alpha} (.)}{(Red)^{\beta} (...)} \leftarrow \text{activité}$$

nb d'échanges par mol de degré d'avancement

$$b) E_{ef1} = E_{O_2/H_2O}^0 + \frac{0,06}{4} \log \frac{(P_{O_2})_a (H^+)_a^4}{1} \rightarrow \text{activité de l'eau solvant.}$$

$$(2H_2O \rightleftharpoons O_2 + 4H^+ + 4e^-)$$

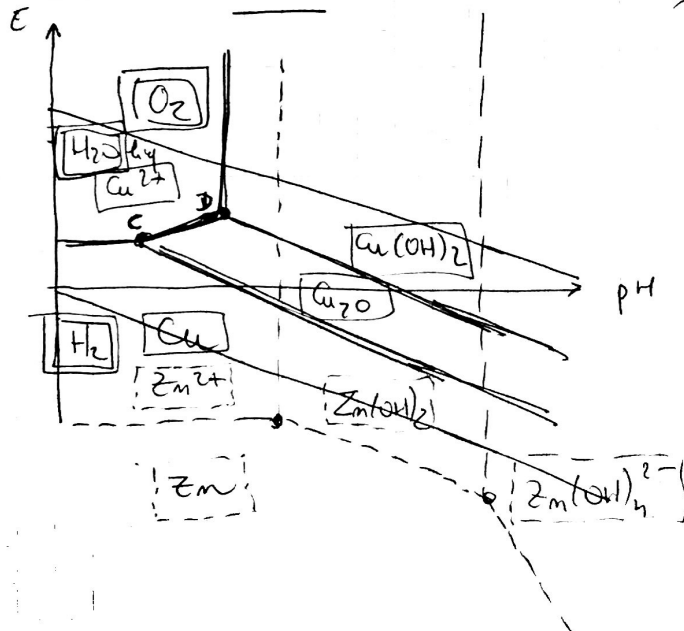
soit pour $pH=0$ et $P_{O_2} = P^0 = 1 \text{ bar}$ $E_{ef1} = E_{O_2/H_2O}^0 = \underline{1,23 \text{ V}}$

$$E_{ef2} = E_{Cu^{2+}/Cu}^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{(Cu^{2+})}{1} \rightarrow \text{activité de Cu(s).}$$

soit pour $[soluble] = [Cu^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol/l}$ $E_{ef2} = 0,34 - 0,06 = \underline{0,28 \text{ V}}$

$$E_{ef3} = E_{Zn^{2+}/Zn}^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{(Zn^{2+})}{1} \Rightarrow E_{ef3} = -0,76 - 0,06 = \underline{-0,82 \text{ V}}$$

IA.2) Aucune demo demandée!



IA.3) Le segment CD repère les domaines de $Cu^{2+}(aq)$ et $Cu_2O(s)$ dont la 1/2 eq redox est:

$$2 Cu^{2+} + H_2O = Cu_2O(s) + 2H^+ + 2e^-$$

donc la pente frontiere apparait dans l'équation de NERNST

$$E_f = E_{Cu^{2+}/Cu_2O}^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{(Cu^{2+})^2}{(H^+)^2}$$

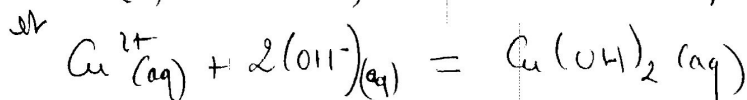
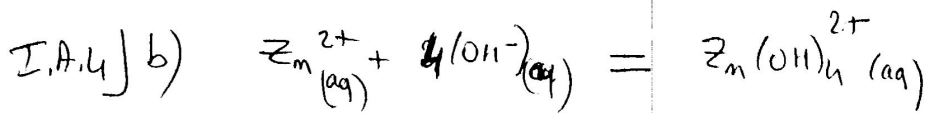
ou

$$E_f = (E_{Cu^{2+}/Cu_2O}^0 + 0,0 \log (Cu^{2+})_{fixe}) + 0,06 \text{ pH}$$

soit 1 pente de $\underline{0,06 \text{ V/unité de pH}}$

I.A.4 a) à $pH=1$ $\rightarrow$ Zn(II) sous forme $Zn^{2+}aq$.
Cu(II) ——— $Cu^{2+}aq$.

à $pH=14$ $\rightarrow$ Zn(II) sous forme $Zn(OH)_4^{2-}$
Cu(II) ——— $Cu(OH)_2$ solide.



A pH=14 la quasi-totalité des ions $Cu(II)$ sont à l'état de précipité $Cu(OH)_2$. Il faudrait donc que $Cu(OH)_2 \rightarrow Cu$ se fasse au niveau de l'électrode lorsque les $Cu(II)$ sont "en prison" dans l'hydroxyde au fond de la cellule.

Quant à $Zn(OH)_4^{2-}$ il faudrait utiliser la constante d'équilibre de complexation (donnée: $10^{17.7}$) pour calculer le nouveau ΔE nécessaire pour réaliser le dépôt, ou bien le nouveau ΔG de réaction connaissant le réducteur qui se fait oxyder sur l'autre électrode. (anode)

I.B] pH=1

I.B.1] a) (On ne demande pour l'instant que le signe de $\mathcal{E}$)

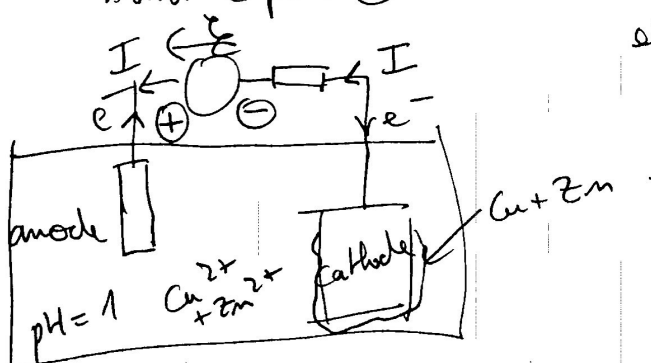
Comme Cu^{2+} et Zn^{2+} doivent être réduits, ils doivent capturer des e^- au niveau de la cathode pour donner $Cu_{(s)}$ et $Zn_{(s)}$.

Ainsi des e^- doivent arriver à la cathode par le circuit électrique donc le courant I doit en repartir.

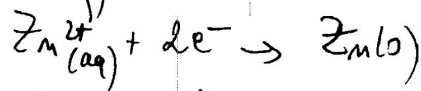
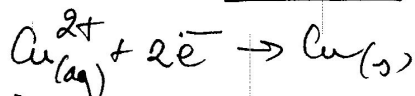
Or le courant (imposé par l'opérateur extérieur) part du (+) (potentiel + élevé) du générateur et revient au (-).

Ainsi le pôle (+) est l'anode et le pôle (-) la cathode

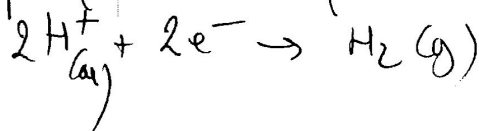
et $\mathcal{E} > 0$.



b) possibilité de réduction(s) sur la cathode :

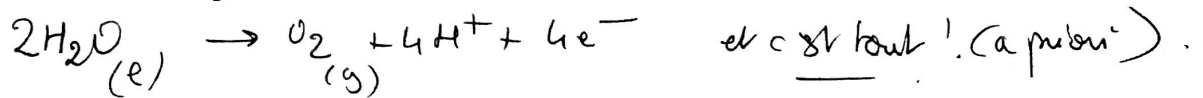


ou puisque milieu aqueux :



! en fonction du potentiel de la cathode : (il peut y avoir des oxydations sur la cathode ! (la réduction est globale))

c) possibilités d'oxydation sur l'anode :



I.B.2] Si on veut vraiment répondre à cette question, on a besoin de connaître les éventuelles intensités sur les électrodes. Il faut donc admettre que la question porte exclusivement sur l'aspect thermodynamique.

