UV Traitement du signal

Cours 2 et 3

Représentation fréquentielle des signaux

Transformation de Fourier

ASI 3

Contenu du cours

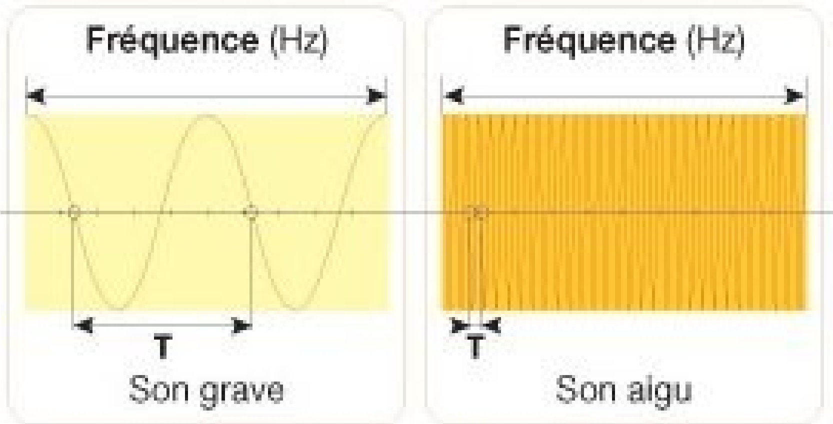
- Introduction
  - Notion de fréquence
  - Pourquoi la représentation fréquentielle ?
- Décomposition en série de Fourier
  - Définition
  - Quelques propriétés
- Transformée de Fourier des signaux à énergie finie
  - Définition, conditions d'existence
  - Propriétés de la TF
  - Notion de densité spectrale d'énergie
- TF au sens des distributions
  - Définition
  - Transformée de l'impulsion de Dirac
  - Transformée de Fourier des signaux périodiques

Introduction

❑ Notion de fréquence

- Qu'est ce qu'une fréquence ?
  - La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée
  - C'est donc l'inverse de la période f = 1/T
  - La fréquence est mesurée en hertz (= 1/seconde)

- Dans un son
  - Sons graves = basses fréquences
  - Sons aigus = hautes fréquences



- => La fréquence permet de caractériser un certain type d'information

Introduction

Notion de fréquence

- Dans une image
  - Surfaces = basses fréquences
  - Contours = hautes fréquences

- Dans une onde lumineuse
  - Les couleurs dépendent de la longeur d'onde

    = la fréquence

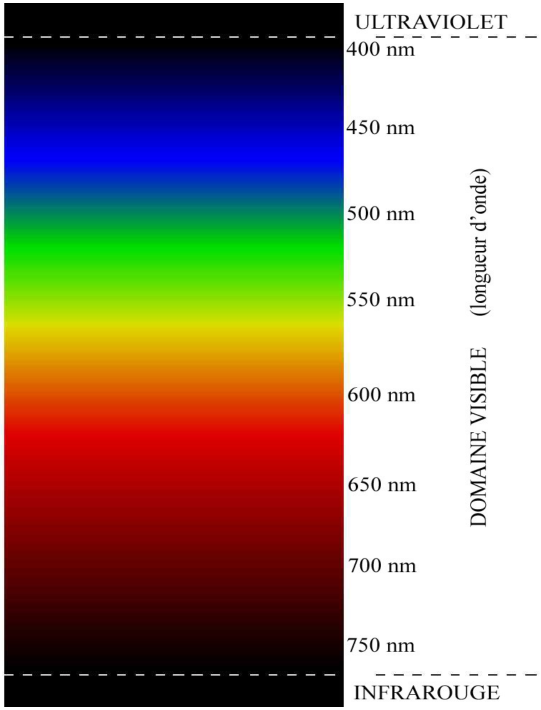
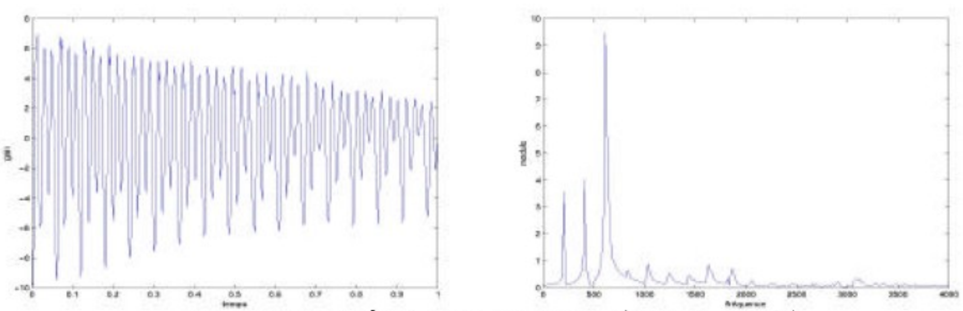


Image provenant de http://web.ujf-grenoble.fr/ujf/

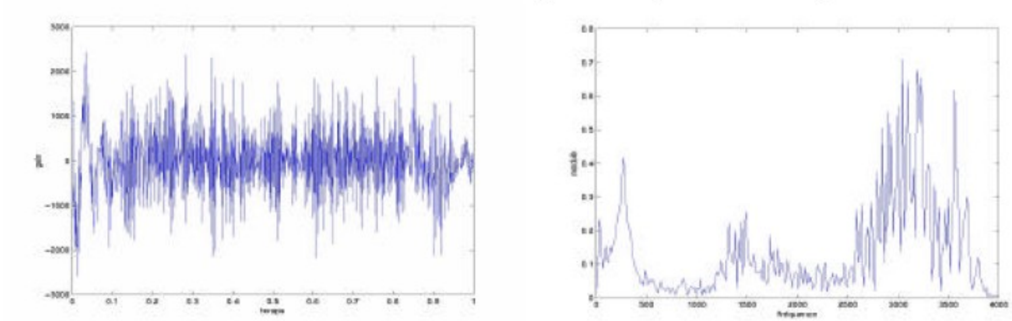
Introduction

- La notion de fréquence est également présente dans :
  - La voix, un téléphone portable, la radio, l'ADSL, les horaires de passage d'un train, la musique electronique, un equaliser, un radar, etc.
- Toute ces applications véhiculent ou analysent le <u>contenu fréquentiel</u> de l'information
  - Une représentation fréquentielle de l'information est souvent + facile à interpréter que la représentation temporelle

Rep. temporelle　　　　　　Rep. frequentielle



un son voisé et son spectre (son " eu ")



un son non voisé et son spectre (son " ch ")

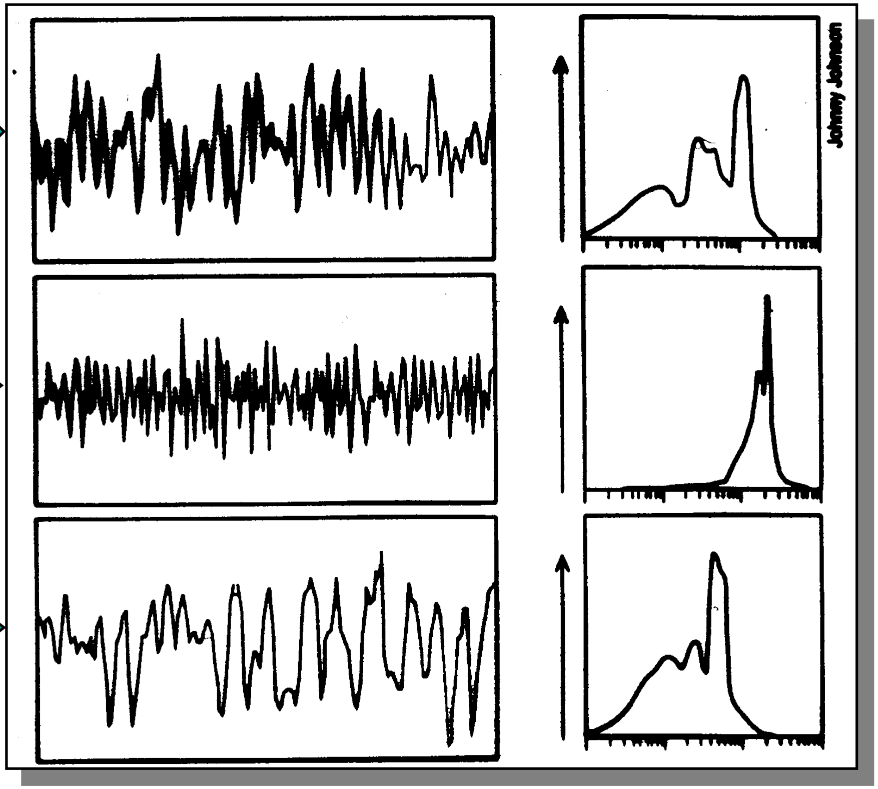
Introduction

- Autre exemple : Analyse d'ondes cérébrales

Ondes Alpha: engendrées lorsque le sujet change son niveau d'attention (f modérées, amplitude importante)

Ondes Bêta: produites par une activité mentale intense (fréquences. élevées, faibles amplitudes)

Ondes Thêta: accompagnent des sentiments de stress émotionnel (fréquences faibles)



Question : Comment obtenir la représentation fréquentielle d'un signal ?

