

MÉTHODE D'ÉVALUATION

L'avenir des incertitudes de mesure passe par Monte-Carlo

Le résultat du mesurage d'une grandeur physique n'a de sens que s'il est associé à une indication quantitative sur la qualité du résultat. Les métrologues disposent depuis quelques années d'une méthode de référence, que l'on appelle le *Guide to the expression of uncertainty in measurement* ou GUM, pour leur permettre d'évaluer les incertitudes de mesure de leurs équipements. Cette méthode a toutefois des limites et elle n'est alors plus forcément adaptée à la complexification des essais et des mesures actuels. C'est l'une des raisons pour lesquelles le *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM) a ajouté la méthode numérique de Monte-Carlo au travers du supplément 1 du GUM.

Même avec l'appareil le plus perfectionné au monde, les mesures obtenues avec ce dernier ne seront jamais rigoureusement exactes. Elles seront toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes, selon le protocole choisi, le rôle de l'opérateur... Le résultat du mesurage d'une grandeur physique, quelle qu'elle soit d'ailleurs, n'a de sens que s'il est associé à une indication quantitative sur la qualité du résultat. Il s'agit de permettre aux personnes

qui l'utiliseront d'estimer la fiabilité de la valeur. En l'absence d'une telle indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés entre eux ou par rapport aux valeurs de référence données dans une spécification, une norme, etc. Depuis 1995, et l'apparition de la première version du *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM) ou *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, les métrologues et autres utilisateurs disposent d'une méthodologie unifiée.

Le GUM affiche quelques limites

Le *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM), le comité dépendant du Bureau international des poids et mesures (BIPM) en charge des travaux sur le GUM, avait notamment mis l'accent sur la facilité de compréhension de la procédure. Le document est entre autres assez directif et il a été traduit en français, cela ayant ainsi permis de rendre très larges l'acceptation et la diffusion du GUM dans l'industrie. Avec une formation minimale adéquate, un non-spécialiste peut en effet dérouler la procédure définie dans le guide via un tableur Excel, par exemple. Le GUM est ainsi devenu le document de référence pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude du résultat d'un mesurage. Il est d'ailleurs préconisé en France par le Cofrac et, aujourd'hui, largement répandu dans les laboratoires de métrologie et d'es-

sais, ainsi que dans de nombreux secteurs industriels. Il existe toutefois d'autres techniques pouvant être employées, si cela est justifié, comme les méthodes bayésiennes⁽¹⁾ ou les simulations de Monte-Carlo. Son bon côté opérationnel, c'est-à-dire la facilité à être mis en œuvre, ne doit en effet pas occulter les différentes limites du guide pour l'expression de l'incertitude de mesure. Il s'appuie sur la loi de propagation des variances pour le calcul de l'incertitude type composée qui est estimée à partir d'un développement de Taylor du 1^{er} ordre (approximation linéaire) appliqué au modèle du processus de mesure :

$$v(y) = \sum_{i=1}^N (\partial f / \partial x_i)^2 v(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)$$

où v est la variance, en fait le carré de l'incertitude type composée; y est la variable associée à la grandeur Y ; la dérivée partielle est le modèle dérivable; x est l'entrée; la covariance (cov) peut être vue comme le moment centré conjoint d'ordre 1 de deux variables aléatoires. Signalons que le GUM prend également en compte des développe-

ments de Taylor du 2^e ordre (approximation quadratique), voire au-delà, mais les calculs s'en trouvent grandement compliqués.

Dans le cas d'une approximation linéaire (développement de Taylor au 1^{er} ordre), le calcul requiert la validité d'un certain nombre d'hypothèses mathématiques. Le modèle ne doit d'abord pas présenter de non-linéarité significative. Dans le cas contraire, les hypothèses de départ et donc l'approximation linéaire ne sont alors plus valables. Les dispersions observées autour des points nominaux doivent, quant à elles, à la fois être faibles pour chacune des variables du processus de mesure, être comparables du point de vue de leur ordre de grandeur et présenter des distributions symétriques. Pour finir, la distribution de la grandeur de sortie du modèle doit présenter un profil gaussien pour un calcul et une interprétation aisés de la valeur du facteur d'élargissement k .

Lorsqu'on utilise la méthode d'évaluation de l'incertitude du GUM, on se doit d'exprimer la valeur y attribuée au mesurande Y avec une incertitude élargie U . Celle-ci est une grandeur définissant un intervalle symétrique autour du résultat d'un mesurage, dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pouvaient être attribuées raisonnablement au mesurande. U s'obtient en multipliant l'incertitude type composée u_c associée à la valeur mesurée – u_c est la racine carrée de la variance $v(y)$ – par un facteur d'élargissement k (selon l'ISO/CEI Guide 99:2007). Le choix de ce facteur k peut toutefois être délicat. L'incertitude élargie U n'est pas un intervalle de confiance, mais il existe un consensus, celui de prendre une valeur de k égale à 2 pour la majorité des calculs d'incertitude. Cette valeur n'est pas prise au hasard. Dans le cas d'une loi normale (loi de Gauss), ce qui est une hypothèse implicite dans notre cas, une valeur de k de 1,96 correspond en effet à un niveau de confiance de 95 %. Avec une valeur de k de 3, le taux de confiance grimpe à plus de 99 %...

S'il veut donner du sens à ses résultats de mesure, l'utilisateur doit donc s'imposer une

certaine rigueur mathématique pour appréhender les hypothèses de départ. Ou alors il peut se tourner vers les simulations de Monte-Carlo. Cette méthode numérique permet en effet de traiter les cas où toutes les hypothèses de la loi de propagation des variances et les concepts associés ne sont pas vérifiés. Le principe des simulations de Monte-Carlo n'est plus de propager l'incertitude via le modèle, mais la fonction de densité de probabilité (PDF) des grandeurs d'entrée. La PDF de chacune de ces dernières étant connue, celle du mesurande peut être obtenue d'une manière analytique par la formule de Markov. En pratique, excepté pour des modèles très simples, l'intégrale multiple ne peut pas être évaluée analytiquement. C'est la raison pour laquelle le supplément 1 du GUM fournit une méthode numérique mettant en application la propagation des distributions via la méthode de Monte-Carlo.