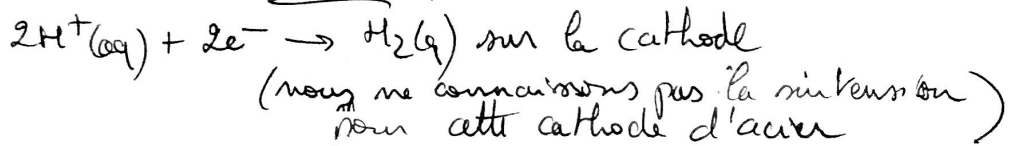
Etant donné l'énoncé les concentrations en solutes sont de 10^{-2} mol/l le pH de 1 et $p_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar}$, on utilise les valeurs calculées en question I.A.1]b) et comme on souhaite 1 co-dépôt il faut aller jusqu'à : $E = E_{\text{Cu}} - E_{\text{Zn}} = 1,17 - (-0,82) \approx 2 \text{ V}$ (pH=1) mais la question demande dans le premier temps le E_{minimum} pour qu'une "première" réaction se fasse.

Il s'agira donc du dépôt de Cu qui ne demande que :

$$E_{\text{min}} = 1,17 - 0,28 = 0,89 \text{ V} \approx 0,9 \text{ V}$$

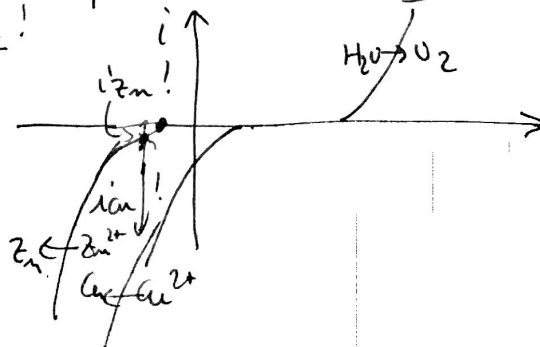
donc on a alors : $\text{Cu}^{2+}_{(aq)} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}_{(s)}$ sur la cathode

I.B.3] Pour avoir 1 co-dépôt de Cu et Zn, il faut donc dépasser 2 V et comme le potentiel de la cathode est alors d'environ $-0,85 \text{ V}$, on peut redouter la réduction :



En conclusion, ces conditions de dépôt sont très mauvaises pour 2 raisons :

- cloquage du dépôt par emprisonnement de bulles de H_2 .
- dépôt très préférentiel du Cu relativement au Zn !



EXERCICE ② : CORROSIONS

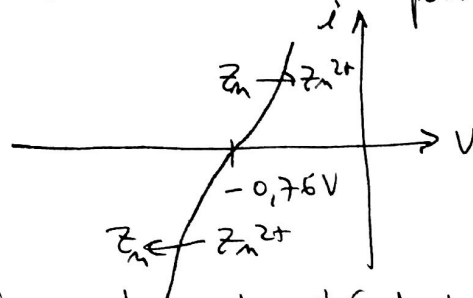
V.A.] Corrosion uniforme du zinc en milieu acide

V.A.1] La concentration en Zn^{2+} de 1 mol/l correspond aux conditions standard donc :

$$E = E_{Zn^{2+}/Zn}^{\circ} = -0,76V$$

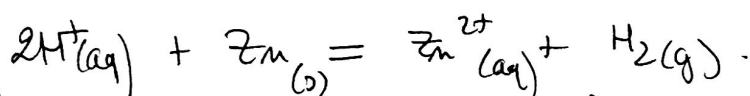
Et le couple est supposé rapide donc : $\eta_a = 0V$ et $\eta_c = 0V$.

On aura donc l'allure et le positionnement suivant :

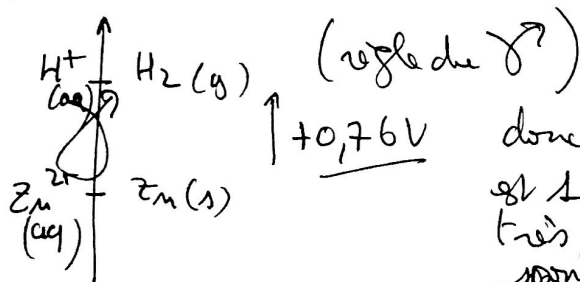


V.A.2] Que les courbes intensité-potentiel d'un couple redox chimique (ici $H^+ \rightarrow H_2$) sont positionnées en fonction d'éventuelles surtensions directement liées à la nature physique de la surface d'électrode où les réactifs sont adsorbés avant d'échanger des électrons. Donc la courbe intensité-potentiel du couple H^+/H_2 dépend de la nature physique de l'électrode.

V.A.3]



Thermodynamiquement (ou oubliant les surtensions) on peut représenter le déséquilibre énergétique de ce bilan réactionnel sur l'échelle de potentiels (standard).



donc cette oxydation par H^+ est une réaction a priori très déséquilibrée et spontanée dans le sens de la corrosion de $Zn \rightarrow Zn^{2+}$.

(on pourrait calculer sa constante d'équilibre : $\log_{10} K = \frac{2}{0,06} (0,76) \sim 25 !!$)

V.A.4]
$$\begin{cases} j_a = A_a e^{b_a E} \\ j_c = -A_c e^{-b_c E} \end{cases}$$
 (avec E le potentiel d'électrode (V dans le cours) et sous réserve de j_a et j_c suffisamment grands devant le jrent).

a) Puisque tous les e^- cédés par le réducteur (Zn) sont captés (simultanément) par l'oxydant (H^+) alors l'intensité anodique est égale (et opposée) à tout instant à l'intensité cathodique ($j_a = -j_c$ si m surface d'électrodes S)

V.A.4] b) Une corrosion uniforme correspond à 1 réaction totale constituée de 2 $1/2$ réactions (oxydation et réduction) se faisant sur la même électrode soit 1 pile court-circuitée (même potentiel) le potentiel de corrosion E_{con} est le potentiel commun et ce pt de fonctionnement électrique

$$\begin{cases} E_1 = E_2 = E_{con} \\ j_a = -j_c = j_{con} \end{cases}$$

est obtenu par intersection des caractéristiques $E(j)$
On obtient donc les deux valeurs par :

$$0,0774 \log(j_{con}) - 0,1956 = -0,0780 \log(j_{con}) - 0,778 = E_{con}$$

$$\text{donc: } \log(j_{con}) = \frac{0,1956 - 0,778}{0,0774 + 0,0780} = -3,75$$

$$\Rightarrow j_{con} \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ A.cm}^{-2}$$

$$\text{et } E_{con} = -0,49 \text{ V}$$

c) Notons S la surface d'électrode, l'intensité qui y est échangée vaut $I_{con} = j_{con} \times S$

et la charge échangée en 1 an : $q = I_{con} \times \Delta t$

$$q = j_{con} \times S \times \Delta t$$

ce qui représente 1 quantité (en mol d' e^-) de :

$$n_{e^-} = \frac{q}{F} \quad \text{puisque le Faraday est la charge d'1 mol d}'e^-$$

et puisque 2 mol d' e^- sont nécessaires pour 1 anneauet d'1/2 mol

$$\text{alors: } m_{Zn \text{ anodes}} = \frac{n_{e^-}}{2} = \frac{q}{2F} = \frac{j_{con} S \Delta t}{2F}$$

$$\text{Correspondant à 1 masse de } m_{Zn \text{ anode}} = m_{Zn} \times M_{Zn} = \frac{j_{con} S \Delta t M_{Zn}}{2F}$$

$$\text{et 1 volume de } V_{Zn \text{ anode}} = \frac{j_{con} S \Delta t M_{Zn}}{2F \rho_{Zn}}$$