Vers une représentation fréquentielle ...

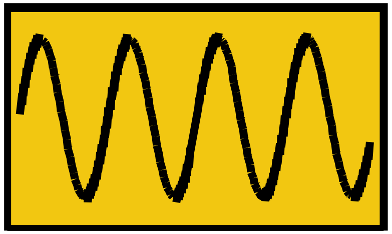
- La notion de fréquence est intéressante, mais comment connaitre les fréquences que contient un signal ?

- Exemple d'un signal sinusoïdal :

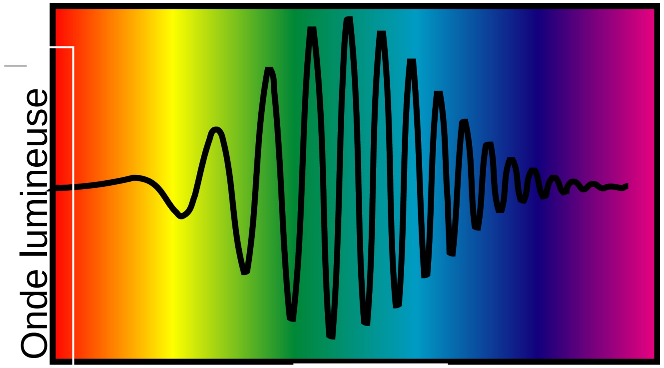
$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\varphi) \longrightarrow$$

f_0 est la fréquence du signal

=> Pour un cosinus, c'est facile ...



- Exemple d'une onde lumineuse :



Fréquences variables au cours du temps (du rouge au violet). Comment caractériser les informations fréquentielles contenues dans ce signal ?

=> ici, c'est plus difficile ...

idem pour un signal porte, une exponentielle, etc.

➡ Analyse fréquentielle des signaux

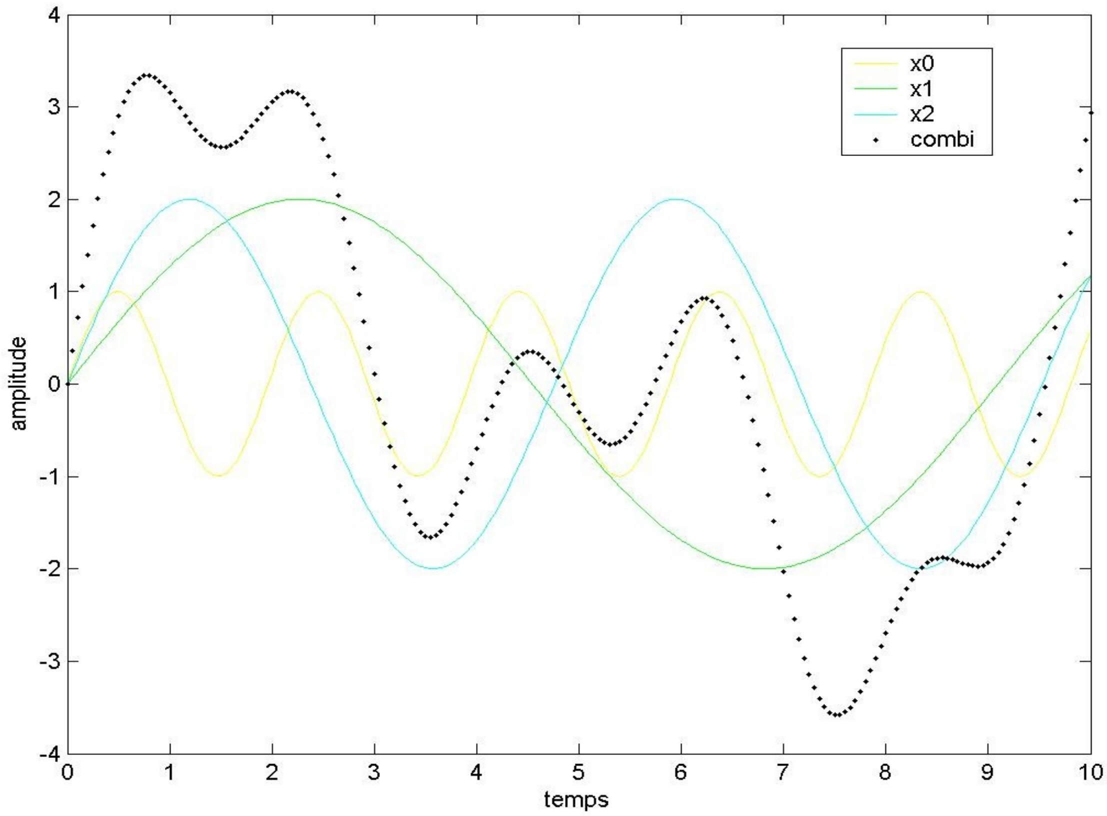
Vers une représentation fréquentielle ...

❑ Petite expérience : mélangeons quelques sinus ...

```
% Code matlab
f0 = 0.51;  A0 = 1;
f1 = 0.11;  A1 = 2;
f2 = 0.21;  A2 = 2;

% déclaration de signaux de base
x0 = A0*sin(2*pi*f0*t);
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x2 = A2*sin(2*pi*f2*t);

% affichage des signaux + combinaison
plot(t, x0, 'y'); hold on;
plot(t, x1, 'g');
plot(t, x2, 'c');
plot(t, x0+x1+x2, 'k.');
```



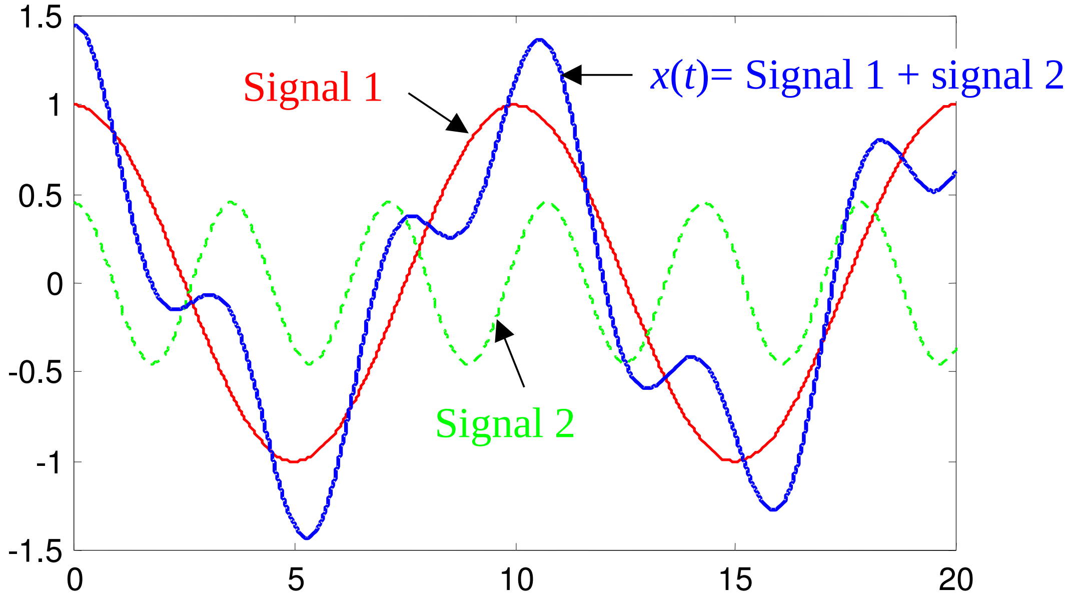
- Il est donc possible d'obtenir des signaux périodiques complexes par une simple combinaison linéaire de signaux élémentaires

- C'est le principe inverse de la décomposition en série de Fourier

Décomposition en Série de Fourier

- Principe :

La Décomposition en Série de Fourrier consiste à exprimer un signal périodique comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux



• Sous forme de signaux sinusoïdaux, les fréquences d'un signal apparaissent naturellement.