Cette approche numérique peut se résumer en quatre étapes. L'étape 1 concerne l'analyse du processus de mesure afin, dans un premier temps, de définir le mesurande (mode opératoire, procédures d'essais, grandeurs d'influence). Elle est primordiale, car elle conditionne la réussite de tout ce qui va suivre, mais elle reste inchangée quelle que soit la méthode mise en œuvre (GUM, Monte-Carlo, etc.). Cette étape demande un

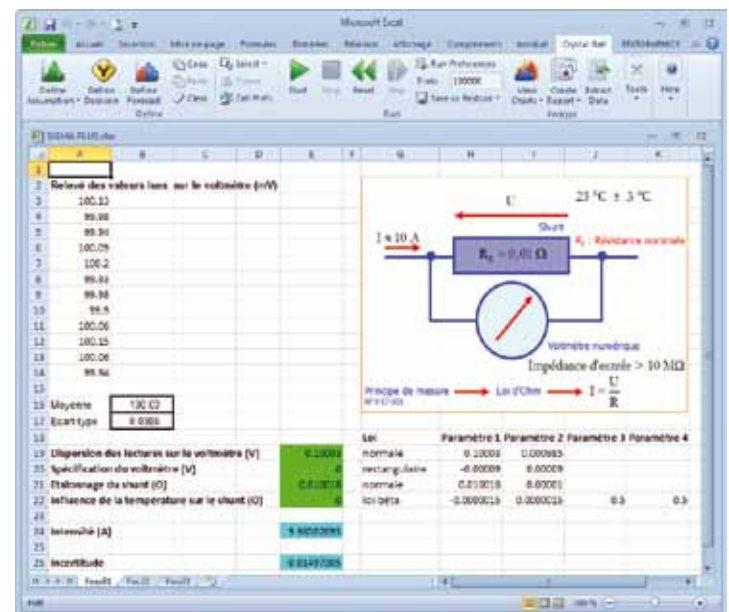
examen et une connaissance approfondis de la grandeur mesurée, du processus de mesure et du mode opératoire utilisé (expertise métier). Comme il s'agit aussi de la phase la plus chronophage de la démarche, il peut être pertinent que le métrologue s'associe à une autre personne, un statisticien par exemple. Après avoir bien défini le mesurande (sans oublier, par exemple, de spécifier les conditions d'environnement de la mesure), l'analyse du processus de mesure permet de lister l'ensemble des grandeurs d'influence. Un diagramme des 5M est un moyen pratique de synthétiser cette information. Il reste ensuite à écrire le modèle mathématique qui relie le mesurande aux grandeurs d'influence sous la forme : $Y = f(X_1, \dots, X_n)$.

Mélanger informations métiers et statistiques

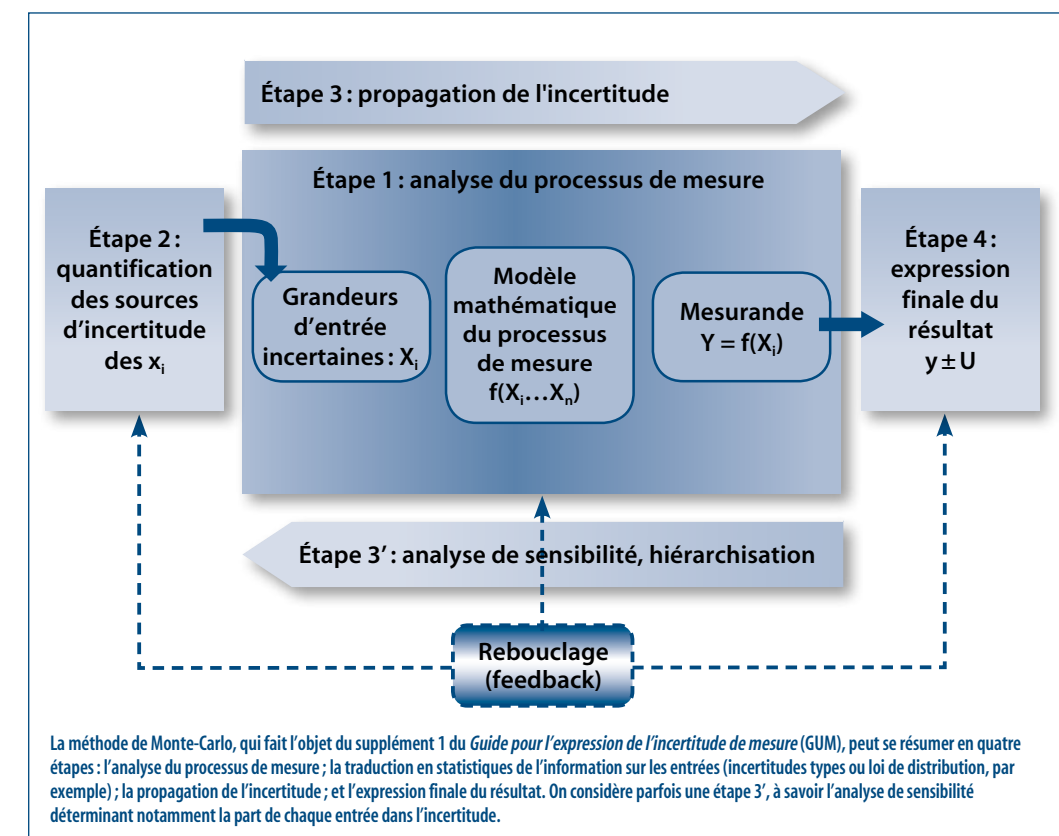
Une fois l'analyse du processus de mesure faite, le métrologue peut passer au choix des distributions pour les grandeurs d'entrée du modèle. L'étape qui est en fait la traduction en statistiques de l'information sur les entrées revêt une grande importance dans la méthode de propagation des distributions par simulations de Monte-Carlo. Pour disposer des connaissances sur les grandeurs d'entrée auxquelles on veut associer une variable aléatoire régie par la loi de probabilité →

L'essentiel

- Les métrologues, les statisticiens et autres utilisateurs s'appuient couramment sur le GUM pour évaluer et exprimer l'incertitude associée au résultat d'un mesurage.
- Si le GUM est devenu la référence, d'autres méthodes peuvent être mises en œuvre, comme les simulations de Monte-Carlo.
- Cette méthode qui fait l'objet d'un supplément permet de lever les hypothèses de départ qu'impose le GUM.