égale l'épaisseur anodique $e \times S$ surface d'électrode

$$\text{donc } e = \frac{j_{con} \Delta t M_{Zn}}{2F \rho_{Zn}} \quad \text{par } \Delta t$$

$$\text{et } \frac{e}{\Delta t} = \frac{j_{con} M_{Zn}}{2F \rho_{Zn}} = \frac{1,8 \times 65,4 \cdot 10^{-3}}{2 \times 96500 \times 7140} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{ou bien: } v = \frac{1,8 \times 65,4 \times 10^3 \times 3600 \times 24 \times 365,25}{2 \times 96500 \times 7140} \text{ /mm/année}$$

$$\underline{A:N} : v = 2700 \text{ } \mu\text{m/an ou bien } 2,7 \text{ mm/an.}$$

II.B) 1) Le zinc avait 1 potentiel standard $\oplus$ bas ($-0,76V$) que le fer ($-0,44V$) donc sa réaction avec $2H^+ \rightarrow H_2$ était + déséquilibrée (donc + spontanée) (γ plus élevée)
Donc, avec ces seules considérations thermodynamiques, le métal qui devrait être le $\oplus$ attaqué par 1 m² solution d'acide est le zinc.

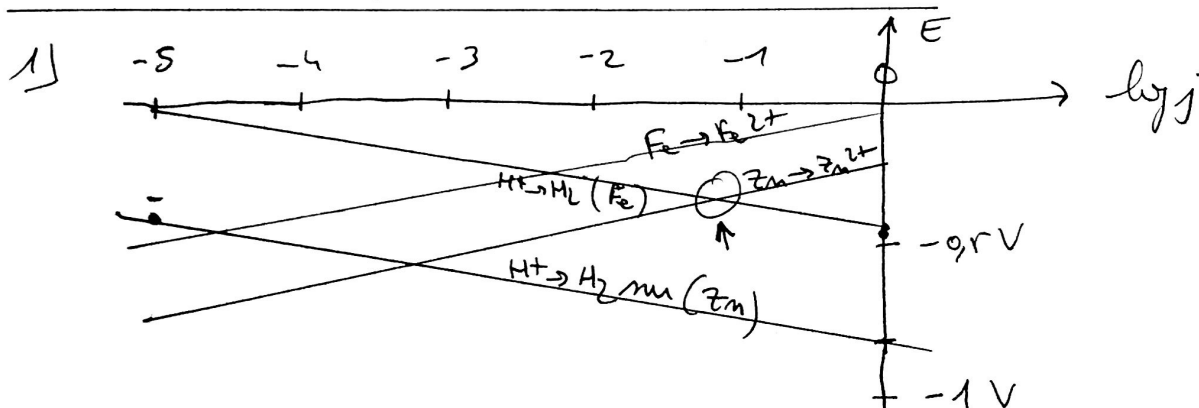
2°) 1^{er} calculs qu'en V.A.4] b]

$$\log(j_{\text{cor}}) = \frac{+0,0348 - 0,476}{0,0760 + 0,0780} = -2,86$$

$$j_{\text{cor}} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ A.cm}^{-2} \sim 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ A.cm}^{-2}$$

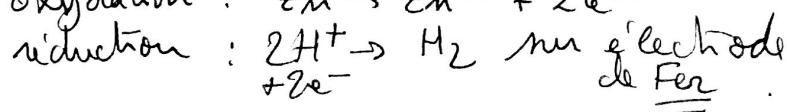
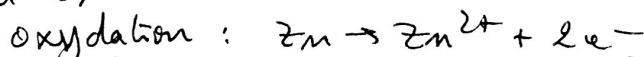
$$E_{\text{cor}} \approx -0,25(3) \text{ V}$$

IV - Corrosion du Fer avec 1 autre métal.



II.C) 2) On doit chercher au m^e potentiel (bloes reliés électriquement) la réaction qui va donner le courant de corrosion j_{cor} le + élevé donc $\log j_{\text{cor}}$ le $\ominus$ négatif.

Il s'agit de l'intersection repérée sur le schéma précédent où les réactions sont :



! comme plusieurs réactions sont envisagées au m^e potentiel on vérifie qu'à ce potentiel de corrosion (d'environ $-0,35V$) les intensités des autres réactions sont très faibles comparativement (ici des jantes de 10^{-3} , ou $< 10^{-5} \text{ A.cm}^{-2}$)

On calcule alors le $j''_{\text{corrosion}}$ par pt de fonctionnement :

$$\text{ici: } -0,0780 \log(j''_{\text{an}}) - 0,476 = 0,0774 \log(j''_{\text{an}}) - 0,1956$$
$$\log(j''_{\text{an}}) = \frac{-0,476 + 0,1956}{0,0780 + 0,0774} = -1,8$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{et } j''_{\text{an}} \approx 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ A.cm}^{-2} \\ E''_{\text{an}} \approx -0,33(5) \text{ V.} \end{array} \right.$$

Corrosion du Zn 100X plus rapide en présence de Fer !!

(enem dans l'énoncé de la question qui parlait du Cuivre !)

II.C.3] la canalisation est revêtue d'un métal noble (Ni? Co? Ag???)

mais 1 accident de revêtement met à jour $\frac{1}{1000}$ e de sa surface.

On propose de considérer que la relation $E(|j_c|)$ de la réaction $2\text{H}^+ \rightarrow \text{H}_2$ sur le métal noble est la m que sur le Fer.

L'égalité des intensités (anodique et cathodique) n'implique plus l'égalité des j_a et $|j_c|$!

On a $i_a = |i_c| \Leftrightarrow j_a \times S_{ox} = |j_c| \times S_{red}$ avec $S_{red} = 1000 \times S_{ox}$

donc: $|j_c| = \frac{j_a}{1000}$ et on s'intéresse à (j_a).

Ainsi l'égalité des potentiels donne :

$$0,0760 \log(j_a) - 0,0348 = -0,0780 \log\left(\frac{j_a}{1000}\right) - 0,476.$$

$$0,0760 \log(j_a) - 0,0348 = -0,0780 \log(j_a) + 3 \times 0,0780 - 0,476.$$

$$\text{et donc: } \log(j_a) = \frac{+0,0348 - 0,476 + 3 \times 0,0780}{0,0760 + 0,0780}.$$

$$\log(j_a) = \frac{-0,207}{0,154} = -1,357$$

$$\Rightarrow j_a \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ A.cm}^{-2}$$

1) à la conclusion : la densité est particulièrement forte à cet endroit. la mais l'intensité est le produit de cette valeur par 1 "petite" surface !



