DM 6 (CORRIGÉ)

Exercice 7 :

$d_{liq} \equiv \frac{\rho}{\rho_0}$ $\frac{\to \text{masse volumique du fluide.}}{\to \text{masse volumique de l'eau}}$

densité moyenne de l'objet "densimètre" : d_0

(quelle idiotie de mettre l'indice 0 à deux grandeurs qui n'ont rien à voir !)

donc : $d_{densimètre} = d_0 = \frac{\rho_{densimètre}}{\rho_0} = \frac{m}{V \times \rho_0}$

m → masse du densimètre.

V → volume du densimètre.

3.1) $m = \rho_0 d_0 V$

3.2) P_A : poussée d'Archimède exercée par le fluide sur le densimètre.

volume immergé $= V - hs$ avec s la section du tube.

donc : $|P_A| = \rho(V - hs)\, g$

et $\vec{P_A} = \rho(V-hs)\, g\, \vec{e_z}$ si $\vec{e_z}$ ascendant.

et si d est la densité du fluide : $\rho = \rho_0 \times d$.

donc : $|P_A| = \rho_0 d (V - hs) g$.

3.3) A l'équilibre, la poussée d'Archimède équilibre le pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$ du densimètre

de norme : $\|\vec{P}\| = \rho_0 d_0 V g$

ainsi : $\cancel{\rho_0} d_0 V \cancel{g} = \cancel{\rho_0} d (V - hs) \cancel{g}$

soit : $d = \frac{d_0 V}{V - hs} = \frac{d_0}{1 - \frac{hs}{V}} = \boxed{\frac{d_0}{1 - \frac{h}{H}}}$ ou $\frac{H d_0}{H - h}$

3.4) La mesure n'est envisageable que pour $h_M > h > 0$

d est $\searrow$ fonction décroissante de h donc :

$$d_0 > d > \frac{d_0}{1 - \frac{h}{h_M}}$$

↑ correspond à $h = 0$

donc pour des liquides plus denses que la densité moyenne de cet objet flottant.

Exercice (8) :

4.a) Dans 1 fluide la relation à l'équilibre est la relation fondamentale de la statique des fluides mais dans le cas de liquides incompressibles-homogènes comme ici, il est important de connaître et utiliser la forme scalaire intégrée qui relie (dans 1 m̂ fluide) le champ des pression p et celui des altitudes z.

$$\boxed{p + \rho g z = C^{te}}$$ (version de BERNOULLI sans terme cinétique en fait).

Ce qui permet d'écrire très simplement les variations de pression en fonction des "hauteurs de colonne de fluide".

Ainsi dans cette première situation, si on note p_{ref} la pression à l'altitude de référence et p^0 la pression atmosphérique au-dessus des surfaces libres alors :

→ dans le mercure : $P_{ref} - P^0 = \rho_2 g h_1$

→ dans l'eau : $P_{ref} - P^0 = \rho_1 g h_2$

d'où : $\frac{h_2}{h_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$ et $\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}}$

Le commentaire qui me vient consiste à signaler que le mercure étant 13,6 fois + dense que l'eau et que si on veut mesurer h_1 précisément, il doit valoir + d'1 cm et la colonne d'eau équilibrant fera déjà 13,6 cm.

4.b) Même méthode des colonnes de fluides :

$P_{ref} - P^0 = \rho_1 g h_1$

et $P_{ref} - P^0 = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g (h_3 - h_2)$

donnent : $\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}$

A.N : $\rho_3 = \frac{0,8 - 13,6 \times 0,05}{(0,2 - 0,05)} . 10^3 = 0,8 . 10^3 \, kg/m^3$

Exercice 9 :

a) Pour le débit proposé, l'expression en unités internationales est $D_V = \frac{5}{3\,600} = 1{,}4.10^{-3}\ m^3.s^{-1}$. La vitesse moyenne est donc $v = \frac{4D_V}{\pi d^2} = 1{,}73\ m.s^{-1}$, conduisant au nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{v d \mu}{\eta} = 5{,}53.10^4.$$

L'écoulement est nécessairement turbulent avec un aussi grand nombre de Reynolds.

b) La formule de Blasius est utilisable, car $Re < 10^5$ et on obtient :

$$\frac{\Delta P_C}{\ell} = 0{,}316\, Re^{-0{,}25} \mu \frac{v^2}{2d} = 8{,}6.10^2\ Pa.m^{-1},$$

dont on déduit $\frac{\Delta z_C}{\ell} = \frac{1}{\mu g}\frac{\Delta P_C}{\ell} = 0{,}087$, résultat qui n'a pas d'unité car il s'agit de mètre par mètre.