Pour évaluer l'incertitude de mesure de leurs moyens, les métrologues utilisent de plus en plus une méthode de propagation de distribution, à savoir les simulations de Monte-Carlo, en complément de la méthode de référence (GUM).



Exemple d'application : calcul pour le modèle d'un étalonnage de masse

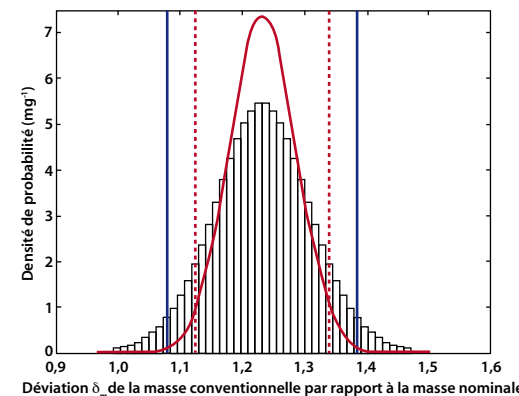
Considérons l'étalonnage d'une masse M de densité massique ρ_M par rapport à une masse de référence R de densité massique ρ_R et qui a essentiellement la même masse, avec une balance et l'opération se faisant dans l'air ambiant de densité massique ρ_a . En utilisant le principe d'Archimède et certaines approximations, on obtient le modèle suivant :

$$\delta m = (m_{R,C} + \delta m_{R,C}) \left[\left(1 + (\rho_a - \rho_{ao}) \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right) - m_{nom} \right]$$

où $m_{R,C}$ et $\delta m_{R,C}$ sont deux distributions gaussiennes d'espérance de 100 000 mg et de déviation standard de 0,050 mg pour la première, et de 1,234 mg et de 0,020 mg pour la seconde ; ρ_a , ρ_M et ρ_R sont trois distributions rectangulaires d'espérance de 1,20 kg/m³ et de demi-hauteur de 0,10 kg/m³ pour la première, de 8000 kg/m³ et de 1 000 kg/m³ pour la seconde, et de 8000 kg/m³ et de demi-hauteur de 50 kg/m³ pour la troisième ; ρ_{ao} vaut 1,2 kg/m³ et m_{nom} vaut 100 g. Les résultats obtenus avec la méthode du GUM avec des termes du premier ordre (GUF₁), les simulations de Monte-Carlo (MCM) et la méthode du GUM avec des termes d'un ordre supérieur (GUF₂) sont résumés dans le tableau ci-dessous, où $\hat{\delta m}$ est une estimation de δm , $u(\hat{\delta m})$ est l'incertitude standard associée. Le graphique représente les approximations de la fonction de densité de probabilité (PDF) pour une quantité δm obtenue avec la méthode GUM (termes du premier ordre ; courbe en rouge) et les simulations de Monte-Carlo. Les paires de traits verticaux représentent les intervalles de couverture à 95 % respectifs.

Méthode	$\hat{\delta m}$ (mg)	$u(\hat{\delta m})$ (mg)	Intervalle à 95 % le plus faible	Différence basse (mg)	Différence haute (mg)	GUF validé ($\delta = 0,005$) ?
GUF ₁	1,234	0,0539	[1,1285, 1,3395]	0,0451	0,0430	Non
MCM	1,2341	0,0754	[1,0834, 1,3825]			
GUF ₂	1,2340	0,0750	[1,0870, 1,3810]	0,0036	0,0015	Oui

Source : Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method (JCGM 101:2008)



→ la mieux adaptée (loi normale, loi rectangulaire, distribution conjointe...), un véritable dialogue doit s'établir entre les gens du métier, l'éventuel statisticien et le métrologue. L'objectif commun est de rassembler l'ensemble des informations (données observées, constats de vérification, certification d'étalonnage, avis d'expert, fiches techniques...) et de les quantifier. Il faut savoir que, dans l'approche du GUM, on attribue déjà une distribution à une grandeur d'entrée lorsque celle-ci est évaluée via une méthode de type B. On choisit en effet une loi de probabilité basée sur l'information disponible sur la grandeur d'entrée, puis on déduit l'incertitude type de cette grandeur comme étant l'écart type de la distribution choisie. La formule de propagation de l'incertitude utilise donc ce paramètre unique pour calculer l'incertitude type de la grandeur de sortie, indépendamment de la forme de la loi de probabilité. Si la distribution est résumée à un unique paramètre dans la méthode du GUM (l'écart type si on met de côté le résultat), on cherche, avec les simulations de Monte-Carlo, à propager la distribution complète de chaque grandeur d'entrée dans le modèle pour obtenir directement celle de la grandeur de sortie. L'information fournie en entrée est alors

bien plus riche (une distribution au lieu d'un écart type), ce qui permet d'obtenir également une information qui l'est tout autant sur la grandeur de sortie.