EXERCICE (6) : Batteries à flux de Vanadium

V (4^e ligne → 4s commence à remplir
5^e colonne → élément de transition avec 1 remplissage)

B) Diagramme potentiel-pH

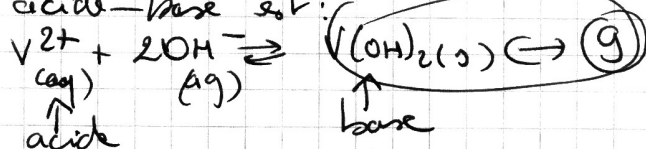
5°) Plus faible NO du vanadium dans V(s) (degré zéro) donc donne (5)

→ limite horizontale (échange exclusif d'e⁻) pour (4) et (3)

donc (4) ↔ V²⁺_(aq) et (3) → V³⁺_(aq)

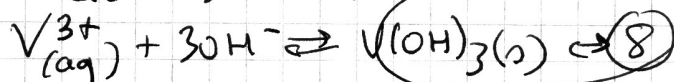
→ frontière verticale CB entre (4) et (9) ⇒ m DO.

la réaction acide-base est:

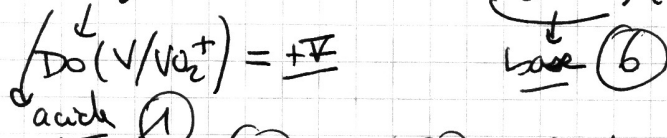
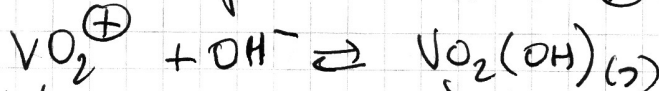


→ frontière verticale entre (3) et (8) ⇒ m DO

la réaction acide-base est:



(4) et (6) forment le couple acide-base de haut NO:



idem pour (2) et (7) → (2) est le domaine de VO²⁺ (DO = +IV)
et (7) ——— de VO(OH)₂s

6°) la concentration de trace influence déjà sur la frontière horizontale entre V(s) et V²⁺_(aq) dont on connaît le potentiel standard.

donc:

$$E_{\text{frontière AB}} = -1,21 = -1,18 + \frac{0,06}{2} \log(V^{2+})$$

$$\Rightarrow \log(V^{2+}) = -1 \rightarrow (V^{2+})_{\text{forte}} = (C_{\text{trace}})^{-1} = 10^{-1} M$$

7°) $\text{pH}_{\text{fontaine CB}} \approx 6,5 \Rightarrow [\text{OH}^-]_{\text{fontaine}} = 10^{-7,5} \text{ mol/l.}$

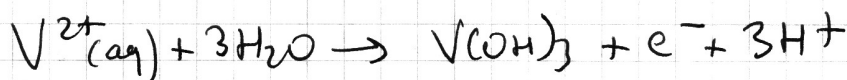
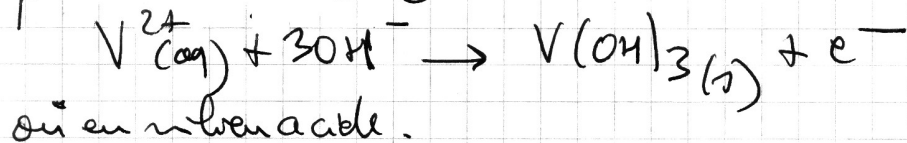
ou $K_{s2} = [\text{V}^{2+}]_{\text{base}} \cdot [\text{OH}^-]_{\text{fontaine}}^2$

$\Rightarrow K_{s2} = 10^{-1} \times (10^{-7,5})^2 = 10^{-16}$

8°) E_{fontaine}? On veut à priori que vous le calculiez à partir du point ① de terminer à partir du point ③!

Recherche de la pente (équation complète d'ailleurs!) ⑧/④

la 1/2 équation redox ⑧/④ st:



dont la pente st $-0,06 \times \frac{3}{1} = \underline{-0,18 \text{ V/pH}}$

donc $-0,18 = \frac{-0,88 - E_D}{6,5 - 3}$

$0,18 \times 3,5 = 0,88 + E_D$

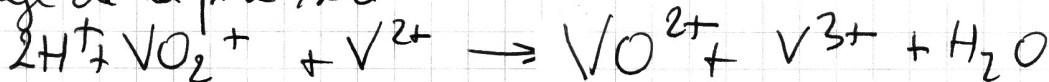
$\rightarrow E_D = 0,63 - 0,88 = \underline{-0,25 \text{ V}} = \underline{E_{\text{V}^{3+}/\text{V}^{2+}}^0}$

c) Batteries rechargeables

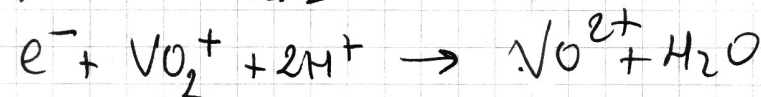
⑨ le ⊕ fort oxydant des 2 couples st VO_2^+

le ⊕ fort réducteur des 2 — st V^{2+}

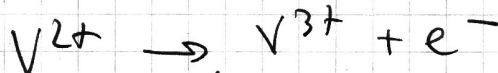
Donc la réaction spontanée qui aura lieu lors de la décharge de la pile sera:



obtenu avec les 2 demi-réactions:



ou



⑩ e = f.e.m de la pile. $e \equiv E_{\text{VO}_2^+/\text{VO}^{2+}} - E_{\text{V}^{3+}/\text{V}^{2+}}$

$$e = E_{\text{VO}_2^+/\text{VO}^{2+}}^0 + \frac{0,06}{1} \log \frac{(\text{VO}_2^+)(\text{H}^+)^2}{(\text{VO}^{2+})} - \left(E_{\text{V}^{3+}/\text{V}^{2+}}^0 + \frac{0,06}{1} \log \frac{(\text{V}^{3+})}{(\text{V}^{2+})} \right)$$

6 quidonne: $e = \left(E_{VO_2^+/VO^{2+}}^0 - E_{V^{3+}/V^{2+}}^0 \right) + 0,06 \log \frac{(VO_2^+)(H^+)(V^{2+})}{(V^{3+})(VO^{2+})}$

$\frac{1,0 - (-0,25)}{1,25V}$

11) En notant $\{t\}$ l'avancement de la réaction à l'instant t et en notant ν_i le coefficient stoechiométrique de l'entité i de concentration $c_i(t)$ on a:

$$\{t\} = \frac{n_i(t) - n_i(0)}{\nu_i} = \frac{c_i(t) \times V_R - c_i(0) \times V_R}{\nu_i}$$

ou bien: $c_i(t) = c_i(0) + \frac{\nu_i \{t\}}{V_R}$

Si I courant constant et durée de 0 à t alors:

$q(t) = I \times t$
 charge

$n_e(t) = \frac{I \cdot t}{F}$
 nombre de mol d' e^- chargé à t depuis $t=0$
 $F = 96485$ Faraday.

et $\{t\} = n_e(t)$ car 1 mol d' e^- / mol de degré d'avancement.

Soit: $c_i(t) = c_i(0) + \frac{\nu_i}{V_R} \times \frac{I \cdot t}{F}$

12) Si $Q(t)$ est le débit volumique d'électrolyte (en l/s)

$c_{is}(t) \times Q(t)$ représente le nb de mol qui sortent par seconde
 $c_{ie}(t) \times Q(t)$ représente le entant par seconde.

