Notions et contenus	Capacités exigibles
Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur.	Utiliser le vocabulaire de base de la métrologie : mesurage, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire, erreur systématique. Identifier les sources d'erreurs lors d'une mesure.
Notion d'incertitude, incertitude-type. Évaluation d'une incertitude-type. Incertitude-type composée. Incertitude élargie.	Savoir que l'incertitude est un paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui peuvent être raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée. Procéder à l'évaluation de type A de l'incertitude-type (incertitude de répétabilité). Procéder à l'évaluation de type B de l'incertitude-type dans des cas simples (instruments gradués) ou à l'aide de données fournies par le constructeur (résistance, multimètre, oscilloscope, thermomètre, verrerie…). Évaluer l'incertitude-type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes dans les cas simples d'une expression de la valeur mesurée sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient ou bien à l'aide d'une formule fournie ou d'un logiciel. Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreurs. Associer un niveau de confiance de 95 % à une incertitude élargie.
Présentation d'un résultat expérimental. Acceptabilité du résultat et analyse du mesurage (ou processus de mesure).	Exprimer le résultat d'une mesure par une valeur et une incertitude associée à un niveau de confiance. Commenter qualitativement le résultat d'une mesure en le comparant, par exemple, à une valeur de référence. Analyser les sources d'erreurs et proposer des améliorations du processus de mesure.

Vérification d'une loi physique ou validation d'un modèle ; ajustement de données expérimentales à l'aide d'une fonction de référence modélisant le phénomène.	Utiliser un logiciel de régression linéaire. Expliquer en quoi le coefficient de corrélation n'est pas un outil adapté pour juger de la validité d'un modèle linéaire. Juger qualitativement si des données expérimentales avec incertitudes sont en accord avec un modèle linéaire. Extraire à l'aide d'un logiciel les incertitudes sur la pente et sur l'ordonnée à l'origine dans le cas de données en accord avec un modèle linéaire.

ESTIMATION DES INCERTITUDES
ELEMENTS THEORIQUES ET PRATIQUES
[Synoptique]

demi-largeur d'intervalle de **Certitude**

Introduction : $z = x + y$ $\Rightarrow \Delta z = \Delta x + \Delta y$

$\Rightarrow \Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ *INCOHERENT* !!

demi-largeur d'intervalle de **Confiances** identiques

L'appareil et la mesure : fidélité, justesse, valeur vraie, erreur systématique et aléatoire, influence du nombre de mesures

Description d'un modèle d'erreur aléatoire comme un cumul d'écarts symétriques équiprobables :
Déviation latérale de « l'ivrogne »
Passage au continu : Loi Normale (Gaussienne)
-densité de probabilité
-intervalles de confiance

<u>Incertitude de type A :</u> Statistique Inductive par Student

<u>échantillonnage</u> : n mesures indépendantes tirées au hasard dans la population des mesures possibles

recherche d'un intervalle de confiance pour μ_x

calcul de moyenne m

estimateur de l'écart type s_{n-1}

coefficient de student pour un nombre n-1 de degrés de libertés et une confiance de C % (tabulé)

$t_{(C\%,n-1)}$

Intervalle de confiance C% de demi-largeur

$$\Delta x = \frac{t_{(C\%,n-1)}.s_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

autour de m

donc

$$\mu_x = [m \pm \Delta x]USI = \left[m \pm \frac{t_{(C\%,n-1)}.s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]USI$$

à C% de confiance

Incertitude de type B : Une seule mesure et une info sur la « précision » Δ du mesurage

On centre l'intervalle de « confiance » sur la seule mesure

On applique une relation constructeur donnant la précision :

$$\Delta \ (ou\ \varepsilon) = ...\%L + ..UR$$

Si un type de distribution de « densité de probabilité » est donné on doit calculer l'incertitude-type u(x) de cette distribution.

Généralement on suppose une densité uniforme correspondant à

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

On extrapole alors une gaussienne centrée sur la seule mesure et d'écart-type l'incertitude-type u(x)

Pour obtenir l'intervalle de confiance à 95%,
on définit une incertitude élargie 2.u(x)
(si on préfère 99% on choisit de multiplier par 3)

ainsi l'intervalle proposé à 95% est :

$$\mu_x = \left[x_m \pm \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}\right]USI$$

à 95% de confiance

Comme 2/√3~1.15
et qu'une incertitude est à donner avec un seul chiffre significatif,
on a envie de dire « Tout ça pour ça ? »

TP : Incertitude et mesure.

En général, on doit donner avec le résultat d'une mesure expérimentale effectuée en TP une évaluation de l'incertitude de mesure, ceci dans le but :

– **d'estimer correctement le nombre de chiffres significatifs** à retenir dans le résultat ;
– **de confronter plus efficacement** l'expérience avec un modèle théorique ;
– **de réaliser une critique** plus constructive du protocole expérimental et/ou du modèle théorique.

Soit une grandeur physique X à déterminer expérimentalement. Pour ce faire, on est amené à effectuer une ou plusieurs mesures de cette grandeur par un protocole expérimental le plus adapté possible. On obtient alors à l'issue de l'expérience un résultat x à assortir d'une **incertitude absolue** ou **incertitude élargie** Δx de sorte que :

$$X \in [x - \Delta x ; x + \Delta x] \quad \text{avec un certain niveau de confiance}$$

On appelle $\dfrac{\Delta x}{x}$ l'**incertitude relative** et on cherche à l'obtenir la plus faible possible. Attention, par convention, les quantités Δx et $\Delta x/x$ sont positives (ce sont des quantités absolues et non algébriques). Le niveau de confiance exprime la probabilité de trouver x dans l'intervalle fourni lors d'une mesure. Le niveau de confiance utilisé le plus couramment est de 95%.

Les résultats des mesures effectuées de la grandeur X doivent être présentés sous la forme :

$$\boxed{X = x \pm \Delta x}$$

Il est indispensable de veiller à la cohérence des chiffres significatifs affichés sachant que l'incertitude absolue ou élargie ne devra compter que 2 chiffres significatifs. On arrondira toujours le résultat déterminé pour Δx par excès. Prenons un exemple pour la mesure d'une intensité I : les chiffres affichés à la sortie du calcul par l'ordinateur ou la calculatrice étaient $i = 1,532678$ et $\Delta i = 0,1134$. On affichera le résultat :

$$\boxed{I = 1,53 \pm 0,12\,\mathrm{A}}$$

1 Origines de l'incertitude

1.1 Incertitude de construction due aux appareils

Aucun appareil n'est parfait ! Les résultats qu'il donne sont assortis d'une erreur. Il y a deux cas :

– Pour les appareils **analogiques**, s'il figure sur l'appareil un chiffre C appelé *classe*, alors l'incertitude de construction est égale à C% du calibre utilisé ; s'il ne figure rien, on se reporte à la notice de l'appareil (ou bien on prend par défaut une classe de 2).

  Application : Avec un voltmètre de classe 1, 5, un élève dit qu'il mesure une tension de 10 V. Que pensez-vous du résultat dans le cas où il utilisait un calibre de 450 V ? Même question dans le cas d'un calibre de 15 V ?