Analyse de sensibilité et optimisation

En plus des lois de chaque variable aléatoire, la définition d'une structure de dépendance peut être également nécessaire pour prendre en compte des grandeurs d'entrée liées. La prise en compte des corrélations est facilement réalisable dans le cas où les grandeurs d'entrée corrélées sont distribuées suivant des lois normales. Elles sont traitées ensemble au sein d'un même vecteur auquel on attribue une loi normale multivariée. La génération de lois de probabilité jointes non gaussiennes est plus difficile à mettre en œuvre et nécessite une modélisation mathématique plus élaborée, via des copules⁽²⁾, pour être appliquée de manière adéquate. Si les copules sont un concept que l'on rencontre assez souvent dans les industries aéronautique et nucléaire, elles font seulement leurs premiers pas dans le domaine de la mesure en raison de la complexification des essais et des mesures. Lorsque toutes les distributions des grandeurs d'entrée ont été définies, on peut alors

dérouler l'étape 3 qui consiste à simuler numériquement des échantillons de valeurs possibles pour les grandeurs d'entrée, puis à en déduire les valeurs correspondantes pour la grandeur de sortie. Cela nécessite avant tout de disposer d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Comme il existe de nombreux algorithmes de génération, il faut s'assurer de la qualité du générateur utilisé et de son adéquation à certaines exigences. Il s'agit d'une grande période pour ne pas reproduire la même séquence de valeurs avant un nombre très élevé de tirages, également de l'indépendance entre les valeurs créées, et de l'adéquation de l'échantillon généré d'une grandeur d'entrée avec la loi de probabilité qu'on souhaite simuler.

Au niveau de la propagation des distributions par la méthode de Monte-Carlo, on se donne, dans un premier temps, un nombre M de simulations. Le supplément 1 du GUM recommande une valeur de M égale à un million de simulations, de façon à s'assurer que la distribution empirique de la grandeur de sortie est suffisamment stable. A chaque pas de l'algorithme de Monte-Carlo, on tire une valeur dans chaque distribution, puis on calcule celle de la grandeur de sortie correspondant à ce jeu de valeurs via le modèle mathématique f . On obtient ainsi au total

M valeurs possibles pour les grandeurs d'entrée, distribuées suivant les lois de probabilité définies à l'étape 2, et M valeurs possibles pour la grandeur de sortie.

Dans le cas où un million de simulations sont trop coûteuses en temps de calcul ou trop longues à converger, on peut envisager une procédure adaptative dans laquelle on simule un petit échantillon, par exemple 10 000 valeurs, puis un second de même taille dans le but de comparer les deux estimations d'écart type obtenues (méthode quasi Monte-Carlo). Si la différence entre les deux valeurs obtenues est satisfaisante au regard de la précision numérique souhaitée, on arrête la simulation. Dans le cas contraire, on simule un nouvel échantillon de 10 000 valeurs, puis on réitère la procédure jusqu'à ce que la convergence de l'algorithme de Monte-Carlo soit satisfaisante au regard de la précision numérique souhaitée. On considère parfois une étape 3' qui n'est pas dans le GUM mais qui en est un corollaire. Il s'agit de l'analyse de sensibilité permettant notamment de déterminer la part de chaque entrée dans l'incertitude, ce qui autorise une optimisation plus pertinente de l'approximation et donc du processus de mesure, ou les grandeurs les plus influentes pour investir d'une manière la plus optimale. Pour terminer, la quatrième étape consiste à résumer l'information que constituent ces M valeurs possibles pour la grandeur de sortie, et à obtenir l'expression finale du résultat. Pour des raisons de cohérence avec la méthode de référence, on doit fournir au minimum les trois informations suivantes. La moyenne empirique, calculée à partir des M valeurs obtenues pour la grandeur de sortie, sera la valeur y attri-

bue au mesurande. Les deux autres informations sont l'écart type des M valeurs obtenues pris comme incertitude type, et les bornes d'un intervalle élargi à 95 % et construit à partir des quantiles⁽³⁾ empiriques des M valeurs obtenues.

Pas d'hypothèses de départ "fortes"

Il n'est donc plus question de s'interroger sur le choix du facteur d'élargissement k pour le passage entre incertitude type composée et incertitude élargie, comme c'est le cas avec la méthode GUM. Parmi les autres avantages des simulations de Monte-Carlo, signalons l'absence de calcul de dérivée partielle nécessaire et la disparition de limites de validité de la méthode liées à la non-linéarité du modèle du processus de mesure et/ou aux variations "fortes" sur les grandeurs d'entrée. Comme ils n'ont également plus à se poser de questions sur le type de distribution représentant la sortie (gaussienne ou non), les utilisateurs peuvent ainsi s'appuyer sur un cadre mathématique universel et un éventail plus grand, en termes d'applications, que celui de la méthode du GUM. Il est même possible, et recommandé, de mettre en œuvre les résultats de la méthode de Monte-Carlo pour valider ceux obtenus par la méthode du GUM. Du point de vue opérationnel, la méthode de propagation de distribution (Monte-Carlo) n'est certes pas aussi simple d'utilisation qu'une méthode de propagation des incertitudes (GUM ; également désignée méthode de cumul quadratique). Il y a déjà un frein immédiat lié à la langue. Le JCGM n'a pas traduit en français le supplément 1 du GUM, sans compter que le document est très

orienté statistiques. La commission ad hoc de l'Afnor a toutefois en charge d'éditer un fascicule de documentation en français pour rendre l'application plus facile. Les métrologues et autres utilisateurs peuvent aussi s'appuyer sur des outils qui ne requièrent pas forcément des compétences très poussées. Des logiciels comme Crystal Ball d'Oracle, distribué en France par Sigma Plus, ou Matlab de Mathworks, restent relativement accessibles et répondent très bien aux besoins des utilisateurs, si tant qu'ils sont formés. Il suffit que ces outils soient dotés d'un bon générateur de nombres aléatoires et, éventuellement, de fonctions dédiées plus ou moins performantes. Il faut également que ces logiciels soient validés. D'autres outils sont par ailleurs disponibles sur le marché, comme le langage de programmation open source R qui est plutôt destiné aux statisticiens et à la communauté académique, des add-in pour le tableur Excel qui sont toutefois plus ou moins validés. Pour une entreprise, le choix d'une solution d'évaluation des incertitudes de mesure est donc un compromis entre fiabilité et diffusion.