La différence est due à la consommation de l'entité i dans la cellule soit le $\frac{dn_i}{dt} = \frac{d(c_i(t) V_R)}{dt} = \frac{\nu_i I}{F}$

soit: $\left[\underbrace{c_{is}(t) \times Q(t)}_{\text{débit molaire sortant}} = \underbrace{c_{ie}(t) \times Q(t)}_{\text{débit molaire entrant}} + \frac{dn_i}{dt} = c_{ie}(t) \times Q(t) + \frac{\nu_i I}{F} \right]$
 $\frac{\nu_i I}{F}$ positif pour la production négatif pour la réaction

soit: $\left[c_{is}(t) = c_{ie}(t) + \frac{\nu_i I}{F \cdot Q(t)} \right]$

13) si $c_{cellule}(t) = \frac{c_{is}(t) + c_{ie}(t)}{2} = c_{ie}(t) + \frac{\nu_i I}{2FQ(t)}$

or $c_{ie}(t) = c_i(t)$ concentration dans le réservoir (en sortie du réservoir)

donc $c_{cellule}(t) = c_i(0) + \frac{\nu_i I \cdot t}{V_R F} + \frac{\nu_i I}{2FQ(t)} = c_i(0) + \frac{\nu_i I}{F} \left(\frac{t}{V_R} + \frac{1}{2Q(t)} \right)$

Ann: si le débit d'électrolyte est constant dans le temps: $Q(t) = Q_0 = C_0$
 et si les protagonistes étaient tous initialement présents en m^{me}
 concentration initiale C_0 alors:

$$(VO_2^+)(t) = (V^{3+})(t) = C_0 + \frac{I}{F} \left(\frac{t}{V_R} + \frac{1}{2Q_0} \right) \quad (\text{produit})$$

$$(VO_2^+)(t) = (V^{2+})(t) = C_0 - \frac{I}{F} \left(\frac{t}{V_R} + \frac{1}{2Q_0} \right) \quad (\text{réactif})$$

la fem s'écrit en fonction du temps:

$$E(t) = 1,25 - 0,12 \text{ pH} + 0,12 \log \left(\frac{C_0 - \frac{I}{F} \left(\frac{t}{V_R} + \frac{1}{2Q_0} \right)}{C_0 + \frac{I}{F} \left(\frac{t}{V_R} + \frac{1}{2Q_0} \right)} \right)$$

(le pH est a priori fixe indépendamment dans les ^{allures} ~~intervall~~ ^{et intervalles})
 Cette fem diminue donc avec le temps mais plus V_R est
 élevée, + cette diminution est lente.

14) Avantages et Inconvénients (à lire et traduire du document joint)

- (Av) → on augmente le puissance d'énergie en augmentant
 les concentrations d'électrolyte.
 → on peut arrêter instantanément la production
 d'électricité.
 → Réutilisable 15000 cycles de charge-décharge
 (Nous n'avons étudié que le mode décharge
 Rappelons que le but est de stocker
 pas de produire
 → la vraie source d'énergie est externe!)

→ Pas plus cher à la mise en route qu'un kWh.

- (Inconv) → Rendement 1 peu moins bon que des Li-ion.
 → Consommation d'électricité (donc perdue) dans
 les pompes d'alimentation de la cellule (vitesse)
 (qui peuvent être défectueuses)

EXERCICE (4) : Interférences entre sources ponctuelles.

1) CHEMIN OPTIQUE ET PHASE DU "SIGNAL" LUMINEUX.

A) RAYON LUMINEUX

A.1.a) c est la célérité dans le vide et (SM) le chemin optique donc le chemin "dans le vide" donc : $\Sigma(M) = \frac{(SM)}{c}$.

A.1.b) $\lambda_m \approx 600 \text{ nm}$ "dans le vide" (λ_{0m}).

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = \frac{2\pi c}{c T_m} = \frac{2\pi c}{\lambda_{0m}} \quad \text{A.N. } \omega_m \approx 3.15^{15} \text{ rad/s.}$$

$$A.1.c) \varphi_{P \rightarrow M} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \underbrace{(PM)}_{\text{chemin optique}}$$

Ceci constitue précisément (et exclusivement) la différence de phase entre deux états vibratoires d'1 m train d'onde reliant les points P et M (sans différence de phase donc)

2) SURFACE D'ONDE

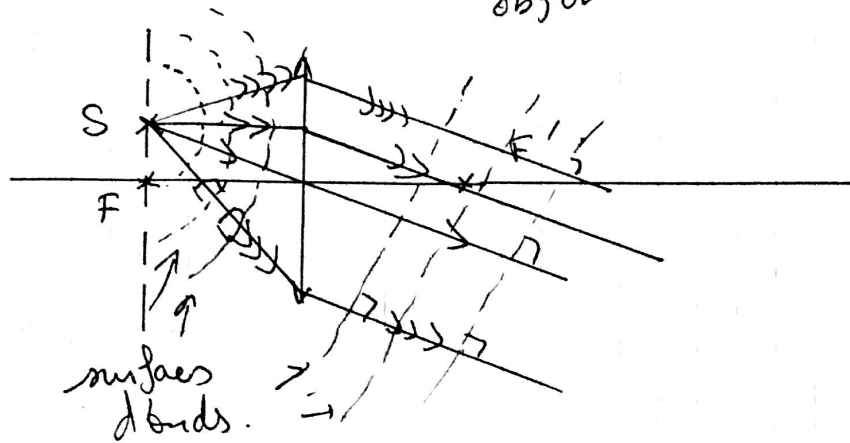
A.2.a) Surface d'onde = surface équiphasse.

Le signal lumineux émis par une source ponctuelle fixe se propageant de façon isotrope dans un milieu d'indice n uniforme, tous les points M d'une sphère centrée sur la source sont dans le même état de phase à un instant t .

Ainsi les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur la source.

Th de MAUS : Après 1 nb qq de réflexions et réfractions sur des systèmes optiques identiques les rayons provenant d'une même source sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.

A.2.b] Il s'agit d'une lentille (qu'elle soit convergente ou divergente d'ailleurs) à condition d'avoir placé la source ponctuelle dans le plan focal (par métonymie le foyer).
 objet objet.



B] INTERFÉRENCES ENTRE DEUX SOURCES PONCTUELLES

B.1a] $E(M) = 2 \langle s_{TOT}^2(M, t) \rangle_{\sum_R}$ par définition.

or par principe de superposition des amplitudes vibratoires :

$$s_{TOT}(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

$$s_{TOT}(M, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1(M, t)) + a_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2(M, t))$$

avant d'écrire l'éclairement, il est important de décomposer le déphasage :

par exemple : $\psi_1(M, t) = \frac{2\pi(s_1 M)}{\lambda_0} + \underbrace{\phi_1(t)}$

retard temporel
à l'origine S1
et constant sur
la durée $\sum_C$ d'un train
d'onde
mais dépendant du temps
sur la durée $\sum_R$.

idem pour : $\psi_2(M, t) = \frac{2\pi(s_2 M)}{\lambda_0} + \phi_2(t)$.

Mais dans cette question, on ne se soucie pas encore des valeurs des grandeurs moyennes temporelles sur la durée de détection donc :

$$s_{TOT}^2(M, t) = a_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \psi_1(M, t)) + a_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \psi_2(M, t))$$

(par linéarisation trigonométrique) $+ a_1 a_2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\psi_1 + \psi_2)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\psi_1 - \psi_2))]$

On peut ainsi écrire (avant de réfléchir aux moyennes temporelles) :

$$E(M) = 2 \langle I(M, t) \rangle_{\tau_R} = 2a_1^2 \langle \cos^2(\omega_1 t - \psi_1(M, t)) \rangle_{\tau_R} \\ + 2a_2^2 \langle \cos^2(\omega_2 t - \psi_2(M, t)) \rangle_{\tau_R} \\ + a_1 a_2 \left[\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)) \rangle_{\tau_R} \right. \\ \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\psi_1 - \psi_2)(M, t)) \rangle_{\tau_R} \right]$$

¶ l'évolution de $\psi_1(M, t)$ et $\psi_2(M, t)$, les contributions $\omega_1 t$ et $\omega_2 t$ sur 1 durée $\tau_R \gg \frac{2\pi}{\omega_1}$ et $\frac{2\pi}{\omega_2}$ impliquent que la moyenne des cosinus concernés (sur 1 nb très important de périodes $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$) vaut $\left(\frac{1}{2}\right)$.

les seules moyennes temporelles se font sur des cosinus sur 1 nb très grand de périodes (c'est à dire 1 moyenne nulle) sauf si $T = \frac{2\pi}{(\omega_1 - \omega_2)}$ n'est plus négligeable devant τ_R !! Ce qui arrivera évidemment si ω_1 et ω_2 sont très proches !