  Réponses : Avec un calibre de 450 V, on trouve $\Delta U = 1,5\% \times 450 = 6,7\,\mathrm{V}$, soit une incertitude absolue énorme. Cette mesure, d'une incertitude relative de 67% a peu de sens ! Il faut choisir le bon calibre. Avec un calibre de 15 V, on trouve $\Delta U = 1,5\% \times 15 = 0,2\,\mathrm{V}$, ce qui est bien mieux... Cette mesure, d'une incertitude relative de 2%, est intéressante, on peut fournir 3 chiffres significatifs. Le résultat à donner est donc :

$$U = 10,0 \pm 0,2\,\mathrm{V}$$

– Pour les appareils **numériques** (ceux utilisés le plus souvent) : l'incertitude de construction s'exprime en pourcentage de la valeur lue (%L) plus un certain nombre N_{UR} d'unités de représentation (l'unité de représentation est la plus petite valeur que l'affichage numérique peut donner dans le calibre utilisé). Sous forme mathématique, on a :

$$\Delta x = \%L \text{ de la lecture } (x) + \text{nombre } N_{UR} \text{ d'unités de représentation}$$

  Il faut se reporter à la notice de l'appareil utilisé pour connaître %L et N_{UR}.

  Application : Le tableau suivant précise quelques spécifications pour le multimètre Métrix MX24B.

Position commutateur	Conditions	$\%L$	N_{UR}
V_{DC}	Continu	0,3 %	2
V_{LOWZ}	40 Hz à 1 kHz	1 %	2
V_{AC+DC}	40 Hz à 1 kHz	1,5 %	2

Si on lit en continu une tension $U = 280,0\,\mathrm{V}$ sur ce multimètre, quelle incertitude de construction a-t-on ? Conclure.

Réponses : Si on lit $U = 280,0\,\mathrm{V}$ sur l'affichage numérique en continu, l'unité de représentation est $UR = 0,1\,\mathrm{V}$ donc l'incertitude de construction d'après le tableau est $\Delta U = 0,3\% \times U + 2 \times UR = 1\,\mathrm{V}$. Le résultat à donner est donc :

$$U = 280 \pm 1\,\mathrm{V}$$

Il faut retenir les points suivants :
– il faut toujours utiliser le bon calibre pour effectuer une mesure ;
– le nombre de chiffres affichés par les appareils numériques n'a pas valeur de précision (voir l'application précédente) ;
– il ne faut pas attribuer à l'incertitude absolue plus d'un chiffre significatif en général (quelques fois deux) ;
– il est indispensable que la mesure et l'incertitude aient des nombres de chiffres significatifs cohérents.

1.2 Incertitude de lecture

L'incertitude de lecture sur une échelle graduée (distance, angle. . .) est estimable en la prenant égale à la valeur correspondant à une demi-graduation (sensibilité de l'œil moyen).

Application : Calculer Δe pour la lecture d'une distance e sur une règle comportant 50 graduations pour une progression de 10 cm.

Réponse : Une graduation de la règle correspond à $1/5^{\text{ème}}$ de centimètre donc l'incertitude de lecture est $\Delta e = 1\,\mathrm{mm}$.

1.3 Incertitude systématique due au montage

La mesure de la grandeur cherchée demande parfois l'utilisation d'un montage qui, par construction, ne peut donner la bonne valeur. Le plus simple est de traiter un exemple classique sous forme d'exercice. . .

Application : On souhaite mesurer la résistance R d'un dipôle passif en utilisant la loi d'Ohm $R = U/I$. On envisage les deux montages de la figure 1.

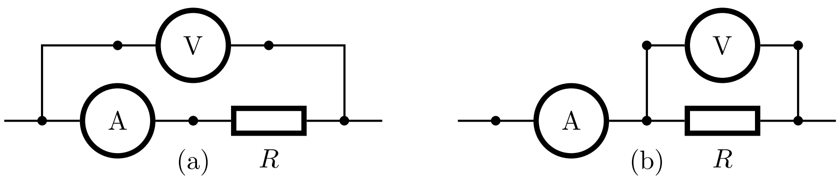

Figure 1 – Montages longue (a) et courte (b) dérivation

Dans le montage longue dérivation, que mesure-t-on réellement ? Quelle est l'incertitude relative systématique commise ? Mêmes questions pour le montage courte dérivation. Quand doit-on privilégier un montage ou l'autre ?

Réponses : Dans le premier montage, on doit tenir compte de la résistance R_a de l'ampèremètre et on mesure réellement $R + R_a$. On commet alors une erreur absolue $\Delta R = R_a$ et une erreur relative systématique $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_a}{R}$. En fait, dans ce premier montage, l'intensité mesurée est bonne mais pas la différence de potentiel qui n'est pas celle aux bornes de R.

Dans le second montage, on doit tenir compte de la résistance R_v du voltmètre, en parallèle sur R, et on mesure réellement $R//R_v = \frac{RR_v}{R + R_v}$. On commet alors une erreur relative systématique $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R}{R + R_v}$. En fait, dans ce second montage, la différence de potentiel mesurée est bonne mais pas l'intensité qui traverse en partie le voltmètre.

Le premier montage est à privilégier si $R \gg R_a$ sachant que R_a est de quelques ohms en pratique. Le second montage est à privilégier si $R \ll R_v$ sachant que R_v est supérieure à $1\,\mathrm{M\Omega}$ en pratique.

On suppose dans la suite cette erreur systématique nulle (montage idéal). En pratique, l'erreur systématique est maîtrisée et on peut facilement en tenir compte pour donner un résultat expérimental adéquat.

2 Quelques connaissances sur l'aspect statistique

2.1 Loi de distribution des mesures

On souhaite déterminer une grandeur physique X expérimentalement. On peut par exemple procéder par une série de n mesures indépendantes x_i de la grandeur X et donner comme résultat la valeur moyenne :

$$x_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Il faut assortir ce résultat d'une incertitude Δx. En effet, les mesures indépendantes de la grandeur X se distribuent selon une loi mathématique appelée *loi de distribution gaussienne ou loi normale* $f(x)$ donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp -\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}$$

où σ est l'écart-type de la série de mesure x_i à savoir $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m)^2}$. La distribution des mesures s'approchera d'autant plus de la loi gaussienne que le nombre n de mesures sera élevé. $f(x)$ est représentée à la figure 2. En pratique, il faut quelques dizaines de mesures pour que cela soit satisfaisant. En TP, il est rare qu'on atteigne un tel chiffre même en rassemblant la totalité des mesures des binômes.

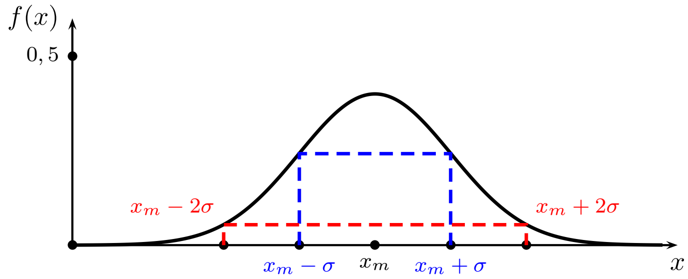

FIGURE 2 – Loi gaussienne de distribution d'une série de mesures indépendantes

2.2 Intervalle de confiance

La loi de distribution $f(x)$ nous permet de connaître la probabilité que la grandeur X soit comprise dans un intervalle donné. $\mathrm{d}P(x) = f(x)\mathrm{d}x$ représente la probabilité d'avoir X comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. Pour un intervalle d'extension finie, la probabilité finie correspondra à l'intégrale de $\mathrm{d}P(x)$. On travaille souvent sur un intervalle centré sur la moyenne et de largeur définie par rapport à l'écart-type. Par exemple, la probabilité de trouver la grandeur X dans l'intervalle $[x_m - \sigma; x_m + \sigma]$ est $P = 0,68$ à savoir 68%. L'intervalle précédent est appelé *intervalle de confiance à* 68%. Pour les mesures courantes, on travaillera sur l'intervalle de confiance à 95% défini par :

$$X \in [x_m - 2\sigma; x_m + 2\sigma] \quad \text{à} \quad 95\% \qquad \text{car} \qquad \int_{x_m-2\sigma}^{x_m+2\sigma} f(x)\mathrm{d}x = 0,95$$

Dans l'industrie, on travaille sur des intervalles de confiance plus élevés en général comme celui à $\pm 3\sigma$ qui correspond à $99,7\%$ de confiance. Pour des applications mettant en jeu des problèmes de sécurité, on peut aller jusqu'à $\pm 6\sigma$, ce qui correspond à une probabilité de $99,999\,999\,8\%$.