Nicolas Fischer*

(1) Le théorème de Bayes est utilisé dans l'inférence statistique pour actualiser les estimations d'un paramètre quelconque à partir des observations et des lois de probabilité de celles-ci.
(2) En statistiques, une copule est un objet mathématique venant de la théorie des probabilités et qui permet de caractériser la dépendance entre les différentes coordonnées d'une variable aléatoire.
(3) Les quantiles sont des points essentiels pris à des intervalles réguliers verticaux d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire.
(*) Nicolas Fischer est responsable du service Mathématiques et statistiques du Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE).

Calibrateur multifonction Beamex® MC5 Logiciel métrologique Beamex® CMX



Améliorer la qualité de ses étalonnages tout en économisant.

La solution d'étalonnage intégrée Beamex améliore la qualité et l'efficacité de l'ensemble du système d'étalonnage grâce à une gestion plus rapide, plus intelligente et plus précise de l'ensemble des outils et des procédures. Les calibrateurs, stations de travail, logiciels d'étalonnage et services professionnels de Beamex constituent le système automatisé le mieux intégré qui existe.



Dimelco S.A.S
Tel: 33 (0) 3 20 62 06 80
Fax: 33 (0) 3 20 96 95 62
contact.beamex@dimelco.com
www.dimelco.com

beamex
WORLD-CLASS CALIBRATION SOLUTIONS™
info@beamex.com
www.beamex.com

Comparatif entre la méthode LPU et la méthode de Monte Carlo

Le tableau comparatif [Figure 19] permet de visualiser rapidement les différences entre ces deux méthodes complémentaires. C'est principalement dans le développement du calcul de sensibilité qu'elles diffèrent. En effet, dans la méthode du GUM, il est nécessaire d'obtenir explicitement le modèle mathématique qui est dérivé au premier ordre pour rester dans le domaine linéaire afin de propager plus facilement les variances. Tandis que la méthode de Monte Carlo se base sur des tirages (calcul) nombreux, dans ce cas il n'est pas nécessaire d'effectuer cette dérivation. Le fait d'effectuer de nombreux tirages permet de propager les distributions sans hypothèse de linéarité.

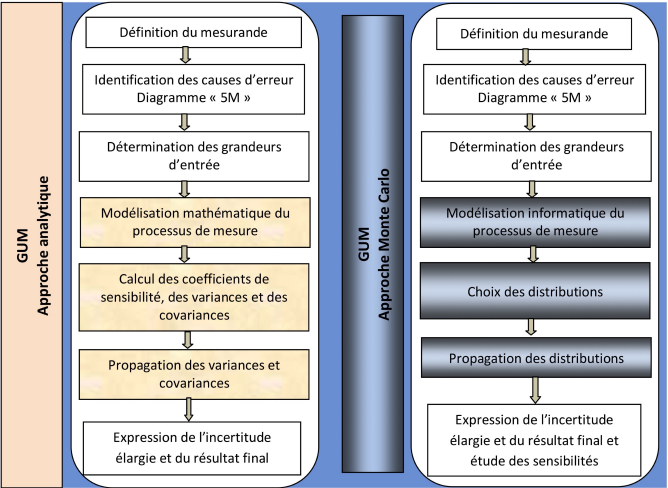


Schéma comparatif des deux méthodes pour l'estimation des incertitudes de mesure, le GUM et son Supplément 1 sur la méthode de Monte Carlo (d'après 0)

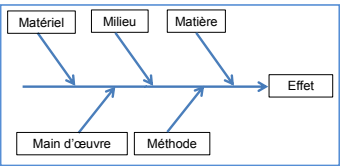


Figure 1 : Diagramme 5M

Les 5 M correspondent donc à :

- **Matière** : il s'agit de l'élément qui fait l'objet du processus de mesure et que l'on souhaite mieux connaître à travers l'évaluation d'une grandeur
- **Moyens** : il s'agit des instruments, des éventuels étalons en particulier dans les méthodes de comparaison et d'une façon générale de tout ce qui est matériellement nécessaire au processus et qui n'est pas considéré dans l'item précédent
- **Méthode** : il s'agit du mode opératoire, des opérations de calculs etc. c'est-à-dire de toute la logique de mise en œuvre du processus. Par exemple, il est évident qu'une méthode qui consiste à faire un mesurage ou une méthode qui consiste à faire dix fois le mesurage et à considérer la moyenne ne conduit pas aux mêmes incertitudes
- **Main-d'œuvre** : il s'agit de prendre en compte les interventions humaines. Généralement, ceci est inclus dans les études de répétabilité et de reproductibilité de mesure
- **Milieu** : il s'agit de prendre en compte l'environnement dans lequel on travaille et plus particulièrement, la température, l'hygrométrie, la pression, les vibrations etc.

ÉVALUATION DE L'INCERTITUDE EN UTILISANT LES SIMULATIONS DE MONTE CARLO

M. Désenfant *, N. Fischer *, B. Blanquart **, N. Bédiait**

*Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE)

** Centre Technique des Industries Aéronautiques et Thermiques (CETIAT)

Résumé

Le premier supplément du GUM [1], traitant de l'évaluation de l'incertitude par propagation des distributions, doit paraître en 2007 [2]. Ce supplément, qui utilise la méthode numérique de Monte Carlo permet de traiter les cas où toutes les hypothèses de la loi de propagation des variances (méthode LPU) et les concepts associés ne sont pas vérifiés. Nous exposons les différentes étapes de la méthode de Monte Carlo (MCM) ainsi que ses avantages. Pour illustrer cette technique, nous présentons deux exemples appliqués à la métrologie et aux essais, en mettant en parallèle la propagation des variances et la propagation des distributions.

Abstract

The supplement 1 to the GUM, dealing with the evaluation of uncertainty using the propagation of distributions, will be published this year. This supplement, based on a Monte Carlo method (MCM), allows one to deal with the evaluation of uncertainty even when the hypotheses of the law of propagation of uncertainty (LPU) are not verified. We describe the different steps of the MCM and its advantages. Then to illustrate the method, we present two examples in the fields of metrology and testing and we compare the results given by both methods.