• Pour les signaux périodiques, la décomposition en Série de Fourier (DSF) constitue le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle.

• Pour les signaux non périodiques, il s'agit de la Transformée de Fourier (TF).

Décomposition en Série de Fourier

Principe

Exprimer un signal $x(t)$ de période T comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de $F = \frac{1}{T}$, dite fréquence fondamentale

Définition de la DSF : forme trigonométrique

Un signal $x(t)$ de période T, s'exprime sous certaines conditions comme

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

=> Somme de sinus et de cosinus : facile à interpréter

Coefficients de la série

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

(avec $n \geq 1$)

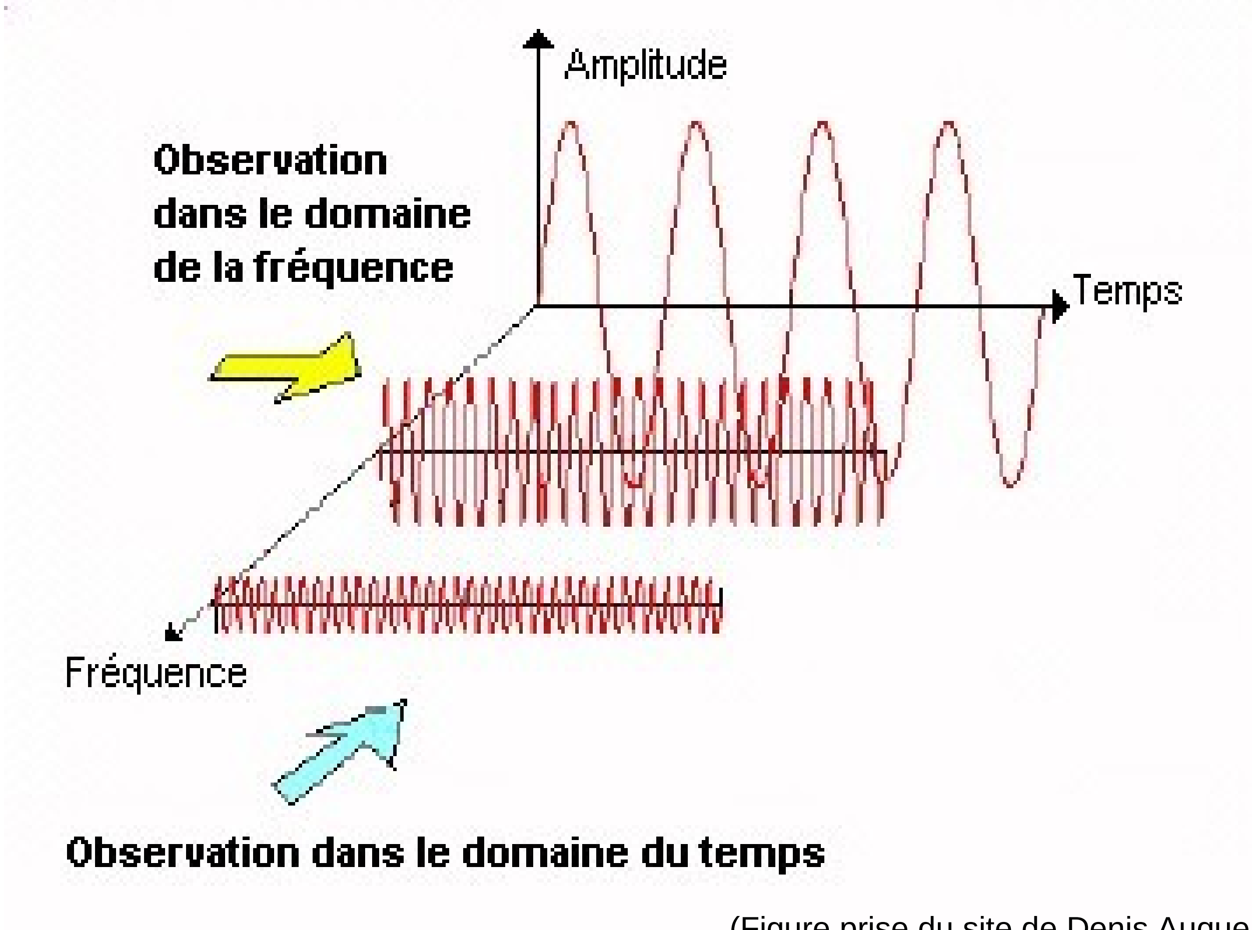
a_0 : valeur moyenne du signal ou composante continue

Décomposition en Série de Fourier

- Définition de la DSF : forme trigonométrique

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

- Interprétation :



(Figure prise du site de Denis Auquebon)

Décomposition en Série de Fourier

Définition de la DSF : forme complexe

Rappels : formules de moivre et d'Euler

- $\exp(-j\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$
- $\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)}{2}$$

$$\sin(\theta) = j\,\frac{\exp(-j\theta) - \exp(j\theta)}{2}$$

Application à la DSF

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - jb_n)\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) + (a_n + jb_n)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Posons la relation entre les coefficients

- $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2} \quad si \;\; n > 0$
- $c_0 = a_0$
- $c_n = \dfrac{a_n + jb_n}{2} \quad si \;\; n < 0$

On a alors $\displaystyle x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$

Où $\displaystyle c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

Les "c_n" sont appelés les coefficients de Fourier de $x(t)$. Ils forment la représentation fréquentielle de $x(t)$.

Notation $\quad x(t) \rightarrow \{c_n\}_{n\in Z}$

Décomposition en Série de Fourier

Remarques

- Posons $F = \frac{1}{T}$. Les deux formes de la DSF s'écrivent alors
  - $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nFt) + b_n \sin(2\pi nFt)$
  - $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(j2\pi nFt)$
  - F est la fréquence fondamentale
  - $f = nF$ sont les harmoniques
- Les coefficients c_n sont complexes en général $c_n = |c_n| \exp(j \arg(c_n))$
- Dans la forme complexe de la DSF, interviennent des fréquences négatives et positives qui sont introduites par commodité de représentation

Quelques propriétés

- Si le signal $x(t)$ est réel, $c_{-n} = c_n^*$: les coefficients sont nécessairement complexes conjugués pour restituer x réel car $\exp(j2\pi nFt)$ est complexe
- Si le signal $x(t)$ est réel et pair, $c_{-n} = c_n \Rightarrow b_n = 0$
- Si le signal $x(t)$ est réel et impair, $c_{-n} = -c_n \Rightarrow a_n = 0$
- Théorème de Parseval : la puissance du signal périodique est $P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

Décomposition en Série de Fourier

- Remarque : Pourquoi les nombres complexes ?

  - Quand on a des phénomènes périodiques, les complexes sont plus faciles à manipuler.
  - Exemple : analyse de circuits électriques RLC :

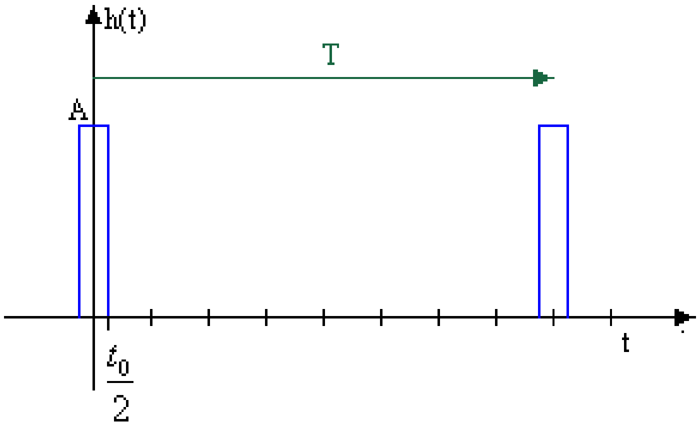
	résistance	inductance	capacité
En réels :	$v = Ri$	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
En complexes :	$Z = R$	$Z = j\,w\,L$	$Z = -j/w\,C$

avec $V = ZI$

  - => remplacement d'équations différentielles par des équations algébriques

Exemple de DSF

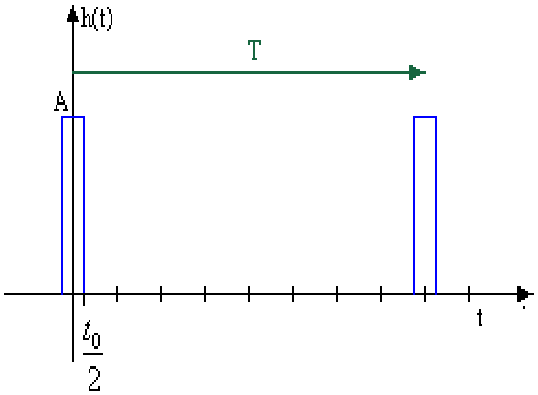
Soit $h(t)$ de période T tel que sur l'intervalle [0, T] :