2.3 Situation réelle en TP

En TP, on n'a pas l'occasion d'effectuer une série de mesures vraiment indépendantes, mais nous utiliserons toutefois les principaux résultats des statistiques prévus pour les mesures indépendantes. D'autre part, il est plus courant de faire une mesure unique que de renouveler N fois une même mesure. Nous verrons par la suite comment, dans chacun de ces deux cas, on pourra évaluer l'incertitude absolue, encore appelée incertitude élargie. Le problème, c'est qu'en TP on ne peut pas avoir d'idées précises sur la distribution de probabilité des mesures. On ne pourra avoir accès qu'à des *estimateurs* qui sont évoqués dans le paragraphe qui suit.

3 Méthode d'évaluation d'une incertitude - Estimateurs

3.1 N mesures indépendantes

3.1.1 La mesure

La mesure x de la grandeur X est tout simplement fournie par la moyenne arithmétique des mesures supposées indépendantes effectuées :

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{estimateur}$$

Il faut bien comprendre qu'une telle moyenne très banale pour nous ne correspond pas rigoureusement à la moyenne de X mais constitue un estimateur de celle-ci. En effet, une moyenne de X est définie par $< X >= E(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i\, x_i$. Comme cela a été évoqué dans le paragraphe précédent, il n'est pas possible de connaître la probabilité P_i correspondant à la mesure x_i. On se contente de l'estimation par la formule bien connue de la moyenne arithmétique.

3.1.2 Incertitude-type

Comme pour la moyenne, l'absence de connaissance des lois de probabilités ne permet pas de déterminer l'écart-type Δx associé à la mesure de la grandeur X. En effet, il faudrait pouvoir calculer :

$$(\Delta X)^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i\, x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} P_i\, x_i\right)^2$$

Nous allons, là encore, devoir nous contenter de déterminer un estimateur de l'écart-type. On peut montrer que la formule de l'écart-type au carré doit être corrigé d'un facteur $n/(n-1)$ par rapport à sa définition vue dans el cadre d'une distribution gaussienne. On a :

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2}$$

On peut démontrer que, sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne, l'écart-type sur la moyenne x des x_i est donné par :

$$\frac{\Delta X}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2}$$

Cette expression nous fait constater que plus le nombre N de mesure des x_i est élevé, plus l'écart-type est faible mais que pour gagner un facteur 10 sur l'écart-type il faut multiplier par 100 le nombre de mesures ce qui rend les choses difficiles sur le plan pratique. Ceci est bien évidemment la conséquence de la loi d'évolution en $1/\sqrt{N}$.

La détermination de l'incertitude associée à x - dite incertitude élargie - passe par la notion d'incertitude-type. L'incertitude-type correspond à l'écart-type précédent. La notation privilégiée est $u(x)$ et on a donc :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2} \qquad \text{estimateur}$$

La valeur de $u(x)$ se calcule en général assez facilement avec une calculatrice possédant des fonctions statistiques ou avec un ordinateur.

3.1.3 Incertitude élargie

Pour évaluer l'incertitude élargie Δx, dans le cas de la mesure répétée, on a :

$$\Delta x = k\, u(x)$$

où k est un coefficient qui va dépendre du niveau de confiance que l'on attribuera à la mesure. La valeur de k est donnée par les lois mathématiques liées aux statistiques. On retiendra que plus le nombre N de mesures est faible plus le coefficient k sera élevé pour maintenir un certain niveau de confiance de la mesure comme celui de 95% qui est le plus fréquemment rencontré. À titre indicatif, on donne le tableau des valeurs de $k_{95\%}$. Dans le cas d'une statistique basée sur une distribution gaussienne, la valeur de k est appelée coefficient de Student. Il faut bien avoir conscience qu'il est impossible de faire un lien entre $u(x)$ et Δx sans connaître la loi de distribution des probabilités sous-jacente. L'hypothèse classique que l'on effectue est celle d'une distribution gaussienne. La suite du développement est effectuée sous cette hypothèse.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	100	∞
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,14	2,09	1,98	1,96

Pour simplifier l'approche des calculs d'incertitudes, le coefficient $k_{95\%}$ sera pris égal à 2. En effet, dès que l'on aura effectué une dizaine de mesures, cette valeur de k va nous assurer que l'intensité I qui faisait l'objet de la mesure donnée en indication dans l'introduction possède 95% de chances d'être contenue dans l'intervalle : $[1,41\,\mathrm{A}; 1,65\,\mathrm{A}]$.

3.1.4 Affichage du résultat

Dans ce processus de mesure, on conclura en affichant le résultat suivant :

$$X = x \pm 2u(x) = x \pm \Delta x \quad \text{avec un niveau de confiance de 95\%}$$

3.2 Une mesure unique

3.2.1 La mesure

Comme nous venons de le voir la mesure n'ayant été effectuée qu'une seule fois, nous n'avons pas le choix. Le résultat de la mesure est la valeur obtenue lors de la mesure... On fait en quelque sorte la moyenne sur un seul terme ! Cette situation étant assez courante, il est indispensable d'en parler.

$$x = \text{valeur obtenue lors de la mesure unique}$$

3.2.2 Incertitude-type

On retrouve, ici, la même difficulté que pour les incertitudes associées à une distribution de N mesures. Il n'est évidemment plus possible d'effectuer un calcul de type statistique de l'incertitude-type comme nous l'avons fait dans le cas des N mesures. Pourtant, il faut bien faire quelque chose... On commence par définir la précision Δ de l'instrument de mesure que l'on a utilisé. On rencontre deux sortes d'instruments de mesures : ceux équipés d'une graduation et ceux disposant d'un affichage numérique. Les normes en vigueur ont pour conséquence qu'on doit pouvoir les traiter selon le mode opératoire suivant :

- La mesure est lue sur une échelle graduée. On estime alors que Δ correspond à une demi-graduation. Par exemple, vous utilisez un double-décimètre gradué en mm, on a $\Delta = 0,5\,\mathrm{mm}$.
- La mesure est lue sur un appareil à affichage digital. Il faut se reporter à la notice de ce dernier pour obtenir Δ. Par exemple sur la notice d'un voltmètre, on lit $\Delta = 0,3\% \times U + 2 \times \mathrm{UR}$. UR est l'unité de représentation, en clair la valeur du dernier digit affiché. Imaginons que l'on mesure $U = 280,0\,\mathrm{V}$, on a $\mathrm{UR} = 0,1\,\mathrm{V}$ et par conséquent, on aura $\Delta = 1,0\,\mathrm{V}$.

Une fois la précision Δ déterminée, l'incertitude-type sera calculée par la loi :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Cette formule est la conséquence du fait que l'on suppose que la probabilité d'avoir une mesure dans l'intervalle $x \pm \Delta$ est uniforme, voir le graphique de la figure 3 où la variable notée x' est une variable muette destinée à ne pas être confondue avec x qui représente la valeur de la mesure unique.