Introduction

Le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM) s'appuie sur la loi de propagation des variances (LPU) pour le calcul de l'incertitude-type composée. Celle-ci est estimée à partir d'un développement de Taylor appliqué au modèle du processus de mesure; le calcul requiert donc la validité d'un certain nombre d'hypothèses mathématiques. En premier lieu, le modèle ne doit pas présenter de non-linéarité significative. Les dispersions observées doivent être faibles pour chacune des variables du processus de mesure, comparables du point de vue de leur ordre de grandeur et doivent présenter des distributions symétriques. Enfin, la distribution de la grandeur de sortie du modèle doit présenter un profil gaussien pour pouvoir calculer et interpréter aisément la valeur du facteur d'élargissement k .

D'un point de vue strictement opérationnel, l'application de la loi de propagation de l'incertitude nécessite la dérivation du modèle du processus de mesure par rapport à chacune de ses variables afin d'en estimer les coefficients de sensibilité.

Outre les hypothèses mathématiques de dérivabilité du modèle, son application peut se révéler délicate dans un contexte industriel. Elle peut constituer un frein à l'avancement du calcul et une source d'erreur potentielle.

Une alternative à ce calcul est aujourd'hui décrite dans le premier supplément du GUM, à paraître en 2007 [1]. Le métrologue se voit proposé d'utiliser les outils de simulation numérique et en particulier la méthode de Monte Carlo pour propager non pas uniquement deux statistiques (moyenne et variance) mais les distributions de variables décrivant le processus de mesure.

A titre d'illustration, les deux méthodes d'estimation de l'incertitude-type composée ont été appliquées à deux processus de mesure distincts afin de dégager les points forts de chacune d'entre elles et les difficultés qui peuvent survenir dans le cadre de leur mise en œuvre.

Le premier de ces exemples relève de l'activité de qualification des performances de composants thermiques, menée par le Centre Technique des Industries Aéronautiques et Thermiques. Il s'agit du processus de détermination de la puissance thermique fournie, par exemple, par une chaudière et dont l'incertitude est classiquement obtenue à l'aide de la loi de propagation.

Le second exemple est emprunté à la métrologie des masses, il concerne la détermination de la masse conventionnelle d'un corps.

Propagation des distributions par la méthode de Monte Carlo

Compte tenu des limites et contraintes de la méthode LPU décrite dans le GUM pour évaluer l'incertitude de mesure, une approche alternative a été développée. Cette approche connue sous le terme de méthode de Monte Carlo (MCM) fait l'objet du supplément 1 au GUM à paraître prochainement. Il est important de noter que ce supplément ne vient pas remplacer la norme NF-ISO 13005 (GUM) mais la compléter.

Le principe de cette méthode n'est plus de propager l'incertitude via le modèle, mais la fonction de densité de probabilité (PDF) des grandeurs d'entrée afin d'obtenir la

PDF associée au mesurande. La PDF de chaque grandeur d'entrée étant connue, la PDF du mesurande Y peut être analytiquement obtenue par la formule de Markov. En pratique, mis à part pour des modèles très simples, l'intégrale multiple ne peut pas être évaluée analytiquement. Ainsi le supplément 1 au GUM fournit une méthode numérique qui met en application la propagation des distributions en utilisant une méthode de Monte Carlo (MCM).

Cette approche alternative peut se résumer étape par étape, voir la figure 1, selon le processus suivant :

1. Définir le mesurande, le processus de mesure, les facteurs d'influence et expliciter le modèle mathématique. Cette étape, essentielle, est en fait commune à toutes les méthodes d'évaluation de l'incertitude.
2. Associer à chaque grandeur d'entrée une distribution (normale, rectangulaire, etc.) ou une distribution conjointe dans le cas de variables corrélées. Ce choix doit être fait en tenant compte de l'information disponible et selon le

principe du maximum d'entropie. C'est-à-dire choisir la PDF g qui maximise l'entropie S:

$$S[g] = - \int g_x(\xi) \ln g_x(\xi) d\xi$$

3. Générer M réalisations de chaque grandeur d'entrée par tirages dans leur PDF. Pour effectuer ces simulations, il est nécessaire de disposer d'un générateur de nombres pseudo aléatoires suffisamment performant (il doit passer un certain nombre de tests). Le supplément 1 au GUM préconise de procéder à $M = 10^6$ tirages.
4. Calculer via le modèle mathématique les M valeurs obtenues de la grandeur de sortie, ce qui permet de construire la distribution empirique du mesurande.
5. Synthétiser l'information obtenue sur le mesurande en restituant :
 - a. L'espérance mathématique
 - b. L'écart type
 - c. L'intervalle le plus court au niveau de probabilité spécifié (souvent 95%)

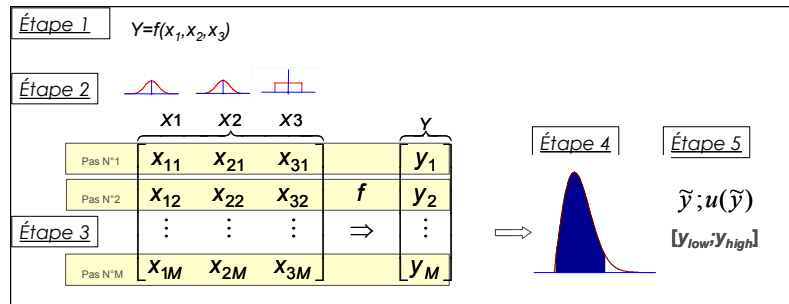


Figure 1 – Les différentes étapes de la méthode de Monte Carlo

La méthode d'évaluation de l'incertitude par propagation des distributions ainsi décrite présente plusieurs avantages par rapport à l'approche traditionnelle basée sur la loi de propagation de l'incertitude :

- plus aucun calcul de dérivée partielle n'est nécessaire
- plus de limite de validité de la méthode liée à la non linéarité du modèle et/ou des incertitudes " fortes " sur les grandeurs d'entrée.
- plus aucune difficulté liée au choix du facteur d'élargissement.