Décomposition en Série de Fourier de $h(t)$

Exemple de DSF

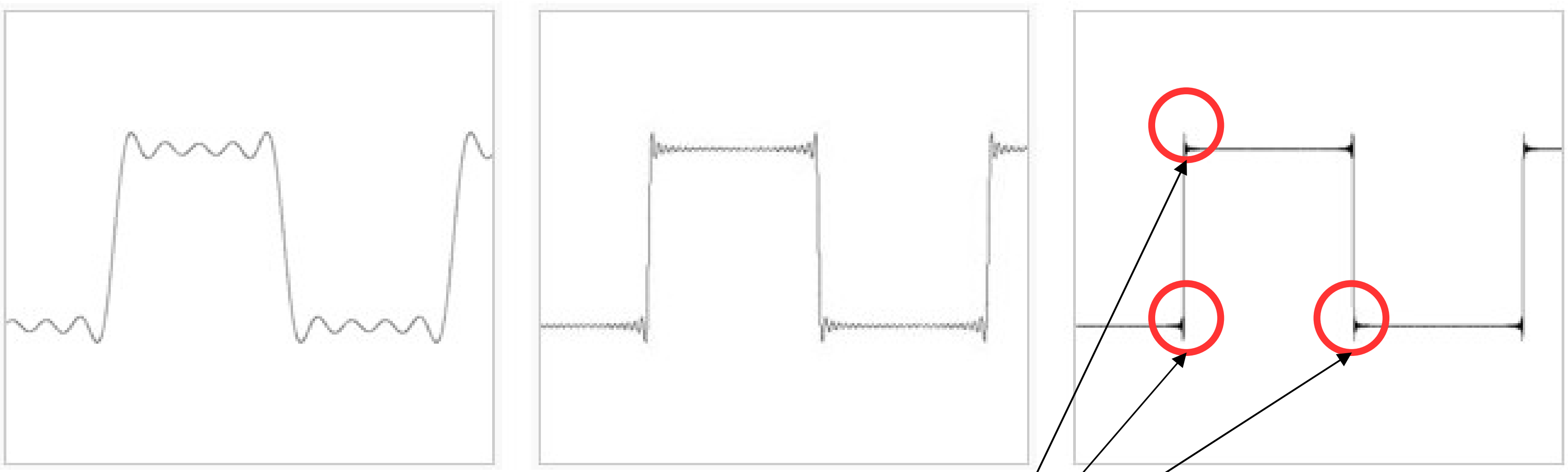
On a trouvé que : $c_n = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n t_0}{T}\right)$



Donc la série de Fourier de $h(t)$ s'écrit :

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n t_0}{T}\right) \exp\left(\frac{j 2\pi n t}{T}\right)$$

Approximation du signal créneau par la série de Fourier en limitant *n* à différentes valeurs :

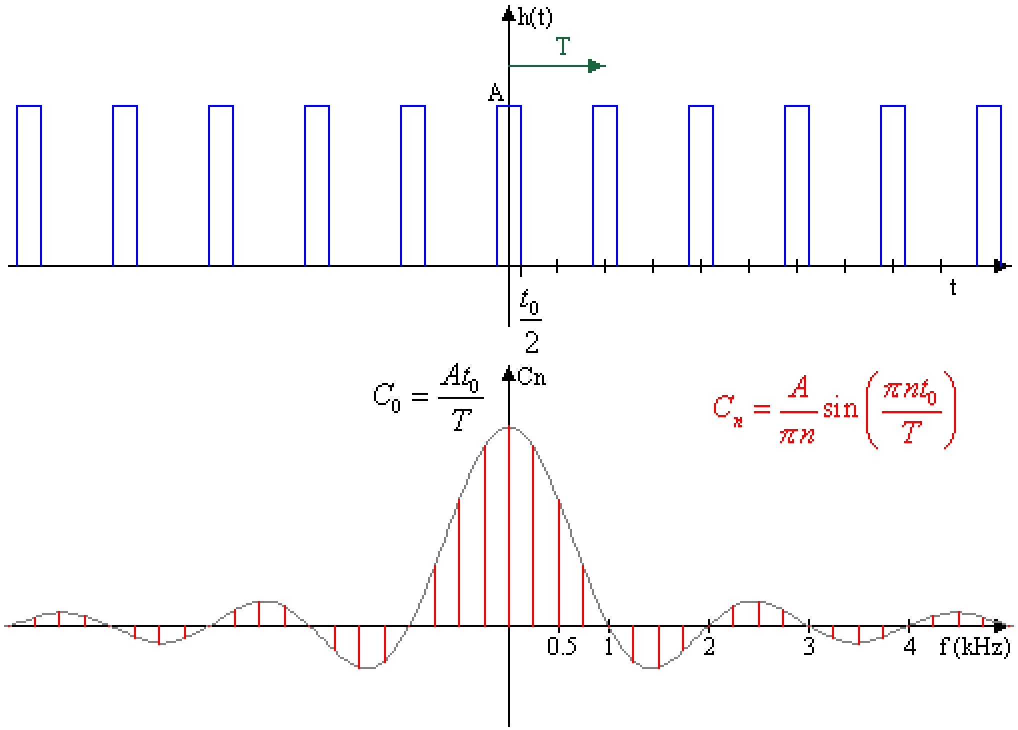


n=10 n=50 n=250

Phénomène de Gibbs = effet de bord aux discontinuités

Exemple de DSF

Représentation des C_n: $c_n = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n t_0}{T}\right)$ $c_0 = \frac{A t_0}{T}$

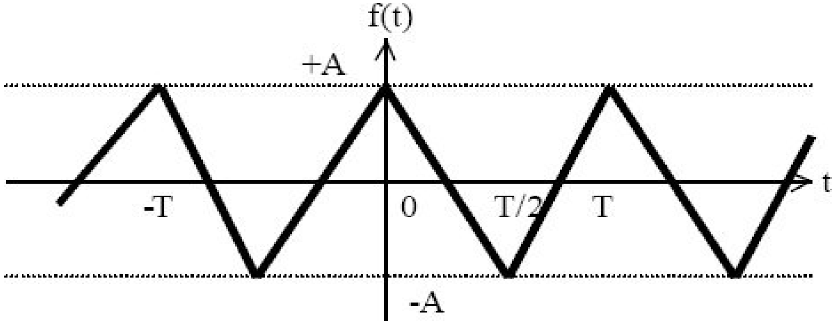


Spectre de raie : les C_n indiquent quelles sont les fréquences présentes dans le signal

Autre exemple : essayer avec : x(t) = 1 si t<T/2; 0 si t>T/2

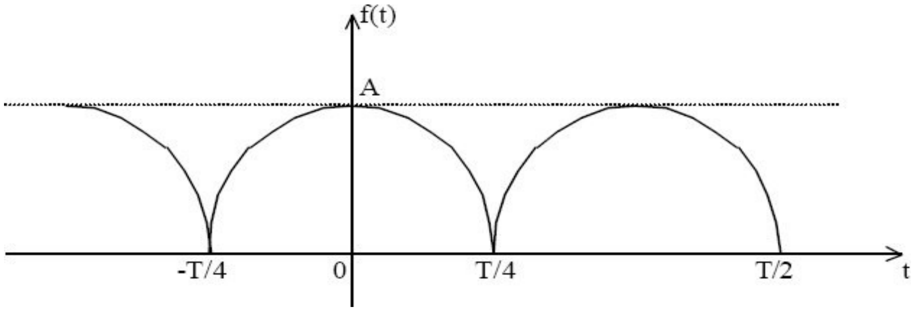
Autres exemples

Exemples :



$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t + \ldots\right]$$

Attention à l'écriture alternative avec la pulsation $\omega = 2\pi f$



$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3.5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5.7}\cos 6\omega t + \ldots\right]$$