Le calcul de l'incertitude-type s'effectue selon : $u^2(x) = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (x'-x)^2 P(x')\mathrm{d}x' = \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (x'-x)^2 \frac{1}{2\Delta}\mathrm{d}x'$. On obtient donc : $u^2(x) = \frac{1}{2\Delta}\left[\frac{(x'-x)^3}{3}\right]_{x-\Delta}^{x+\Delta} = \frac{\Delta^2}{3}$. Cela permet bien de retrouver l'expression de $u(x)$ affirmée plus haut.

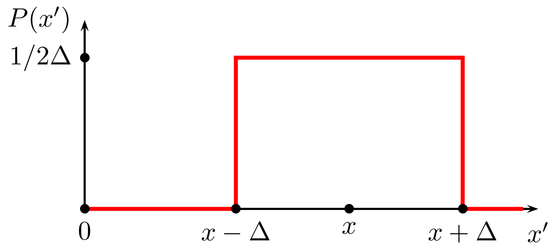

FIGURE 3 – Probabilité uniforme

3.3 L'incertitude élargie

Comme pour la situation des N mesures supposées indépendantes, on utilisera de façon systématique le niveau de confiance de 95% et on prendra donc $k_{95\%} = 2$. Ceci sous-entend encore une fois que l'on fait l'hypothèse d'une distribution gaussienne sans laquelle il n'y a pas de lien possible entre intervalle de confiance et incertitude-type. On aura donc :

$$\Delta x = 2u(x) = 2\frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Comme $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,16$, on donne, ici un intervalle de $x \pm 1,16\Delta$ pour un niveau de confiance de 95% alors que si l'on suit les indications de l'appareil de mesure, on a 100% de chances d'avoir un résultat de la mesure dans l'intervalle $x \pm \Delta$.

3.3.1 Affichage du résultat

Dans ce processus de mesure, on conclura en affichant le résultat suivant :

$$X = x \pm 2u(x) = x \pm \Delta x \quad \text{avec un niveau de confiance de 95\%}$$

3.4 Prise en compte de plusieurs incertitudes

Imaginons une mesure de longueur L effectuée avec un mètre gradué en millimètres. L'incertitude-type liée à la graduation sera notée $u_1(l)$. Toutefois en effectuant la mesure, on constate que le positionnement du mètre est incertain de 4 mm du fait de deux millimètres de battement de part et d'autre autour de la position que l'on peut fixer pour le mètre. Cette situation correspond à une seconde incertitude-type que nous noterons $u_2(l)$. D'après ce que nous avons vu avant, on a $u_1(l) = \frac{1/2}{\sqrt{3}} = 0,29\,\text{mm}$. De la même façon, on aura $u_2(l) = \frac{4/2}{\sqrt{3}} = 1,16\,\text{mm}$. Pour déterminer l'incertitude-type affectant la mesure l de la longueur L, il faut prendre composer les deux incertitudes-type. On devra effectuer le calcul :

$$u(l) = \sqrt{u_1^2(l) + u_2^2(l)} = 1,2\,\text{mm}$$

Imaginons que la mesure ait donné $l = 0,742\,\text{m}$. Avec un niveau de confiance de 95%, l'incertitude élargie est $\Delta l = 2u(l) = 2,4\,\text{mm}$ que l'on majorera à 3 mm. Le résultat de la mesure devra afficher :

$$L = 742 \pm 3\,\text{mm}$$

D'une façon générale, s'il y a p sources d'incertitudes, l'incertitude-type globale sera donnée par :

$$u(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} u_j^2(x)}$$

4 Propagation des incertitudes

4.1 Contexte

Ce cas de figure est très courant car il correspond à la situation de mesure d'une grandeur à partir de la mesure d'autres grandeurs. Prenons un exemple en électronique où la pulsation de résonance d'un circuit RLC série est mesurée à partir de la mesure de L et C avec $\omega_0 = \frac{1}{LC}$. Comme les mesures de L et de C sont entachées d'incertitudes, on parle alors de propagation des incertitudes de L et C vers ω_0. On peut prendre un autre exemple en optique où la distance a qui sépare un dispositif de deux fentes d'Young sera déterminée par la formule $a = \frac{\lambda D}{i}$ où λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée, D la distance entre les sources et l'écran d'observation et i l'interfrange mesuré sur l'écran. Les valeurs de i, λ et D vont être responsables d'une incertitude sur la mesure de a. Comme nous le voir dans ce qui suit, la méthode de calcul est différente de celle évoquée dans le paragraphe **3.4** même si le caractère quadratique du calcul est conservé.

4.2 Principe

Soit à déterminer la grandeur X de mesure x, d'incertitude élargie Δx et d'incertitude-type $u(x)$. X est une fonction de grandeurs A_i où i est un entier. A_i est de mesure a_i et d'incertitude-type $u(a_i)$. Les grandeurs A_i sont supposées supposées indépendantes : $X = f(A_1, A_2, \ldots)$. L'évaluation de l'incertitude-type de X repose sur la différentielle :

$$\mathrm{d}x = \sum_i \left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\right)_{a_{j\neq i}} \mathrm{d}a_i$$

On passe à l'incertitude-type sur X en traitant de façon quadratique les effets de toutes les incertitudes-type $u(a_i)$ sur chaque grandeur A_i :

$$u(x) = \sqrt{\sum_i \left(\left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\right)_{a_{j\neq i}} u(a_i)\right)^2}$$

On peut aussi recourir à un calcul de différentielle logarithmique selon :

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_i \left(\frac{\partial \ln x}{\partial a_i}\right)_{a_{j\neq i}} \mathrm{d}a_i$$

On obtient alors :

$$\frac{u(x)}{|x|} = \sqrt{\sum_i \left(\left(\frac{\partial \ln x}{\partial a_i}\right)_{a_{j\neq i}} u(a_i)\right)^2}$$

Le calcul de la différentielle logarithmique peut s'avérer très pratique dans les cas où X dépend des grandeurs A_i sous la forme $X = \alpha \prod_i A_i^{\gamma_i}$ (avec α et γ_i constants). On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_i \gamma_i \frac{\mathrm{d}a_i}{a_i} \qquad \text{donc} \qquad \frac{u(x)}{|x|} = \sqrt{\sum_i \left(\gamma_i \frac{u(a_i)}{a_i}\right)^2}$$

4.3 Applications

4.3.1 En optique

Dans un TP d'optique, on va comparer la distance appelée interfrange i dans une figure d'interférences que l'on va mesurer à celle que l'on peut déduire des valeurs mesurées de chacune des grandeurs dont elle est fonction. Ici, on se contente de celle issue du calcul. Dans le cas des interférences d'Young, cet interfrange s'exprime selon :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

où $\lambda = 532 \pm 1\,\mathrm{nm}$ est la longueur d'onde du laser utilisé, $D = 2,150 \pm 0,005\,\mathrm{m}$ est la distance entre le dispositif interférentiel d'Young et l'écran d'observation et $a = 100 \pm 1\,\mu\mathrm{m}$ la distance caractéristique du dispositif d'Young. Toutes les incertitudes fournies correspondent un niveau de confiance de 95%. On va déterminer pour un niveau de confiance de 95% la valeur de l'interfrange en l'exprimant selon : $i = i_m \pm \Delta i_m$.