De plus selon le supplément 1 du GUM (sub. 8.1.1), le cadre de validité de la MCM est plus large que celui de la méthode LPU. Par conséquent, il est recommandé d'utiliser les résultats de MCM pour valider ceux obtenus par la méthode LPU. Une procédure de validation simple est décrite dans le supplément.

Tout d'abord il est nécessaire de déterminer la tolérance δ associée au résultat z calculé. Celui-ci est exprimé sous la

forme $z = c.10^l$ où c est la valeur du dernier digit, n_{dig} , jugé significatif pour z . Alors, on écrira : $\delta = 0,5.10^l$. Prenons l'exemple de l'estimation de l'incertitude $u(y)$ d'une masse où seul un chiffre significatif est retenu. Ceci signifie que, $n_{dig} = 1$, $u(y) = 0,0006$ g, c'est-à-dire $c = 6$ et $l = -4$. La tolérance vaut alors : $\delta = 0,5.10^{-5}$ g.

La seconde étape du processus de validation revient à comparer les incertitudes élargies obtenues par chacune des méthodes. On forme les différences :

$$d_{low} = |y_{lowLPU} - y_{lowMCM}|$$

$$d_{high} = |y_{highLPU} - y_{highMCM}|$$

Si ces différences sont toutes les deux inférieures à la tolérance préalablement déterminée, alors les résultats obtenus par la méthode LPU auront été validés. Dans le cas contraire, il faudra s'en tenir aux résultats obtenus par la méthode MCM.

Application dans le domaine des essais

Le CETIAT, Centre technique des Industries Aéronautiques et Thermiques, réalise des essais de performances thermiques de composants (chaudières, climatiseurs, etc.). Un processus de mesure fréquent est la détermination de la puissance thermique d'un composant. Celle-ci est déterminée par un ensemble de mesurages (température d'entrée, température de sortie, débit) et de calculs (enthalpie, puissance).

Description du processus de mesure

Le montage expérimental mis en œuvre lors de la détermination de la puissance thermique récupérée au circuit secondaire d'un échangeur de chaleur est représenté figure 2.

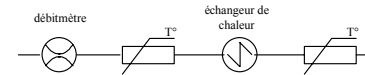


Figure 2 – Dispositif de mesure de la puissance thermique

La puissance thermique est le produit de la valeur du débit massique d'eau circulant dans l'échangeur par la différence d'enthalpie massique mesurée aux bornes de ce dernier, selon la relation :

$$P = q_m \cdot [h(T_s) - h(T_e)]$$

avec

q_m : débit massique d'eau dans l'échangeur, en $kg.s^{-1}$

T_s : température de l'eau en sortie d'échangeur, en $^{\circ}C$

T_e : température de l'eau en entrée d'échangeur, en $^{\circ}C$

$h(T)$: enthalpie de l'eau à la température T , en $kJ.kg^{-1}$

Le débit est déterminé par un débitmètre massique à effet Coriolis dont les caractéristiques métrologiques sont suivies par un étalonnage périodique. Les températures d'eau en entrée et en sortie de l'échangeur sont mesurées à l'aide de Pt100, étalonnées régulièrement. Les sources d'erreur associées aux mesures sont liées aux caractéristiques métrologiques de l'instrumentation (justesse, répétabilité) et aux conditions de mise en œuvre (stabilité, influence des conditions d'environnement, homogénéité de la température dans la section, etc.).

L'enthalpie est calculée à partir de la température, par une formule de lissage qui présente une erreur de lissage liée à la justesse des valeurs de référence et à la qualité de l'interpolation. Elle est mise sous la forme $h(T) = h(T) + \alpha$, où α représente la correction de lissage, nulle en moyenne et assortie d'une incertitude.

Application de la loi de propagation

En l'absence de corrélations entre les estimations des variables, l'application de la loi de propagation de l'incertitude conduit à l'équation :

$$u_c^2(P) = \left[\frac{\partial P}{\partial q_m} \right]^2 \cdot u^2(q_m) + \left[\frac{\partial P}{\partial T_s} \right]^2 \cdot u^2(T_s) + \left[\frac{\partial P}{\partial T_e} \right]^2 \cdot u^2(T_e) + \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right]^2 \cdot u^2(\alpha)$$

En pratique, ce calcul est directement programmé dans le logiciel de traitement des résultats spécifique aux plates-formes d'essai, dans un onglet Excel. Les informations relatives aux incertitudes-types de type B sont mises à jour en fonction des informations issues du logiciel de gestion de parc tandis que les incertitudes de type A sont calculées à partir des mesures de chaque essai.

Application de la méthode de Monte Carlo

L'application de la méthode de Monte Carlo demande un calculateur spécifique permettant d'obtenir des tirages aléatoires en nombre suffisant ($>10^6$), avec un générateur dont la période est supérieure au nombre de tirages. Le calcul est réalisé dans un logiciel spécifique (BOOST), préalablement validé par application des exemples présentés dans le supplément 1 du GUM. Ce logiciel est indépendant du logiciel de traitement des résultats sur les plates-formes d'essai.

Le logiciel BOOST permet de définir un module pour chaque grandeur du modèle (température d'entrée, température de sortie, débit, etc.) puis de les assembler en un métamodule "puissance". Pour chaque grandeur, l'utilisateur écrit le modèle de manière explicite, en langage C, via une interface de saisie. Enfin, il choisit la valeur numérique de chaque terme du modèle, son incertitude associée et la fonction de probabilité.

Les coefficients de sensibilité du modèle du processus de mesure par rapport à chacune de ses variables peuvent ensuite être estimés (au signe près) selon la méthode décrite en annexe B du supplément 1 du GUM, en effectuant des simulations où les valeurs des autres paramètres sont fixées.

Comparaison des deux méthodes

La méthode de Monte Carlo est utilisée dans le but de conforter les hypothèses d'application de la loi de propagation des incertitudes au processus de mesure considéré. La comparaison des deux méthodes de calcul ne peut être réalisée que par des calculs utilisant les mêmes valeurs d'entrée (exemple en tableau 1) et les mêmes hypothèses sur les fonctions de densité des variables.