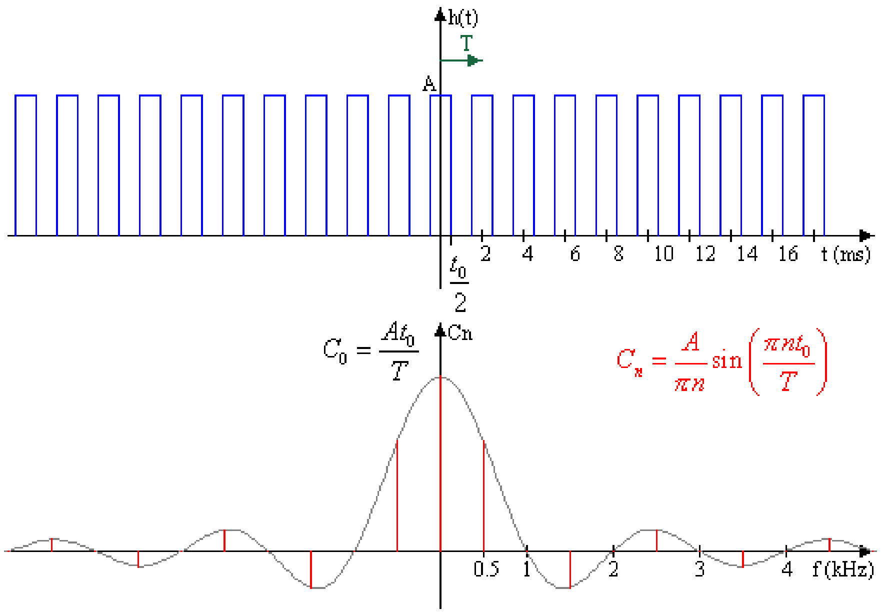
OK pour les signaux périodiques ...

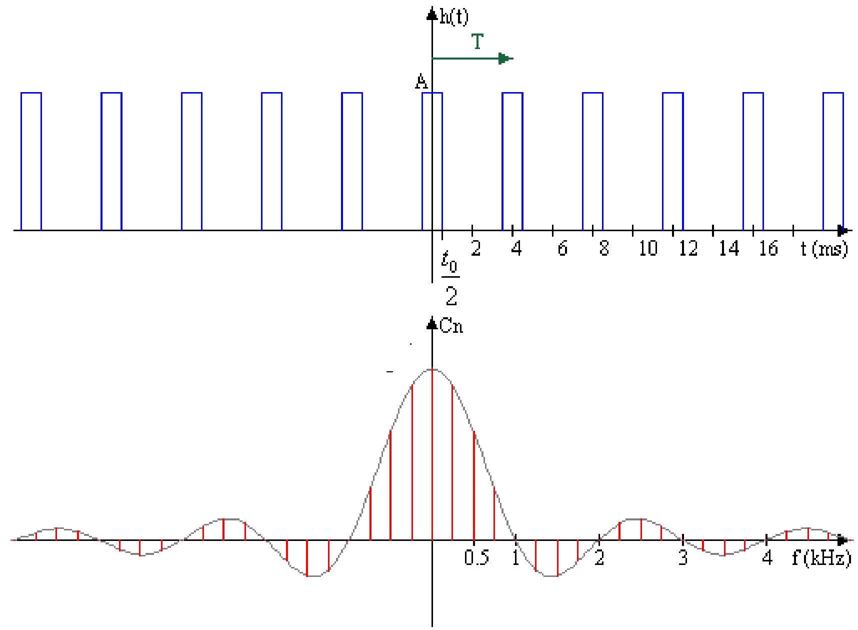
Et pour les signaux non périodiques ?

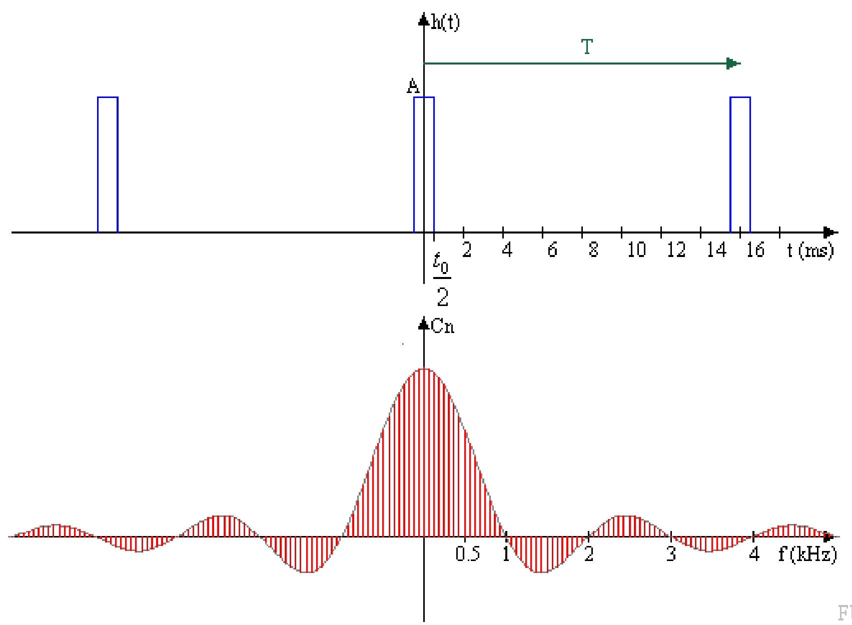
- La DSF n'est applicable qu'aux signaux périodiques
- Comment faire pour les signaux non périodiques ?
- Considérons que la période T est infinie (donc F tend vers 0)
- Et comme les harmoniques sont des multiples de F ...
- ... l'écart entre les raies du spectre va donc devenir infiniment petit
- On tend alors vers une représentation fréquentielle continue

C'est la Transformée de Fourier, qui peut être vue comme une généralisation des séries de Fourier aux signaux non périodiques

Spectres de raie pour différentes périodes







Plus la période augmente, plus l'écart entre les Cn diminue ...

Transformée de Fourier

Définition de la TF

Soit signal $x(t)$ un signal non périodique.
La TF de $x(t)$, si elle existe, est

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt$$

- $X(f)$ indique la "quantité" de fréquence f présente dans le signal $x(t)$ sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$. $X(f)$ donne des informations fréquentielles sur $x(t)$.

- $X(f)$: fonction complexe (de la variable réelle f) qui admet
  - Un spectre d'amplitude $A_f = |X(f)|$
  - un spectre de phase $\phi(f) = \arg(X(f))$

Transformée de Fourier inverse

Si elle existe, la TF inverse est définie par

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{j2\pi ft}\,df$$

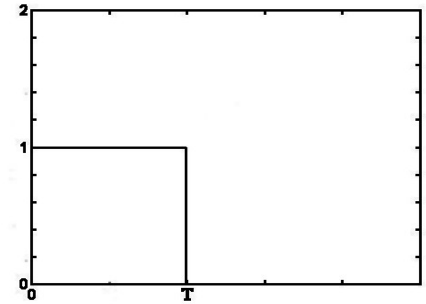
Notations

- $X(f) = \mathcal{F}(x(t))$
- $x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(f))$

X(f) et x(t) sont deux descriptions équivalentes *(temporelle ou fréquentielle)* du même signal. On écrit : *x(t)* $\leftrightarrow$ *X(f)*

Exemple de calcul de TF

x(t)=1 pour 0<t<T, 0 sinon.



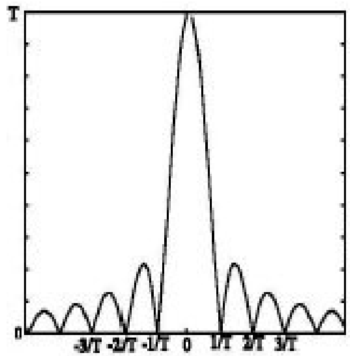
$$X(f)=\int_0^T 1.e^{-j2\pi ft}\,dt=-\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fT}-1\right]$$

$$X(f)=\frac{e^{-j\pi fT}}{j2\pi f}.2\mathrm{j}.\sin(\pi fT) \qquad X(f)=e^{-j\pi fT}\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