Avec les valeurs numériques fournies, on calcule tout d'abord $i_m = 1,1438\,\mathrm{cm}$. Pour l'incertitude, on a, d'après ce qui précède, $\frac{u(i_m)}{i_m} = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2}$ avec $u(\lambda) = 0,5\,\mathrm{nm}$, $u(D) = 2,5\,\mathrm{mm}$ et $u(a) = 0,5\,\mu\mathrm{m}$. L'application numérique conduit à $\frac{u(i_m)}{i_m} = 0,00522$, cela nous permet d'en déduire que $u(i_m) = 0,0060\,\mathrm{cm}$. Pour un niveau de confiance de 95%, on aura une incertitude élargie $\Delta i_m = 2u(i_m) = 0,012\,\mathrm{cm}$. Dans ces conditions, l'expression du résultat donnant l'interfrange sera :

$$\boxed{i = 1,144 \pm 0,012\,\text{cm}}$$

avec un niveau de confiance de 95%.

4.3.2 En électricité

On cherche à déterminer la puissance dissipée par effet JOULE dans une résistance R sachant que l'on a mesuré l'intensité I circulant dans la résistance et la résistance elle-même. Les deux mesures donnent les résultats suivants :

$$R = 15,7 \pm 0,1\,\Omega \quad \text{et} \quad I = 0,274 \pm 0,02\,\text{A}$$

Ces deux grandeurs sont exprimées avec un niveau de confiance de 95%. La puissance JOULE est donnée par la formule $\mathcal{P}_J = RI^2$. On différentie l'expression de façon logarithmique et on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_J}{\mathcal{P}_J} = \dfrac{\mathrm{d}R}{R} + 2\dfrac{\mathrm{d}I}{I}$. L'incertitude-type sera alors :

$$\left(\frac{u(\mathcal{P}_J)}{\mathcal{P}_J}\right)^2 = \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{u(I)}{I}\right)^2$$

On en déduit que $\left(\dfrac{u(\mathcal{P}_J)}{\mathcal{P}_J}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{0,05}{15,7}\right)^2 + 4\left(\dfrac{0,001}{0,274}\right)^2} = 0,005338$. Le calcul de la puissance dissipée donne $\mathcal{P}_J = 1,1786932\,\text{W}$ tel qu'il est affiché par la calculatrice et par conséquent, on trouve $u(\mathcal{P}_J) = 0,00629\,\text{W}$. Cela nous permet d'en déduire l'incertitude élargie $\Delta\mathcal{P}_J = 2u(\mathcal{P}_J) = 0,01258\,\text{W}$ pour le niveau de confiance de 95%. Il faut donc afficher maintenant le résultat correctement en ne conservant qu'un seul chiffre significatif dans l'incertitude élargie comme cela était le cas avant sur les valeurs de R et de I. Comme l'arrondi doit être toujours effectué en majorant, on peut en conclure que $\Delta\mathcal{P}_J = 0,02\,\text{W}$. Finalement le résultat de la mesure est :

$$\boxed{\mathcal{P}_J = 1,18 \pm 0,02\,\text{W}}$$

avec un niveau de confiance de 95%.

5 Dispositifs de précision

5.1 La vis micrométrique

FIGURE 4 – Vis micrométrique

Ce dispositif de mesure (voir la figure 4 est plus précis que le vernier. Il se trouve sur l'interféromètre de MICHELSON, sur un Palmer (voir figure)... L'utilisation d'un manchon gradué, par exemple, avec un pas de $0,5\,\text{mm}$ associé à un tambour gradué confère une précision de lecture au $1/100^{\text{ème}}$ de millimètre ! Considérons justement ce cas avec vis au pas de $0,5\,\text{mm}$: le tambour est gradué en 50 parties égales et chaque partie représente une lecture de $1/100^{\text{ème}}$ de millimètre. Il faut donc faire tourner le tambour de deux tours pour que la partie mobile se déplace de 1 mm.

Application : La méthode de lecture du micromètre avec vis au pas de $0,5\,\text{mm}$ est la suivante :

1. Lire le nombre entier de millimètres apparaissant à gauche du tambour, sur le manchon gradué.

2. Localiser la graduation du tambour qui se trouve face au trait horizontal du manchon.
3. Ajouter la valeur de cette graduation (en centième de millimètres) au nombre entier de millimètres en pensant à ajouter 50 centièmes de millimètres au résultat si la dernière graduation apparente sur le manchon correspond à un demi-millimètre (ceci demande une certaine attention pour ne pas commettre d'erreur).

Quelle lecture faites-vous pour chacun des cas de la figure 5 ?

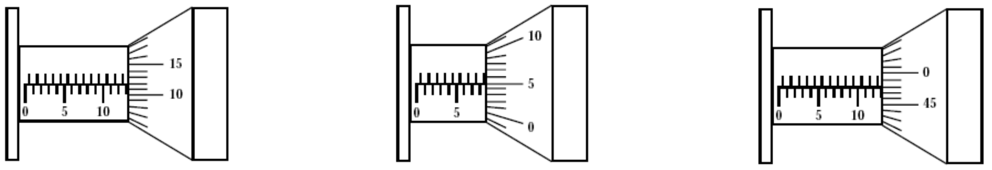

FIGURE 5 – Lecture sur une vis micrométrique

Réponses : Dans le premier cas, on lit $13,12$ mm, dans le second cas on lit $8,55$ mm et dans le troisième cas, on lit $12,98$ mm.

5.2 Le vernier

Dans un système à graduation simple, il n'est pas possible de repérer avec précision une mesure lorsque la graduation ne fait pas exactement face à une valeur entière de la graduation principale.

Sur la figure 6 en haut, on peut uniquement repérer que la longueur à mesurer est comprise entre 1 et 2. Pour augmenter la précision, on adjoint une graduation secondaire permettant un repérage plus précis, voir la figure 5 en bas. C'est le principe du vernier. Avec un vernier au $1/10^{\text{ème}}$, on pourra obtenir un repérage de la grandeur à mesurer 10 fois plus précis. Le principe de construction de la graduation secondaire est le suivant : on divise en 10 parties égales les $9/10^{\text{ème}}$ de la graduation principale.

On repère la meilleure coïncidence de la graduation secondaire et de la graduation principale. Sur la figure 6, on voit que cela se produit pour le repère 4 de la graduation secondaire. On a donc $x_2 = 0,4$ et finalement $x = 1,4$. Si on note L la valeur de la graduation principale, on voit que la coïncidence est caractérisée par $d = 5L$ et par $d = x + 4 \times \dfrac{9L}{10}$. Avec $x = 1 \times L + x_2$, on trouve aisément que $x_2 = 4 \times \dfrac{L}{10}$ d'où le résultat indiqué ci-dessus. On rencontre fréquemment des verniers au $1/10^{\text{ème}}$, au $1/20^{\text{ème}}$, au $1/30^{\text{ème}}$ et au $1/50^{\text{ème}}$.

Application : Quelle lecture doit-on faire pour chacun des cas de la figure 7.

Réponses : Dans les deux cas, on a des verniers au $1/50^{\text{ème}}$ car 50 graduations du vernier correspondent à 49 graduations de la règle. Dans le premier cas, on lit $30,46$ mm et dans le second cas on lit $38,92$ mm. L'incertitude de lecture correspond à une ou deux graduations du vernier suivant votre vue et la finesse des traits... Attention, on peut avoir affaire à un vernier relatif à une règle graduée en demi-millimètres ! Le principe de lecture est le même.