Si on ne réfléchit pas à ces termes dans cette question, on écrira :

$$E(M) = E_1 + E_2 + a_1 a_2 \left[\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)) \rangle_{\tau_R} \right. \\ \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \psi_1(M, t) - \psi_2(M, t)) \rangle_{\tau_R} \right]$$

terme d'interférences // $\psi_{2,1}(M, t)$

mais $\frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ étant obligatoirement très petit devant τ_R alors le terme d'interférence se limite à :

$$a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \psi_{2,1}(M, t)) \rangle_{\tau_R}$$

B.1b) Pour avoir 1 terme non nul, deux conditions apparemment:

① → $\omega_1 = \omega_2$ (isochronisme)

(m si la plupart des ouvrages parlent de synchronisme qui en vérité signifie absence de déphasage!)

(dans le langage courant aussi!
Que veut dire
"synchronisons nos montres"
d'après vous? .

et ② $\langle \phi_{2/1}(M, t) \rangle_{Z_R} \neq 0$!

D'après les expressions de $\phi_1(M, t)$ et $\phi_2(M, t)$ de ma réponse à la question précédente, cela se traduit par:

$$\langle \phi_2(t) - \phi_1(t) \rangle_{Z_R} = 0$$

Il faut donc le m $\phi_2 - \phi_1$ à chaque train d'onde!

Ce n'est évidemment pas envisageable avec des sources indépendantes et ce ne sera que lorsqu'il s'agit de trains d'ondes identiques d'1 m source (ayant par contre parcouru des chemins $\neq$).

Dans ce cas: $\phi_2 - \phi_1 = Ct = \underline{\underline{0}}$.

Alors seulement les ondes seront dites cohérentes.

(Il n'est pas inutile de rappeler que si la différence de marche est trop importante ($> L_c$: longueur moyenne des trains d'onde) alors on perd les interférences).

Pour des ondes incohérentes: $\langle \phi_2(t) - \phi_1(t) \rangle_{Z_R} = 0$

donc $E(M) = E_1 + E_2$ uniforme ^{trop}

B.1c) Non: si les pulsations ω_1 et ω_2 sont différentes

$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ devient négligeable devant Z_R car

la moyenne temporelle associée dans le terme d'interférences devient nulle $\forall \phi_2 - \phi_1$ (m si il était constamment nul).

B.1d) longueurs d'onde très proches signifie (pour l'auteur de la question) suffisamment proches pour que $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ soit de l'ordre de la seconde.

S'il n'y avait pas de décohérence de phase variable (c'est-à-dire si $\phi_1 - \phi_2 = \text{cte}$) alors on aurait 1 phénomène de battements c'est-à-dire une oscillation de l'éclairement à 1 position M donnée de fréquence $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$.

Cette question n'a d'intérêt que si les trains d'ondes sont du même ordre de grandeur temporel que le temps de réponse ($\Sigma_R \neq \Sigma_C$). Donc sans intérêt ici. (cf difficultés de réglage sur la cure à ondes)

B2a) $\phi_{2/1}(M, t) = \phi_2(M, t) - \phi_1(M, t)$

$$\phi_{2/1}(M, t) = \left(\frac{2\pi(S_2 M)}{\lambda_0} + \phi_2(t) \right) - \left(\frac{2\pi(S_1 M)}{\lambda_0} + \phi_1(t) \right)$$

$$\phi_{2/1}(M, t) = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2 M) - (S_1 M))}_{\delta \Rightarrow \text{différence de marche en M.}} + \underbrace{(\phi_2(t) - \phi_1(t))}_{\text{terme responsable de la variation temporelle lorsque } \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \omega_1 = \omega_2 = \omega_0}$$

la phase n'est dépendante du temps à cause du défillement de déphasages aléatoires entre trains d'ondes arrivant simultanément en M.

B2b) Non : même si les conditions de synchronisme sont vérifiées (c'est-à-dire insynchronisme + cohérence de phase mutuelle synchronisme)

la différence de marche δ peut être supérieure à l'ordre de grandeur des trains d'onde.

or le déphasage entre deux trains d'ondes mécaniques d'une source unique reste aléatoire! $\rightarrow$ on perd les interférences.

B.3) On considère que

$$\phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\underbrace{(S_2(M) - S_1(M))}_{\text{différence de marche } \delta(M)}) \quad (\text{indép du temps})$$

Ainsi on retrouve:

$$E(M) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\phi_{2/1}(M))$$

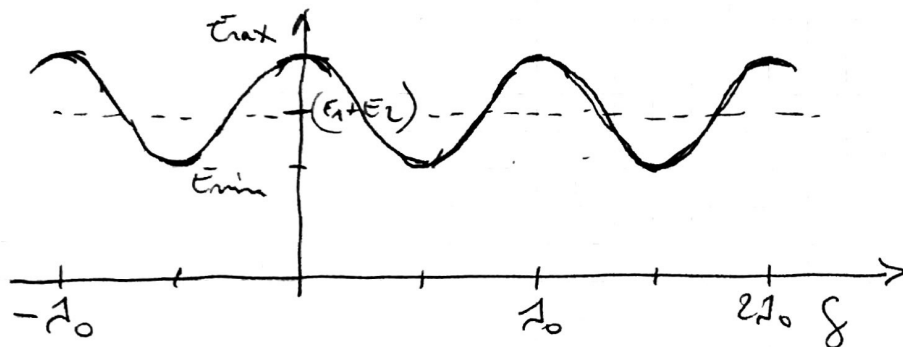
$$E(M) = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda_0}\right).$$

$$E_{\max} = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2}$$

$$E_{\min} = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2}$$

$$\mathcal{C} = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{4\sqrt{E_1 E_2}}{2(E_1 + E_2)} = \frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{E_1 + E_2}$$

$$\mathcal{C}_{\max} = 1 \text{ pour } E_1 = E_2 = E_0$$



C) FIGURES D'INTERFÉRENCES

C1a) On ne peut réaliser deux sources ayant ces qualités que par division de front ou division d'amplitude d'une onde primaire. Il s'agit également ici qu'elle soit monochromatique. Pour avoir la même amplitude (a_0) il faut également que la division se soit faite à 50/50.

$$E(M) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0}\right) \right)$$

C1b) (dérive du cours des trous d'Young.)

$$I(M) \approx \frac{b^2 X^2}{D^2}$$

$$E(M) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi b X}{\lambda_0 D}\right) \right)$$

franges uniformes si $X = \lambda_0 t \Rightarrow$ franges rectilignes sur l'écran // à l'axe Y.

C1c) $p(M) \equiv \frac{I(M)}{I_0}$

$$E(M) = E_{\max} \text{ si } \cos\left(\frac{2\pi b X_{\text{max}}}{\lambda_0 D}\right) = +1$$

et avec l'ordre d'interférence: $\cos(2\pi p) = +1$
 $\Rightarrow p = k$ entier relatif.