La règle d'usage simple est tout à fait convenable pour ces paramètres d'écoulement.

c) Si l'on reprend d'autres valeurs numériques, par exemple $2\,m^3.h^{-1}$, on aboutit à une vitesse moyenne $v = 0{,}7\ m.s^{-1}$, donc un nombre de Reynolds $Re = 2{,}2.10^4$ qui permet toujours l'emploi de la règle de Blasius.

Le calcul de la perte de charge en mètre par mètre aboutit alors à $\frac{\Delta z_C}{\ell} = 0{,}02$ sensiblement plus faible que ce que la règle simple donne.

Il est compréhensible, compte tenu des propriétés cinématiques des écoulements vues dans un chapitre antérieur, que la perte de charge soit fonction du débit volumique. Lorsque celui-ci croît, l'écoulement est plus turbulent, ce qui éloigne les propriétés de l'idéalité. La règle simple est en fait simpliste, mais commode !

---

a) Le débit volumique D_V est conservé (écoulement incompressible et stationnaire) et le rapport de sections est égal à 4, donc $v' = \frac{v}{4}$.

La loi de Bernoulli sans terme de pesanteur s'écrit :

$$P + \mu\frac{v^2}{2} = P' + \mu\frac{v'^2}{2},$$

ce qui aboutit à la variation de pression donnée par la relation de Bernoulli :

$$P - P' = \mu\frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{16} - 1\right) = -\frac{15}{16}\mu\frac{v^2}{2} = -\frac{15}{16}e_{c,v}.$$

La pression augmente.

b) Avec la relation de Bélanger, $P - P' = \mu\frac{v}{4}\left(\frac{v}{4} - v\right)$, car la conservation du débit a toujours sa validité (on parle de v' en aval de la zone morte).

La variation de pression s'écrit alors :

$$P - P' = -\frac{3}{8}\mu\frac{v^2}{2} = -\frac{3}{8}e_{c,v}.$$

c) L'écart relatif $\dfrac{\frac{3}{8} - \frac{15}{16}}{\frac{15}{16}} = -\,0{,}6$ est important : on commet 60 % d'erreur avec le modèle de Bernoulli.

d) La perte de charge exprime l'écart à la variation donnée par la formule de Bernoulli :

$$\Delta P_C = \left(P + \mu\frac{v^2}{2}\right) - \left(P' + \mu\frac{v'^2}{2}\right).$$

Les résultats précédents donnent :

$$\Delta P_C = -\frac{3}{8}\mu\frac{v^2}{2} + \mu\frac{v^2}{2} - \frac{1}{16}\mu\frac{v^2}{2} = \frac{9}{16}\mu\frac{v^2}{2}$$

Finalement, $\Delta P_C = \frac{9}{16}e_{c,v} > 0$: il s'agit bien d'une **perte** de charge.

Exercice (10) : Masse volumique du sang $\mu = 10^{-3}\ kg/m^3$ donnée comme 1 constante $\Rightarrow$ supposé incompressible ici.

a) Dans l'aorte, la relation entre le débit de volume et la vitesse débitante donne : $D_V = v \times (\pi a_0^2) \Rightarrow v = \frac{D_V}{\pi a_0^2} = \frac{6.10^{-3}/60}{\pi (10^{-2})^2}$

$$v = \frac{1}{\pi} \sim 0{,}32\ m.s^{-1}$$

b) Écoulement incompressible $\Rightarrow$ conservation du débit volumique.

$$N_a \times D_{V,a} = D_V = N_{a'} \times D_{V,a'}$$

donc : $N_a = \frac{10^{-4}}{2.10^{-6}} = \frac{1}{2.10^{-2}} = 50$

c) $N_a' = \frac{10^{-4}}{\pi (a_a')^2 \times 5.10^{-3}} = \frac{10^{-4}}{\pi (20.10^{-6})^2 \times 5.10^{-3}} = \frac{1}{50\pi(400).10^{-12}}$

$N_a' = \frac{1}{2\pi.10^{-8}} \simeq 16$ millions.

d) Estimation du nombre de Reynolds : $Re = \frac{2 \times 5\,10^{-3} \times 20.10^{-6}}{4.10^{-3}} \times 10^3$