5.3 Le pied à coulisse

Le pied à coulisse est un exemple de dispositif comportant un vernier, voir la figure 8. La règle est graduée en millimètres mais il en n'est pas de même pour le vernier. Celui-ci, gravé sur le coulisseau, a une graduation particulière dont le nombre de divisions va déterminer la précision de lecture...

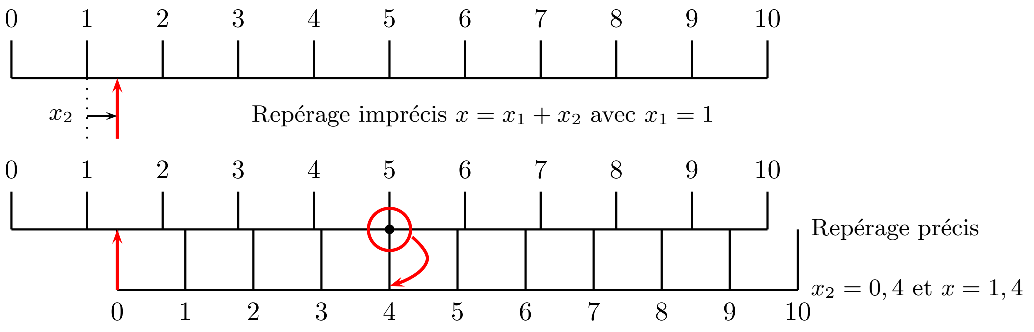

FIGURE 6 – Principe du vernier

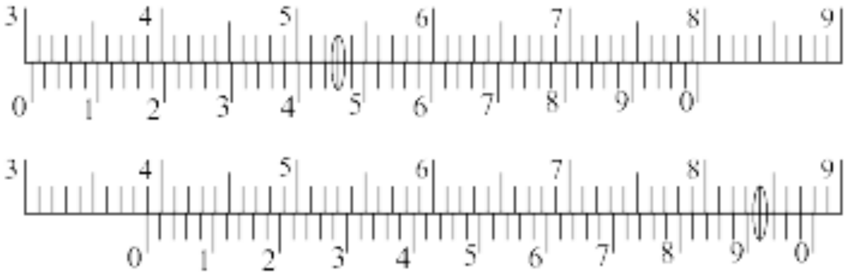

Figure 7 – Lecture avec un vernier

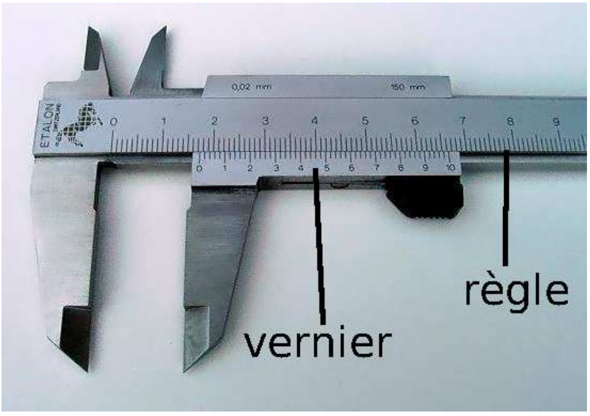

Figure 8 – Pied à coulisse

La méthode de lecture du vernier du pied à coulisse est la suivante :

1. Lire le nombre entier de millimètres à gauche du zéro du vernier,
2. Localiser la graduation du vernier (une seule possible à l'erreur de lecture d'une graduation près) qui coïncide avec une graduation quelconque de la règle,
3. Ajouter aux millimètres, les $1/10^{\text{ème}}$ ou $1/20^{\text{ème}}$ ou $1/50^{\text{ème}}$ de mm selon le vernier pour obtenir le résultat de la mesure.

5.4 Le vernier angulaire

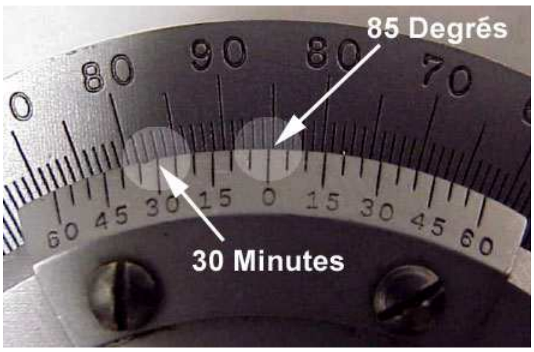

Figure 9 – Vernier angulaire

Un vernier angulaire peut se trouver sur un goniomètre, un polarimètre de Laurent, voir la figure 9. Le principe de lecture est le même que pour un vernier de pied à coulisse, en dehors du fait que l'on lit un angle. Il existe une grande diversité d'échelles de graduations mais, avec attention, on arrive toujours à connaître l'unité de l'échelle de base et l'unité associée à lecture du vernier. Attention, il peut arriver que le vernier soit gradué dans deux sens contraires (comme sur la figure 9). Il faut alors effectuer la lecture sur la partie du vernier graduée dans le même sens que les graduations de base où se trouve son zéro.

6 Régression linéaire

6.1 Position du problème

Lorsqu'on modélise un phénomène, l'écriture des équations de la Physique permet d'établir des relations entre les différentes grandeurs impliquées dans le problème. Considérons le cas d'une grandeur Y dépendant d'une grandeur X selon une loi linéaire $Y = AX + B$. Des mesures de Y pour différentes valeurs de X permettent d'obtenir un jeu de données $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Deux questions peuvent se poser :

– Est-ce que les données expérimentales (x_i, y_i) permettent de valider la relation linéaire entre Y et X et donc la modélisation ?
– La relation linéaire étant admise, les coefficients A et/ou B contiennent des paramètres physiques dont on souhaiterait obtenir la valeur. Comment obtenir une estimation de A et B et de leur incertitude type à partir des (x_i, y_i) ?

Donnons un exemple. On lance une bille vers le haut avec une vitesse initiale v_0. En supposant que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est vertical descendant et en négligeant les frottements de l'air, les lois de la Mécanique permettent de trouver que la vitesse de la bille au cours du temps est donnée par : $v = -gt + v_0$.

En posant $X = t$ et $Y = v$, on a bien une relation linéaire avec $A = -g$ et $B = v_0$. Expérimentalement, on peut mesurer la vitesse à différents instants, c'est-à-dire obtenir des couples $(t_1, v_1), \ldots, (t_n, v_n)$. Nous pouvons alors nous demander :

– Les (t_i, v_i) sont-ils compatibles avec la relation $v = f(t)$? Notre modélisation est-elle correcte ?
– On admet la relation $v = f(t)$. Comment accéder à g à partir des (t_i, v_i) ?

En plaçant les (x_i, y_i) dans un graphe comme celui de la figure 10, on obtient un ensemble de points qui ne sont pas exactement alignés à cause des erreurs de mesures sur X et Y. Néanmoins, il est toujours possible de tracer une droite qui passe au voisinage de tous les points. Reste à savoir comment, non seulement trouver la « meilleure droite », c'est-à-dire celle qui passe au plus près de tous les points – ce qui revient à trouver les meilleures estimations a et b des coefficients A et B respectivement – mais aussi juger si le modèle linéaire est acceptable.

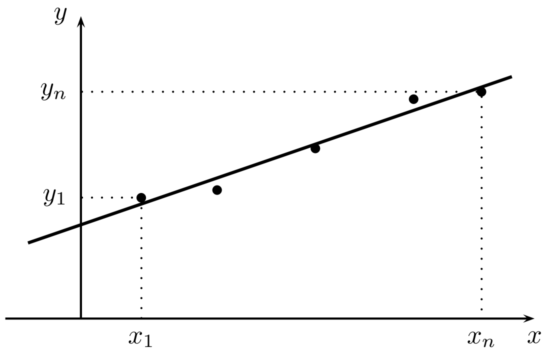

FIGURE 10 – Ajustement d'une droite

L'ajustement d'une droite à des données est appelée régression linéaire.