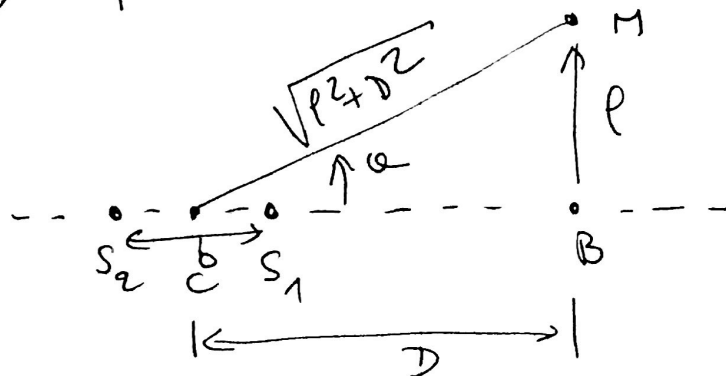
nombre si: $\cos(2\pi p) = -1$

$\Rightarrow p = k + \frac{1}{2}$ avec entier relatif.

C1d) i est la périodicité spatiale de la figure d'éclairement dans la direction X soit d'après l'expression de C1b)

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda_0 D}{b}$$

C2a) Représentons la situation dans le plan $S_1 M S_2$



Expression exacte: $S_2 M = \sqrt{p^2 + \left(D + \frac{b}{2}\right)^2}$

$$S_1 M = \sqrt{p^2 + \left(D - \frac{b}{2}\right)^2}$$

si $n=1$:

$$\delta = \sqrt{p^2 + \left(D + \frac{b}{2}\right)^2} - \sqrt{p^2 + \left(D - \frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{p^2 + D^2 + Db + \frac{b^2}{4}} - \sqrt{p^2 + D^2 - Db + \frac{b^2}{4}}$$

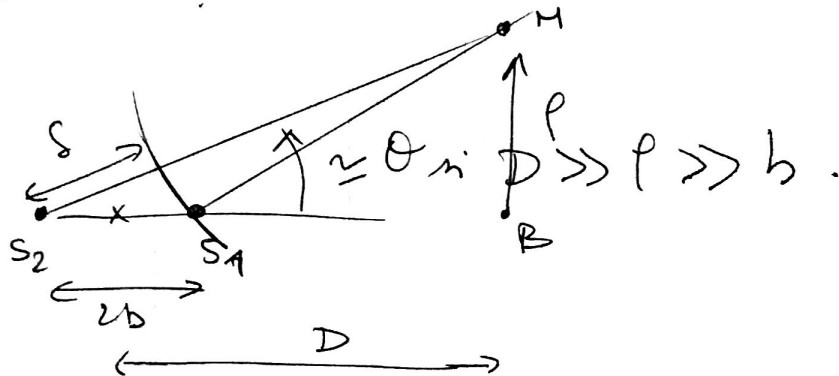
$$\delta = \underbrace{\left(\sqrt{p^2 + D^2} \right)}_{= \frac{D}{\cos \theta}} \left(\sqrt{1 + \frac{Db + \frac{b^2}{4}}{p^2 + D^2}} - \sqrt{1 + \frac{-Db + \frac{b^2}{4}}{p^2 + D^2}} \right)$$

aux $b \ll D$ ou $b \ll p^2 + D^2$ on peut proposer:

$$\delta \approx \frac{D}{\cos \theta} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Db + \frac{b^2}{4}}{D^2} \right) \cos^2 \theta - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{-Db + \frac{b^2}{4}}{D^2} \right) \cos^2 \theta \right)$$

$$\delta \approx \frac{D}{\cos \theta} \frac{Db}{D^2} \cos^2 \theta = b \cos \theta.$$

bien boundingue pour trouver 1 approximation viable graphiquement!



C.2b) $E(M) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi b \cos \theta}{\lambda_0} \right) \right)$

ou bien (comme demandé):

$$E(M) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi b \times \frac{D}{\sqrt{p^2 + D^2}}}{\lambda_0} \right) \right)$$

C.2c) $\hat{m} \theta \Rightarrow \hat{m} E(M(\theta)) \Rightarrow$ franges circulaires centres sur l'axe S_1S_2 .

$$p(\theta) \equiv \frac{\delta(\theta)}{\lambda_0} = \frac{b \cos \theta}{\lambda_0}$$

donc pour θ faibles $\cos \theta$ décroissant de θ
donc $p \downarrow$ si $\theta \uparrow$.

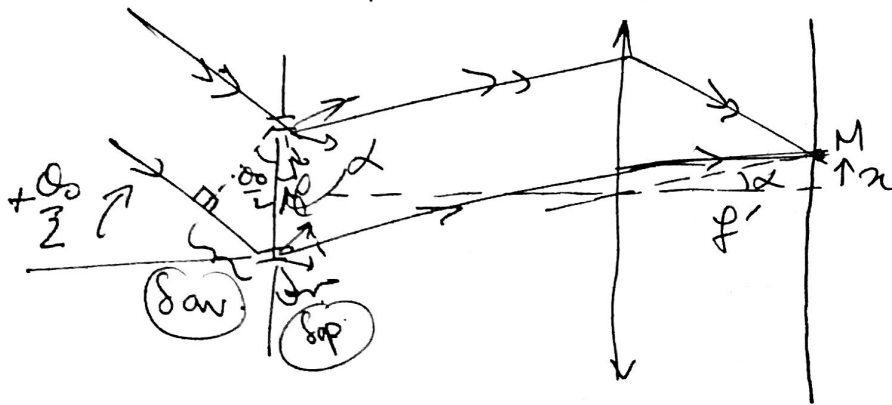
l'ordre maximal est au centre
(on pourrait aussi simplement travailler sur $p(p)$)

EXERCICE (5) :

1°) Chaque étoile fait sa figure d'interférence des trous d'Young dans le plan focal image de la lentille :
franges rectilignes (perpendiculaires à la direction $T_1 T_2$)
Mais s'agissant de sources incohérentes, ce sont ensuite leurs éclairéments qui s'ajoutent (elles n'interfèrent pas entre elles).

2°) L'étoile (1) avec les rayons arrivant avec 1 inclinaison $+\frac{\theta_0}{2}$ présentant 1 différence de marche totale :

$$\delta_1(M) = \delta_{av} + \delta_{ap} = l \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{l\lambda}{f'}$$



son éclairément sera en $M(x)$:

$$E_1(x) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda_0} \left(\sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{x}{f'} \right) \right) \right)$$

De la même manière :

$$E_2(x) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda_0} \left(-\sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{x}{f'} \right) \right) \right)$$

Puisqu'elles sont incohérentes on additionne les éclairéments (pas d'interférences) :

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) = 2E_0 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda_0} \left(\frac{x}{f'} + \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right) \right) + \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda_0} \left(\frac{x}{f'} - \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right) \right) \right)$$

Par trigo :

$$E(x) = 4E_0 \left(1 + \underbrace{\cos \left(\frac{2\pi l \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right)}{\lambda_0} \right)}_{\text{visibilité}} \times \underbrace{\cos \left(\frac{2\pi l x}{\lambda_0 f'} \right)}_{\text{interférences à 2 sources}} \right)$$

θ_0 étant certainement extrêmement petit :

$$3^o) \quad E(x) \approx 4E_0 \left(1 + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi l \theta_0}{\lambda_0}\right)}_{\text{visibilité}} \times \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{lx}{f'}\right)}_{\text{interférences}} \right)$$

4°) coefficient de visibilité : fonction périodique de l

$l = 0 \rightarrow$ visibilité max. ($= 1 = 100\%$)

$l = \frac{\lambda_0}{2\theta_0} \rightarrow$ visibilité nulle

$l = \frac{\lambda_0}{\theta_0} \rightarrow$ visibilité $\in (-1)$ soit contraste $= |V| = 1$.
100%

$l = \frac{3\lambda_0}{2\theta_0} \rightarrow$ visibilité nulle etc.

$$5^o) \quad l^* = \frac{\lambda_0}{2\theta_0} \Rightarrow \left(\theta_0 = \frac{\lambda_0}{2l^*} \right)$$

EXERCICE (1) : Mesures interférentielles.