$$\boxed{X(f)=Te^{-j\pi fT}\,\mathbf{sin}\,c(\pi fT)}$$

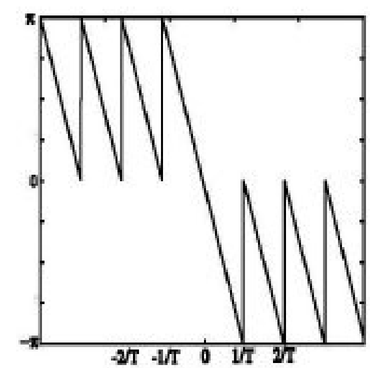
Amplitude spectrale

$$|X(f)|=\left|\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}\right|$$



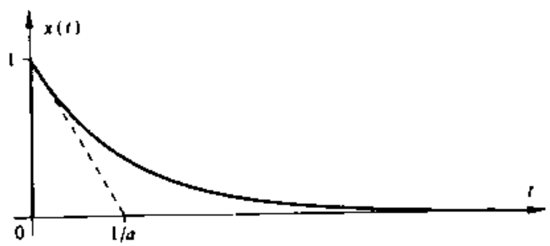
Phase Spectrale

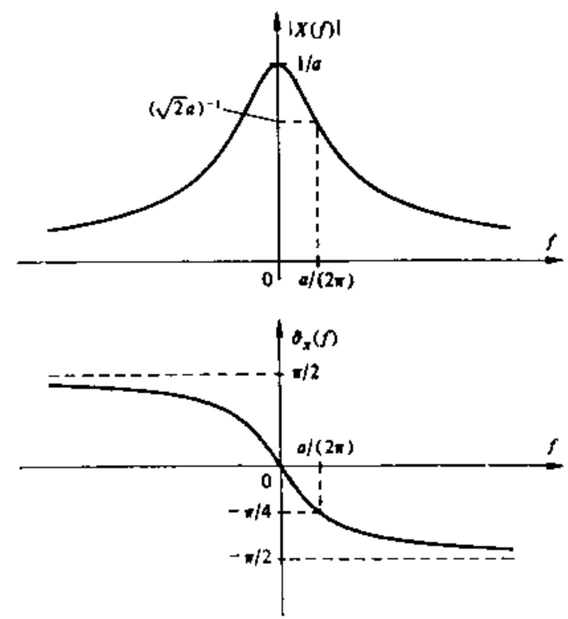
$$Arg[X(f)]=-\pi fT+\begin{cases}\pi & \text{si } \dfrac{\sin(\pi fT)}{\pi f}<0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



Exemple de calcul de TF

A vous de jouer avec $x(t) = \exp(-at)\,\Gamma(t)$ (a>1)





Conditions d'existence de la TF

Questions

Quand est-ce que la TF de $g(t)$ existe ?

Quand est-ce que $g(t)$ = $g_f(t)$? avec $g_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{-j2\pi fu} e^{j2\pi ft}\, du df$

Conditions d'existence

Il faut que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < \infty$ et $g(t)$ continue par morceaux et admet un nombre de discontinuités et d'extrema fini

OU

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$$

Condition d'égalité

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - g_f(t)|^2\, dt = 0$

Si $g(t)$ satisfait à la condition d'existence de la TF alors $g(t)$) et $g_f(t)$) sont égaux presque partout sauf aux discontinuités

Cas de certains signaux ne respectant pas ces conditions

Si ce signal définit une distribution (exemple Impulsion de Dirac),

on peut définir une transformée de Fourier

Propriétés de la TF

- Linéarité

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

- Décalage temporel

$$x(t - t_o) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_o} X(f)$$

L'amplitude A_f ne change pas. La phase est modifié de $-j2\pi\ f t_0$

- Décalage fréquentiel

$$e^{j2\pi f_o t} x(t) \leftrightarrow X(f - f_o)$$

$x(at) arrow$

- Changement d'échelle

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \qquad a \in {}^*$$

La contraction dans le domaine temporel ($a \geq 1$) correspond à la dilatation dans le domaine fréquentiel et inversement

- Dérivation

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f\ X(f)$$

- Intégration

Soit $P[x(t)]$ la primitive de $x(t)$ $\quad P[x(t)] \leftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi f} X(f)$

!

La TF et la TF inverse ne sont pas toujours définies

Propriétés de la TF

- Inversion temporelle

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

- Conjugaison complexe

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

- Symétrie dans le cas de signaux réels

Si $x(t)$ est un signal réel alors $X(f)=X(-f)$

donc $|X(f)|=|X(-f)|$ et $\varphi(f)=-\varphi(-f)$

Le spectre d'amplitude est une fonction paire et le spectre d'argument est impair

- Symétrie dans le cas de signaux imaginaires purs

Si $x(t)$ est un signal imaginaire pur alors $X(f)=-X(-f)$

- Parité

  - Si $x(t)$ est un signal réel et pair alors $X(f)$ est réelle et paire
  - Si $x(t)$ est un signal réel et impair alors $X(f)$ est imaginaire pure et impaire

Exemple d'application des propriétés de la TF

Décalage fréquentiel

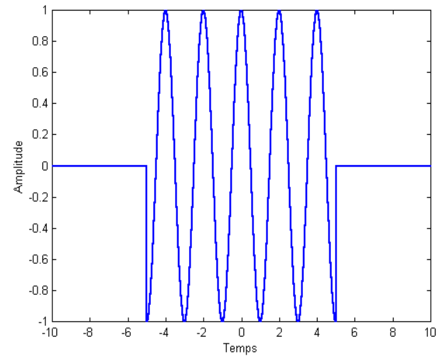
$$x(t) = \prod(t) \cdot e^{j2\pi f_o t}$$

or $\quad F\left(\prod(t)\right) = T\,\mathbf{sinc}(\pi f T)$

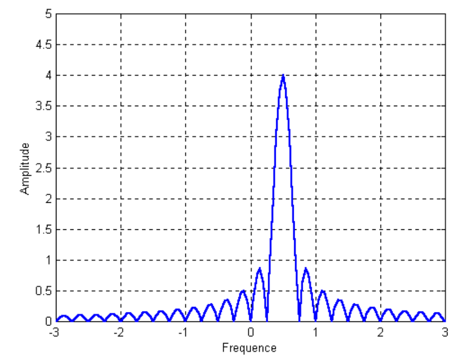
Par la propriété de décalage
en fréquence de la TF

$$X(f) = T\,\mathbf{sinc}(\pi (f - f_o) T)$$

Partie Réelle de x

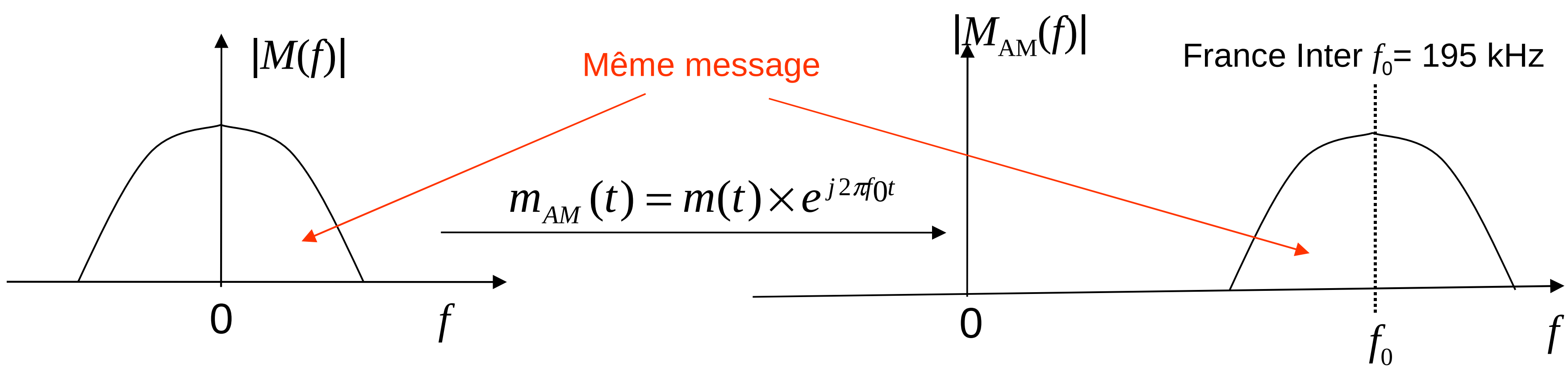


Module de $X(f)$



Ce résultat est fondamental en modulation de signaux

Les radios Longues Ondes utilisent ce principe pour transmettre un message m informatif dont le contenu fréquentiel est compris entre 0Hz et 20kHz



Dualité de la TF

Les définitions symétriques de la TF et de la TF inverse permettent de mettre en avant une propriété de la TF appelée Dualité de la TF.