6.2 Ajustement par la méthode des moindres carrés

Pour déterminer le meilleur ajustement, on a besoin d'un critère pour quantifier la proximité de la droite aux points expérimentaux. Dans un premier temps, on peut penser à l'écart vertical :

$$\varepsilon_i = y_i - (ax_i + b)$$

entre le point expérimental de coordonnées (x_i, y_i) et le point situé sur la droite à la même abscisse x_i. Trouver la meilleure droite reviendrait à minimiser tous les écarts donc, globalement, leur somme. Cette approche présente un défaut. Les points expérimentaux se situant tantôt en-dessus tantôt en-dessous de la droite, certains ε_i sont positifs et les autres sont négatifs, d'où une somme qui risque d'être voisine de 0 quelles que soient les valeurs de a et b pourvu qu'elles correspondent à une droite assez proche des points.

L'idée de minimisation des écarts reste bonne, il faut juste se débarrasser du problème des signes. Il suffit pour cela d'utiliser les écarts élevés au carré. Les (x_i, y_i) étant donnés, on va chercher les valeurs de a et b qui minimisent la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (ax_i + b) \Big)^2$$

Cette méthode porte logiquement le nom de *méthode des moindres carrés*. Elle permet de calculer a et b selon les formules :

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

On voit immédiatement sur les formules ci-dessus que les erreurs de mesure sur les x_i et les y_i se répercutent sur a et b. Exprimer les incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$ en fonction des $u(x_i)$ et des $u(y_i)$ est un problème délicat qu'on parvient à simplifier si on fait en sorte de négliger les $u(x_i)$ devant les $u(y_i)$. Dans ce cas, et si on suppose en plus que les $u(y_i)$ sont toutes égales à une même valeur $u(y)$, on peut montrer que :

$$u(a) = u(y) \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}} \quad \text{et} \quad u(b) = u(y) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}}$$

Les logiciels d'exploitation de données qui réalisent des régressions linéaires utilisent ces formules. Ils fournissent également un coefficient noté généralement r, appelé coefficient de corrélation, qui, par construction vérifie :

- $-1 \leq r \leq 1$
- $r = +1$ si tous les point sont parfaitement alignés selon une droite de pente positive
- $r = -1$ si tous les point sont parfaitement alignés selon une droite de pente négative
- r est d'autant plus proche de 0 que l'alignement est faible

Ce coefficient donne donc une indication sur la qualité de la régression. Usuellement, on admet que la linéarité est acceptable pour r au moins égal à $0,9$ mais il faut rester méfiant face à ce critère comme le montre l'exemple de la figure 11. Considérons le graphique constitué de points construit sur la relation clairement non linéaire $y = \sqrt{x}$ pour les cinq premiers entiers naturels. Pourtant, une régression linéaire réalisée avec ces valeurs donne $r = 0,96$. C'est plutôt bon pour une relation qui n'est manifestement pas linéaire ! On constate en effet graphiquement qu'une droite passe à proximité des cinq points de la courbe $y(x)$.

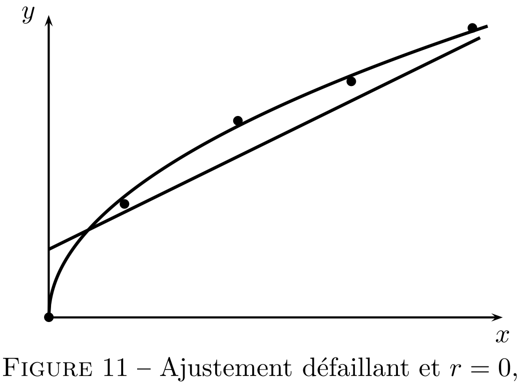

FIGURE 11 – Ajustement défaillant et $r = 0,96$

On ne se contentera donc pas d'un rapide coup d'œil sur r pour valider ou invalider un modèle linéaire. On procédera en plus à l'examen graphique décrit dans le paragraphe suivant.

6.3 Analyse graphique

La visualisation du graphique sur lequel figurent les points expérimentaux et la droite de régression permet de détecter d'éventuels points aberrants (qu'il faudra éliminer ou pour lesquels il faudra recommencer la mesure) et de constater rapidement si l'alignement est correct. On complète ce graphique en ajoutant pour chaque y_i

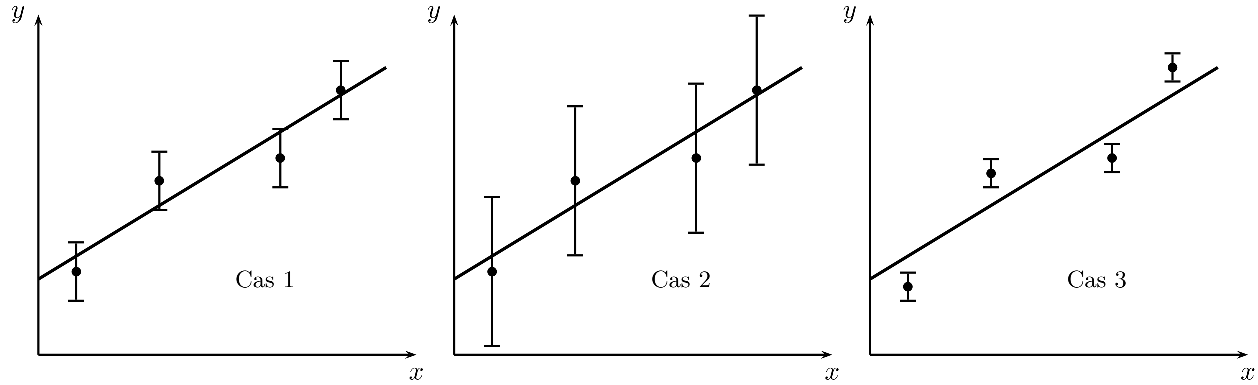

FIGURE 12 – Barres d'erreurs

une barre d'erreur qui représente typiquement l'intervalle $[y_i - \Delta y_i; yi + \Delta yi]$ où Δy_i est l'incertitude de mesure de y_i. Trois cas de figure peuvent se produire comme on peut le voir sur les graphiques de la figure 12.

Dans le cas 1, l'écart entre les points expérimentaux et la droite est du même ordre de grandeur que les barres d'erreur. On peut valider le modèle linéaire. Dans les cas 2, les barres d'erreurs sont nettement plus grande que dans le cas 1, elles sont supérieures à la distance qui sépare les points de la droite. De nombreuses droites sont capables d'intercepter l'ensemble des barres d'erreurs. Dans le cas 3, les barres d'erreurs sont inférieures à la distance qui sépare les points de la droite. La droite ne passe par aucune barre d'erreur. Dans les cas 2 et 3, soit la loi linéaire est à remettre en cause, soit l'estimation des barres d'erreurs est à revoir.

6.4 Conclusion

En pratique, les calculatrices graphiques et les logiciels avec tableur permettent le tracé du graphe $y(x)$ et donnent les coefficients a et b et le coefficient de corrélation r. Mais la plupart des tableurs ne donnent pas les incertitudes-types sur a et b. Les logiciels *Régressi* et *Latis Pro* donnent ces incertitudes.