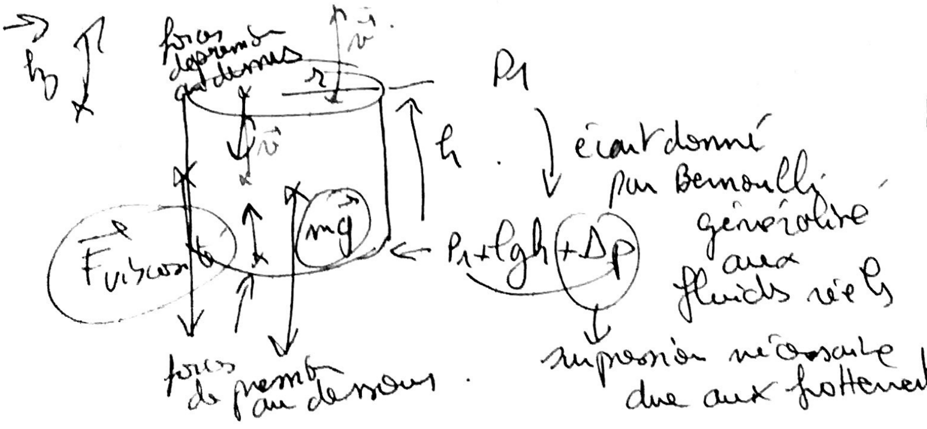
$Re \simeq 50.10^{-3} = 0{,}05 \ll 2300$

↑ Reynolds critique

Largement laminaire

(linéaire rampant $\Rightarrow$ modèle de Poiseuille).

Exercice (11) : On écrit le TRC (ou TRD ou PFD) sur 1 système constitué d'un tronçon cylindrique de fluide de rayon r et de hauteur h. Ce système ayant 1 mouvement rectiligne uniforme dans 1 référentiel galiléen, il est nécessairement pseudo-isolé c'est-à-dire que la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle.



pesanteur : $\vec P = m\vec g = \rho \times \pi r^2 h\, \vec g$

pressants : $\vec F_{pressants} = (\rho g h + \Delta p)\pi r^2\, \vec e_z$

viscosité : $\vec F_{visco} = +\eta \underbrace{\frac{\partial v}{\partial r}}_{<0} \times (2\pi r h)\, \vec e_z$

(uniformité sur la section latérale)

le TRC donne donc à l'équilibre :

$$-\rho \pi r^2 h g + (\rho g h + \Delta p)\pi r^2 + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) 2\pi r h = 0$$

ou bien : $$\Delta p \, \pi r^2 + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) 2\pi r h = 0$$

soit : $$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{-\Delta p \pi r^2}{\eta 2\pi r h} = \frac{-\Delta p}{2\eta h} \times r$$

on intègre entre $r = R$ (où $v = 0$) et r (avec $v(r)$) :

$$0 - v(r) = \frac{+\Delta p}{2\eta h} \times \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta p}{h} \times \frac{1}{4\eta}(R^2 - r^2)}$$

2°) $D_m = \rho D_v = \rho \times \iint_S \vec{v}(r) \cdot \vec{dS}$

avec $\vec{dS} = r\,dr\,d\theta\,\vec{e_z}$

$$D_m = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta h}(R^2 - r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$D_m = \frac{\rho \Delta p}{4\eta h} \times 2\pi \times \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]$$

$$\boxed{D_m = \frac{\rho \Delta p \pi R^4}{8\eta h}}$$ loi de Poiseuille sur le débit massique.

3°) a) $$\Delta p = \frac{8\eta h D_m}{\rho \pi R^4} = \frac{8 \times 4.10^{-3} \times 0{,}5 \times 5.10^{-2}}{10^3 \times \pi \times (4.10^{-3})^4}$$

A.N : $\Delta p = 995\,\text{Pa} \sim 1000\,\text{Pa}$ pour 50 cm d'artère

(1/100 de bar soit 1 perte de charge de 10 cm de colonne d'eau)

b) R divisé par 2 $\Rightarrow$ débit divisé par 16 !

c/ $$Re = \frac{\rho \times U \times 2R}{\eta} = \frac{D_m \times 2\cancel{R}}{\eta \pi R^{\cancel{2}}} = \frac{2 D_m}{\pi \eta R}$$

vitesse débitante

$U = \frac{D_V}{\pi R^2}$ $U = \frac{D_m}{\rho \pi R^2}$

Pourquoi diable l'écrire fonction de Δp ici ?

A.N. $Re = \frac{2 \times 5.10^{-2}}{\pi \times 4.10^{-3} \times 4.10^{-3}} \simeq 1990$

encore tout juste laminaire.