Soit $x(t)$, une fonction quelconque dont la TF est bien définie

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{et} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

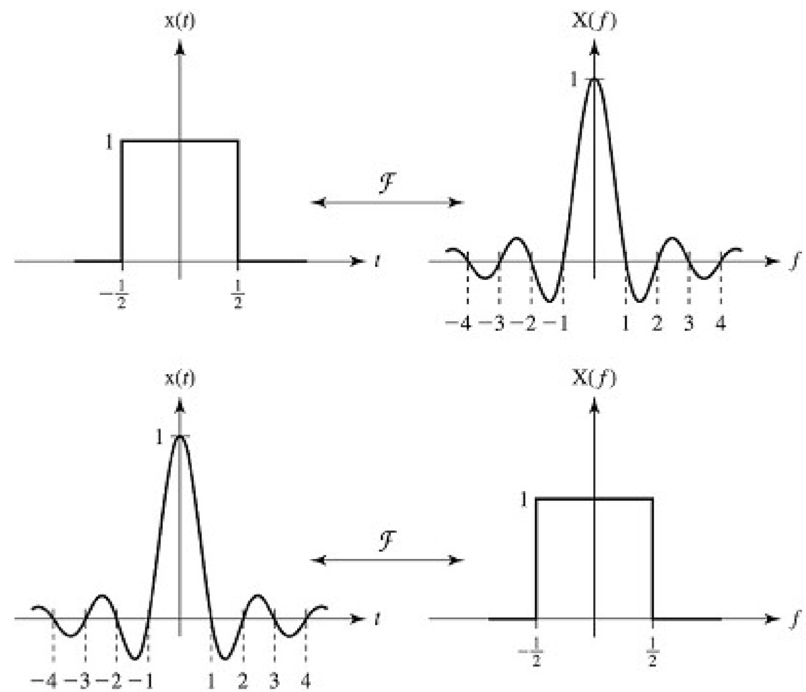
On a donc $$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df$$

En intervertissant les variables temporelles et fréquentielles, on obtient :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi tf} dt = \mathrm{F}\left(X(t)\right)$$

Donc si $x(t) \xrightarrow{\mathrm{F}} X(f)$

alors $X(t) \xrightarrow{\mathrm{F}} x(-f)$



TF et énergie des signaux

Relation de Parseval

Loi de conservation de l'énergie

Dans le cas où les intégrales existent, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

La Transformée de Fourier conserve l'énergie du signal

Application

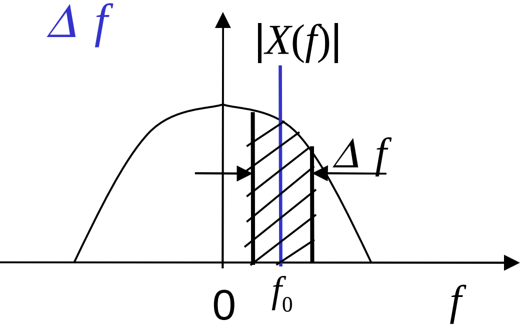
Montrer que l' énergie de $F_o \operatorname{sinc}\left(\pi t F_o\right)$ vaut F_o

Densité spectrale d'énergie

Comme la TF conserve l'énergie, on peut définir une notion d'énergie par unité de fréquence, la densité spectrale d'énergie (DSE)

$$S_{xx}(f) = \left|X(f)\right|^2$$

Energie dans une bande de fréquence Δf



$$E_{\Delta f} = \int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} S_{xx}(f)\, df$$

Energie totale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

Cas des signaux à puissance moyenne finie

Ce sont des signaux à énergie infinie. On définit alors une densité spectrale de puissance

$$P_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T} \qquad X_T(f) = \mathrm{F}\left[x_T(t)\right] \qquad x_T(t) = x(t)\times\Pi_T(t)$$

$x_T(t)$ est le signal $x(t)$ prélevé sur une fenêtre de largeur T

La densité spectrale de puissance est la TF de la fonction d'autocorrélation

Théorème de Wiener-Kintchine

La densité spectrale $S_{xx}(f)$ de $x(t)$ est la TF de sa fonction d'autocorrélation.

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

Ce théorème est valable aussi pour les signaux aléatoires

Théorème de Bernstein

Ce théorème permet de relier le support en fréquence d'un signal et la variation de ce signal

Un signal est dit "à support borné en fréquence" si $\forall \left| f \right| > f_{\max},\ X(f) = 0$

Énoncé

Si $x(t)$ est

① borné càd $\forall\, t, \quad \left| x(t) \right| < M$

② à support borné en fréquence

Alors $\left| \dfrac{dx(t)}{dt} \right| \leq 2\pi f_{\max} M$ et $\left| \dfrac{d^p x(t)}{dt^p} \right| \leq \left(2\pi f_{\max} \right)^p M$

Interprétation

Les variations d'un signal sont liées à la dérivée de ce signal. Comme cette dérivée est bornée, le signal ne peut pas varier arbitrairement vite.

Conséquence :
Un signal présentant des discontinuités est un signal à support en fréquence non borné.

TF d'une distribution

Question

Comment faire quand la TF d'un signal n'est pas définie ?
⇨ on considère si possible le signal comme une distribution.

Définition

La transformée de Fourier d'une distribution D est une distribution notée F $[D]$ telle que pour la fonction $\varphi\,(t)$ indéfiniment dérivable et à support borné

$$\langle F[D],\phi\rangle = \langle D, F[\phi]\rangle$$

Application : quelle est la TF d'une impulsion de Dirac ?

Par définition : $\langle F(D_\delta),\varphi\rangle = \langle D_\delta, F(\varphi)\rangle = F(\varphi)(0)$

or $\quad F(\varphi) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$

donc $\quad F(\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1} * \varphi(t)\, dt = \langle D_1, \varphi\rangle$

$\longrightarrow$ $\boxed{F(D_\delta) = D_1}$ La TF de l'impulsion de Dirac est une constante

En notation « fonction » : $F(\delta) = 1$

De même, grâce à la propriété de décalage temporel : $F[\delta(t-a)] = e^{-j2\pi af}$

Applications de la TF d'une distribution

Question : Comment faire lorsque l'intégrale n'est pas définie car divergente ?
Ex. : 1, cos, exp, etc.
⇨ application de la théorie des distributions

Quelle est la TF de la distribution associée à 1 ?

$$\langle F(D_1),\varphi\rangle=\langle D_1, F(\varphi)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\varphi)\,dt=\underbrace{\left.\int_{-\infty}^{+\infty}F(\varphi)e^{j2\pi f_0 t}\,dt\right|_{t=0}}_{\text{TF inverse de } F(\varphi) \text{ prise en t=0}}=F^{-1}(F(\varphi))\big|_{t=0}=\varphi(0)=\langle D_\delta,\varphi\rangle$$

Donc finalement : $\boxed{F(D_1)=D_\delta}$

Notation "fonction" : $F(1)=\delta$

résultat sans surprise en vertu du principe de dualité !

D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\,dt=\delta(f)$

TF d'un signal sinusoïdal

$$\cos(2\pi f_0 t)=\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \longrightarrow F\left[\cos(2\pi f_0 t)\right]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f+f_0)t}\,dt$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt$ est la TF de $1\cdot e^{j2\pi f_0 t}\leftrightarrow\delta(f-f_0)$ (décalage fréquentiel)

$$F\left[\cos(2\pi f_0 t)\right]=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

$$F\left[\sin(2\pi f_0 t)\right]=\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$$

Une raie en f0 et une autre en -f0

TF d'un signal périodique

Décomposition en série de Fourier

Toute fonction périodique $f(t)$ de période T peut s'écrire comme une somme infinie de cos et sin.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Avec

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

La TF d'un signal périodique est divergente, mais on peut définir une TF au sens des distributions en utilisant la décomposition en Série de Fourier.