1 Introduction

Regressi effectue la régression par deux méthodes

1. par défaut, la méthode des moindres carrés classique et donc sans prise en compte des incertitudes. On suppose que l'incertitude sur l'abscisse est négligeable et que l'incertitude sur l'ordonnée est la même pour tous les points. La technique de détermination des incertitudes sur les paramètres repose sur l'assimilation entre l'écart modèle-données et l'incertitude sur l'ordonnée.
2. si les incertitudes sont définies et que l'utilisateur a coché « méthode du χ^2 », la dite méthode, les incertitudes sur x et y étant prises en compte.

Le test du χ^2 suppose que les incertitudes soient des incertitudes-type, et on élargit l'incertitude par un coefficient de Student de paramètre (nombre de mesures - nombre de paramètres), ce qui suppose que la statistique sur les paramètres est bien gaussienne.

Note modélisation s'entend au sens d'ajustement des paramètres d'une fonction donnée (fit en anglais). J'utilise modélisation car, pour moi, le choix de la fonction n'est pas arbitraire mais résulte de la modélisation du dispositif étudié.

1.1 Incertitudes des données

Les incertitudes définies pour les grandeurs expérimentales devraient donc être des incertitudes-type, notées u, de manière à ce que la loi de propagation puisse s'appliquer. Les options de tracé des ellipses le supposent également.

Rappel : expression de l'incertitude type

— Pour une mesure avec des graduations de longueur pas, l'incertitude-type est : $\dfrac{\text{pas}}{\sqrt{12}}$

— Pour un instrument avec une erreur de justesse maximale donnée : $\dfrac{\text{erreur}}{\sqrt{3}}$

— Pour un appareil de précision p, l'incertitude-type est $\dfrac{p}{\sqrt{3}}$

— Pour un appareil type voltmètre avec une précision de $\pm(pc$ % de lecture$+N\times$chiffre le moins significatif), l'incertitude sur x est donnée par $\dfrac{x\cdot pc+N\cdot ms}{\sqrt{3}}$ avec ms valeur correspondant à l'unité du dernier chiffre.

1.2 Affichage

L'affichage des ellipses d'incertitude suppose qu'il n'y a pas corrélation entre les deux grandeurs. Si on a entré des incertitudes-type

— avec une loi normale, une ellipse de demi-axe u correspondra à un intervalle de confiance de 68%, $2u$ de 95% et $3u$ de 99,7%.

— pour une loi rectangulaire u correspondra à 58%, $2u$ à 10% (sic) et $3u$ à 173% (resic)

2 Méthode des moindre carrés

Soit une grandeur y fonction affine d'une autre grandeur x : $y = Ax + B$. On a N couples de mesures $\{y_i, x_i\}$. Pour trouver A et B, on cherche à minimiser l'écart quadratique $\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx_i\right)^2$. Cela conduit, en notant $\Delta = N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$, à $A = \dfrac{\sum x^2\sum y - \sum x\sum(xy)}{\Delta}$, et $B = \dfrac{N\sum(xy) - \sum x\sum y}{\Delta}$

On peut alors considérer que $\left(y_i - A - Bx_i\right)$ représente l'écart entre la valeur mesurée y_i et la valeur « vraie » $A + Bx_i$, et donc évaluer l'incertitude sur y par $\sigma_y^2 = \dfrac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx_i\right)^2$, le 2 venant des deux paramètres A et B. L'incertitude sur y étant maintenant estimée, on peut évaluer l'incertitude sur A par propagation des incertitudes dans l'expression précédente de A. On trouve $\sigma_A = \sigma_y\sqrt{\dfrac{\sum x^2}{\Delta}}$ et $\sigma_B = \sigma_y\sqrt{\dfrac{N}{\Delta}}$.

On suppose que l'incertitude sur l'abscisse est négligeable et que l'incertitude sur l'ordonnée est la même pour tous les points. La technique de détermination des incertitudes sur les paramètres repose sur l'assimilation entre écart modèle-données et l'incertitude sur l'ordonnée.

3 Prise en compte des incertitudes

On voit que dans la technique usuelle, on fait une évaluation a posteriori de l'incertitude sur y. On choisit maintenant de minimiser toujours l'écart quadratique $y - Ax - B$, mais on pondère chacun des éléments par l'inverse de la variance et on en profite pour prendre en compte l'incertitude sur x. On a $\hat{y} = y + \delta y + A\delta x$, $\hat{y}$ valeur mesurée, y valeur « vraie » en x et δx, δy variables aléatoires centrées, la variance associée à y est donc $\sigma_y^2 + (A\sigma_x)^2$, par addition des variances. On minimise donc $\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\left(y_i - A - Bx_i\right)^2}{\sigma_y^2 + (A\sigma_x)^2}$, c'est la méthode du χ^2. Il *suffit* alors de faire le même calcul qu'au §2, pour déterminer A et B, on fait apparaitre le coefficient de pondération $k_i = \dfrac{1}{\sigma_y^2 + (A\sigma_x)^2}$ dans les sommes.

$$\Delta = \sum k \sum(kx^2) - \left(\sum kx\right)^2 \,;\ A = \frac{\sum(kx^2)\sum(ky) - \sum(kx)\sum(kxy)}{\Delta} \,;\ B = \frac{\sum k \sum(kxy) - \sum(kx)\sum(ky)}{\Delta}$$

Et de même pour les incertitudes

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum(kx^2)}{\Delta}} \,;\ \sigma_B = \sqrt{\frac{\sum k}{\Delta}}.$$

Le test du χ^2 affiche un χ^2 réduit $\dfrac{\chi^2}{n-p}$, avec n nombre de données et p nombre de paramètres. Ce χ^2 réduit devrait être proche de 1, si le modèle est correct et si les incertitudes données pour les grandeurs sont des incertitudes-type.

Remarque dans le cas simple où l'incertitude sur x est quasi-nulle et celle sur y constante, on devrait retrouve le même incertitude sur les paramètres que dans le cas précédent, sinon cela signifierait un χ^2 réduit relativement différent de 1, de mauvais augure.

4 Fonction quelconque

Ce qui est important dans les relations précédentes est que $y = A + B \cdot \mathrm{f(x)}$, avec dans le cas usuel $f(x) = x$, autrement dit la linéarité qui compte dans le calcul est celle relative à A et B. Dans le cas d'une fonction quelconque $y = \mathrm{f(x, A, B)}$, on suppose donc que, localement en A et B, f est bien une fonction linéaire de A et B et on applique les relations précédentes.

5 Prise en compte des incertitudes

Cette fois on minimise l'écart quadratique $y - \mathrm{f(x)}$. On a $\hat{y} = y + \delta y + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta x$, $\hat{y}$ valeur mesurée, y valeur « vraie » et δx, δy variables aléatoires centrées, la variance associée à y est donc $\sigma_y^2 + \left(\dfrac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}x}\sigma_x\right)^2$, par addition des variances.

Les points de la courbe $y(x)$ sont pondérés par leur incertitude à la fois en x et en y : le coefficient de pondération est de $\dfrac{1}{u(y)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 u(x)^2}$ si $u(y)$ et $u(x)$ sont les incertitudes données dans l'onglet correspondant. Pour que les incertitudes soient actives, il faut qu'elles soient définies pour toutes les grandeurs expérimentales (double clic sur l'en-tête du tableau de valeurs pour l'éditer) et que vous ayez coché la case « méthode du chi2 » dans la boite de dialogue options obtenue à l'aide du menu local de la modélisation accessible par le clic droit. Une incertitude peut éventuellement être à zéro (cas du temps fréquemment).