B.1) Si l'incidence est rigoureusement normale, tous les rayons sortent parallèles à l'axe z et en chaque point d'un écran placé parallèlement à M_1 , on a le m^{ème} phénomène de superposition et d'interférences entre deux vibrations sinusoïdales présentant une différence de marche d'1 aller-retour entre les deux miroirs : $\delta = 2e$ $\forall$ le point du plan d'observation.

L'éclairement est donné par la formule de FRESNEL des interférences à deux ondes de m^{ème} amplitude : $E = \frac{E_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$ longueur d'onde dans le vide.
(si E est l'éclairement maximal sur l'écran)

Ainsi : $E = \frac{E_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi 2e}{\lambda_0} \right) \right) = \frac{E_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) \right)$
(Pour 1 épaisseur e de la lame d'air, l'éclairement est uniforme sur l'écran)

L'éclairement uniforme varie donc sinusoïdalement autour d'une valeur moyenne de $\frac{E_0}{2}$ avec 1 périodicité de $\frac{\lambda_0}{2}$ pour les variations fonction de la variable e .

B4)

En reprenant $h(r)$ sur la figure et en écrivant pythagore :

$$(R - h(r))^2 + r^2 = R^2$$

et par ailleurs :

$$e_0 + H_{\max} = z(r) + h(r)$$

On en déduit :

$$z(r) = e_0 + H_{\max} - h(r)$$

$$z(r) = e_0 + H_{\max} - (R - \sqrt{R^2 - r^2})$$

et sachant que $r \ll R$: $\sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \simeq R \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right)$

d'où : $R - \sqrt{R^2 - r^2} \simeq \frac{r^2 R}{2R^2} = \frac{r^2}{2R}$

soit : $z(r) \simeq e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}$

B5) $\delta(r) = 2z(r) = 2(e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}) = 2e_0 + 2H_{\max} - \frac{r^2}{R}$

Les zones de $r = \text{cte}$ (cercles centrés sur l'axe Oz) sont d'égale différence de marche et donc d'égale éclairement.

Dans les m^{êmes} conditions d'observation que celle de la figure d'interférence du coin d'air, on observera des anneaux (localisés au niveau du plan "moyen" des miroirs) ("indicateur d'angle α variable").

B6] Orde au centre :

$$z(0) = e_0 + H_{\max} \Rightarrow \delta_{(0)} = 2z(0) = p_0 \lambda_0 \text{ par définition de l'ordre d'interférence.}$$

$$\Rightarrow \left| p_0 = \frac{2(e_0 + H_{\max})}{\lambda_0} \right|$$

Au premier anneau brillant : $p_1 = p_{k_1} = \lfloor p_0 \rfloor \leftarrow$ partie entière (p décroissant de λ).

et au $k^{\text{ième}}$ anneau brillant :

$$p_k = k_1 - k + 1.$$

$$\text{avec : } \delta(p_1) = 2e_0 + 2H_{\max} - \frac{p_1^2}{R} = k_1 \lambda_0$$

$$\text{et } \delta(p_k) = 2e_0 + 2H_{\max} - \frac{p_k^2}{R} = (k_1 - k + 1) \lambda_0$$

$$\text{soit par différence : } -\frac{p_1^2}{R} + \frac{p_k^2}{R} = (k_1 - 1) \lambda_0$$

$$\text{on en fin : } \boxed{p_k = \sqrt{p_1^2 + R(k_1 - 1) \lambda_0}}$$

B7] Il est important de signaler que les rayons des anneaux ont été calculés directement dans le plan de front des miroirs et non a priori sur l'écran d'observation ! Les mesures faites sur l'écran font donc intervenir le grandissement linéaire lors de la conjugaison. Dans le cas particulier d'un montage "4f", le grandissement est de (-1) et les rayons mesurés sur l'écran sont les m que sur les miroirs.

Le diamètre du "défaut" est donc lu immédiatement : $d = 4,0 \text{ mm}$

Né connaissant pas R , il est inutile de penser utiliser la formule démontrée précédemment (sauf justement pour évaluer R !)

Il suffit de dire que l'épaisseur est la semi-différence de marche

On lit donc 1 différence de différence de marche de 4 longueurs d'onde entre ce que l'on observe au centre et en périphérie du défaut donc l'épaisseur max du défaut vaut 2 longueurs d'onde : $H_{\max} = 2 \times \lambda_0 = 1,26 \text{ } \mu\text{m}$.

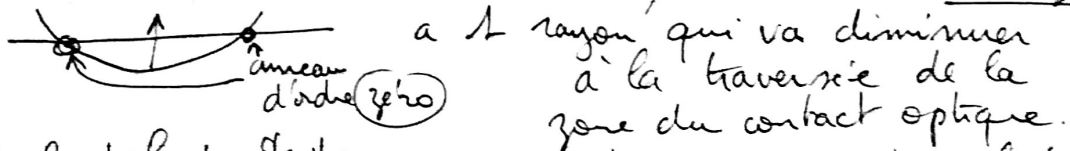
L'appréciation de la variation d'éclairement induit au pire une erreur d'1 quart de longueur d'onde sur les 4 λ_0
soit une erreur max de $\frac{1}{16} \approx 6\%$

soit sur λ valeur de $1,26 \rightarrow 0,08 \mu m$

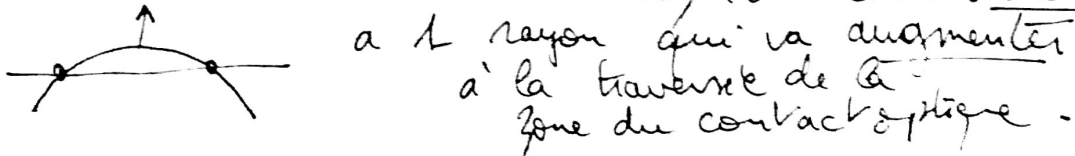
Il est donc préférentiel d'écrire $1,26 \mu m \rightarrow \boxed{\approx 1,3 \mu m}$

$\rightarrow$ Puisque Π était le plan miroir sans défaut, nous avons travaillé sur 1 défaut de type "convexe".

④ Donc si le défaut est convexe et ($e_0 > 0$), on translate dans le sens de la diminution de e_0 , l'anneau d'ordre zéro



⑤ Si le défaut était concave et $e_0 > 0$, on translate toujours dans le sens de la diminution de e_0 , l'anneau d'ordre zéro



Interférométrie RADAR (SAR)

B8) Par analogie :

$$\delta(x) = \delta z(x) = 2(h_2(x) - h_1(x))$$

B9) Diamètre concerné d'environ 40 km (non symétrique)

Environ 3 interférences de différence donc :

$$H_{max} \approx 3 \times \frac{\lambda_0}{2} \approx 15 \times 5,7 = 8,6 \text{ cm}$$

Dérivellation observée sur 4 ans donc $\approx 2,1(5) \text{ cm/an}$

$$\approx 2 \text{ cm/an}$$

On aurait + de précision avec 1 longueur d'onde + petite (+ de franges pour la m dérivellation, + de précision sur le cartographie de variation d'altitude.)