En utilisant la propriété de linéarité de la TF on obtient :

$$F[f(t)] = a_0\delta(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n - jb_n}{2}\delta(f - nF) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n + jb_n}{2}\delta(f + nF)$$

Remarque

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) \xrightarrow[\text{linéarité de la TF}]{\text{propriété de}} F[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\delta(f - nF)$$

$$c_0 = a_0$$

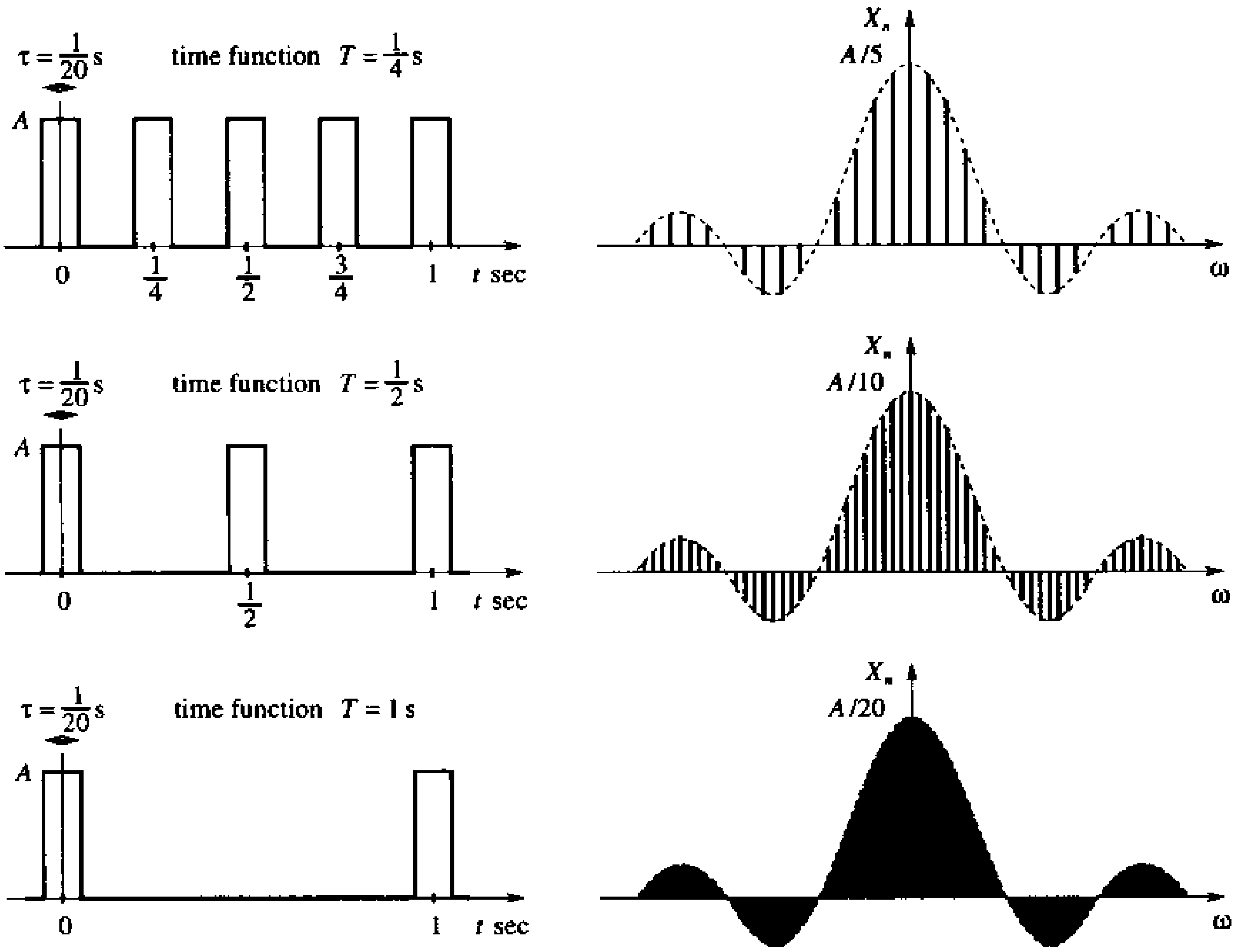
$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad n > 0$$

$$c_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad n < 0$$

Le résultat correspond à un spectre de raies (non continu)

Conclusion : On retrouve bien le résultat de la DSF;
la TF est bien une généralisation de la DSF

TF d'un signal périodique



Idem DSF

TF d'un Peigne de Dirac

Un peigne de Dirac s'écrit $\text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

Comme le peigne est périodique, il admet une décomposition en Série de Fourier $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(jn\frac{2\pi}{T}t)$

avec $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \text{Ш}_T(t)\exp(-j2\pi\frac{n}{T}t)dt \longrightarrow c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\exp(-j2\pi\frac{n}{T}t)dt$

$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\,dt$ D'où $c_n = \frac{1}{T}$

Donc $\text{Ш}_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi\frac{n}{T}t)$

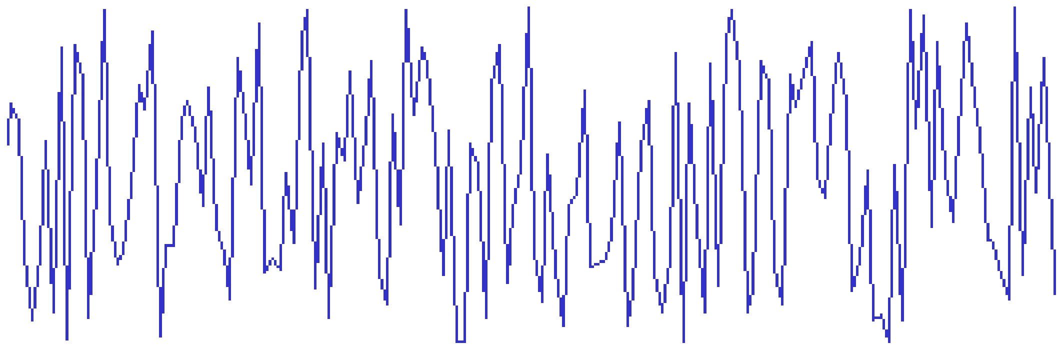
et $\mathcal{F}[\text{Ш}_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left[\exp(j2\pi\frac{n}{T}t)\right]$ or $\mathcal{F}\left[\exp(j2\pi f\frac{n}{To}t)\right] = \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

d'où $\mathcal{F}[\text{Ш}_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

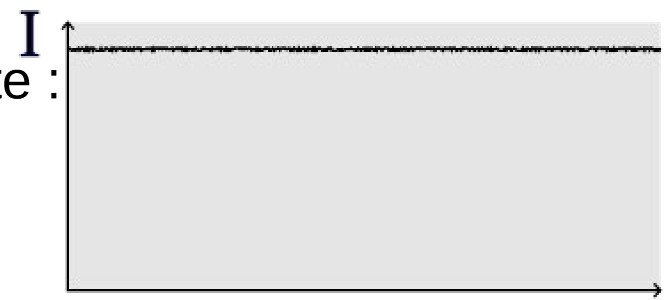
$\mathcal{F}[\text{Ш}_T(t)] = F\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF)$

La TF d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac

Qu'est ce qu'un bruit blanc ?



- Un bruit blanc est un signal aléatoire qui contient toutes les fréquences
  - Sa représentation fréquentielle est quasi plate :
    (SA -> densité spectrale)



Densité spectrale

(= TF de l'autocorrelation)

  - Pour un signal sonore,
    ceci correspond à un « souffle »
  - Remarque : théoriquement, un tel signal ne peut exister puisque son énergie serait infinie ...

TF Usuelles

distributions

1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
e^{iat}	$\delta(f - \frac{a}{2\pi})$
$\cos(at)$	$\frac{\delta(f-\frac{a}{2\pi})+\delta(f+\frac{a}{2\pi})}{2}$
$\sin(at)$	$i\frac{\delta(f+\frac{a}{2\pi})-\delta(f-\frac{a}{2\pi})}{2}$
t^n	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta^{(n)}(f)$
$\frac{1}{t}$	$-i\pi \cdot \operatorname{sgn}(f)$
$\frac{1}{t^n}$	$-i\pi \frac{(-i2\pi f)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn}(f)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{i\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\pi f} + \delta(f)\right)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + i2\pi f}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

fonctions

$\operatorname{rect}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\operatorname{sinc}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\operatorname{sinc}^2(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot \operatorname{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\operatorname{tri}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{a}\right)$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{(\pi f)^2}{\alpha}}$
$e^{iat^2} = e^{-\alpha t^2}\big\rvert_{\alpha=-ia}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi^2 f^2}{a} - \frac{\pi}{4}\right)}$
$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\pi^2 f^2}{a} - \frac{\pi}{4}\right)$

Fourier's Song :)

by Dr Time and Brother Frequency

Integrate your function times a complex exponential
It's really not so hard you can do it with your pencil
And when you're done with this calculation
You've got a brand new function - the Fourier Transformation
What a prism does to sunlight, what the ear does to sound
Fourier does to signals, it's the coolest trick around
Now filtering is easy, you don't need to convolve
All you do is multiply in order to solve.

From time into frequency - from frequency to time

Every operation in the time domain
Has a Fourier analog - that's what I claim
Think of a delay, a simple shift in time
It becomes a phase rotation - now that's truly sublime!
And to differentiate, here's a simple trick
Just multiply by J omega, ain't that slick?
Integration is the inverse, what you gonna do?
Divide instead of multiply - you can do it too.

From time into frequency - from frequency to time

etc ...

La suite + l'interprétation sur http://www.jmlg.org/lyrics/Fouriers_Song.htm