Le calcul a été réalisé pour un nombre fini de cas, correspondant aux situations les plus fréquentes rencontrées lors des essais. Il montre que les valeurs d'incertitude obtenues par les deux méthodes sont concordantes. En effet, les écarts observés entre les deux méthodes sont conformes au critère de validité proposé dans le supplément 1 du GUM et sont minimes devant la sensibilité du calcul aux variations d'une variable d'entrée.

La densité de probabilité de la puissance thermique P est représentée sur la figure 3 pour 10^6 tirages aléatoires

correspondant aux valeurs du tableau 1. La courbe gaussienne de même écart-type, représentée par un trait noir, se superpose avec l'histogramme, montrant que l'hypothèse de considérer la PDF de la puissance P comme gaussienne est acceptable.

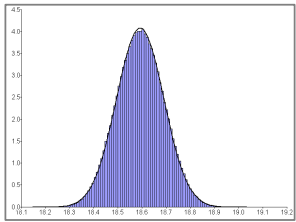


Figure 3 - PDF de la puissance P

Tableau 1 - Exemple de résultats comparés pour un jeu de données d'entrée

Grandeur	Valeur	Unité	Loi de propagation		Monte Carlo	
			Incertitude-type	Coefficient de sensibilité	Incertitude-type	Coefficient de sensibilité
Débit massique q_m	804,6	kg/h	2,9625	$2,31.10^{-2}$	2,9595	$2,31.10^{-2}$
Enthalpie en entrée $h(T_e)$	251,39	kJ/kg	0,2091	$2,24.10^{-1}$	0,2171	$2,23.10^{-1}$
Enthalpie en sortie $h(T_s)$	334,57	kJ/kg	0,2098	$2,24.10^{-1}$	0,2218	$2,23.10^{-1}$
		Unité	Valeur	Incertitude élargie ($k=2$)	Valeur	Incertitude élargie ($k=2$)
Puissance P		kW	18,59	0,19	18,59	0,20

Conclusion

En pratique, la loi de propagation de l'incertitude est utilisée en routine, pour obtenir un résultat dès l'acquisition des données, dans le logiciel de dépouillement des essais. Ce calcul est validé par la comparaison avec l'application de la méthode de Monte Carlo.

Cependant, au-delà du choix du critère de validité, une des limites de la validation est sa représentativité par rapport au domaine de variation des variables du modèle et des incertitudes-types associées à chaque composante.

En effet, l'application de la méthode de Monte Carlo pour la validation de l'application de la loi de propagation en une valeur unique n'est pas suffisante. Pour une validation qui se veut complète, il convient de mener un nombre minimal de simulations, en explorant deux dimensions pour chaque variable du modèle : l'étendue de mesure d'une part et les valeurs d'incertitude-type d'autre part.

Le problème à traiter devient multidimensionnel. Le temps de calcul étant un paramètre non négligeable, il convient de traiter ce cas par l'application des plans d'expérience pour explorer toute la surface de réponse et la comparer à la surface de réponse de l'application de la loi de propagation. Au-delà de la maîtrise des éléments de métrologie permettant de réaliser le bilan des incertitudes, cette validation exige alors la maîtrise des plans d'expérience, couplée à la maîtrise de la simulation numérique.

Application en métrologie

L'application que nous présentons est issue de travaux de l'unité technique Masse du centre de métrologie scientifique et industrielle du LNE. Il s'agit de l'étalonnage en masse conventionnelle d'un étalon de classe F1 à partir d'un étalon de classe E2 [4]. Cet étalonnage a pour particularité de prendre en compte la correction de poussée de l'air. L'exemple présenté dans cette étude est très proche de celui développé dans la partie 9 du supplément 1 au GUM.

Mesurande et processus de mesure

L'étalonnage a pour objet la détermination de la masse conventionnelle de la masse. Le mesurande est donc la masse conventionnelle C_M , d'une masse M. Cette masse conventionnelle d'un corps est égale à la masse d'un étalon de masse volumique 8000 kg.m^{-3} qui équilibre ce corps dans un air de masse volumique $1,2\text{ kg.m}^{-3}$, l'opération étant effectuée à $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ et les paramètres étant définis à cette température.

L'étalonnage d'un étalon de masse (M) consiste à déterminer sa masse par comparaison à la masse (E) d'un étalon de masse. Cette comparaison est faite à l'aide d'un comparateur de masses selon un schéma de substitution de type BORDA doublé.

Modèle mathématique et grandeurs d'entrée

La valeur (C_M) de la masse conventionnelle est donnée par la relation suivante:

$$C_M = C_{Eit} + C_{Ep} + \Delta X + \delta + R + \frac{(a - a_0)(q - r)}{(q - a_0)(r - a)} \times (C_{Eit} + C_{Ep})$$

Avec les symboles suivants :

- C_M : masse conventionnelle de la masse M
- C_{Eit} : étalonnage de l'étalon E
- C_{Ep} : pérennité de l'étalon E
- ΔX : répétabilité des résultats de la comparaison
- δ : erreur de justesse du comparateur pour la différence d'indication (Δ) entre M et E

- R : résolution du comparateur (pas de quantification des indications)
- q : masse volumique de l'étalon E
- r : masse volumique de la masse M
- a : masse volumique de l'air lors de la comparaison
- a_0 : valeur conventionnelle de la masse volumique de l'air = $1,2\text{ kg.m}^{-3}$

Les distributions associées aux grandeurs d'entrée et les paramètres de ces distributions sont résumés dans le tableau 2.

Tableau 2 - Distributions des grandeurs d'entrée

X_i	Distribution	Paramètres			
		Espérance μ	Ecart-type σ	Espérance $x = (a + b)/2$	Demi-étendue $(b - a)/2$
C_{Ei}	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,150 mg	0,025 mg		
C_{Ep}	$R(a, b)$			0	$4,33.10^{-2}$ mg
q	$N(\mu, \sigma^2)$	$8\ 000\text{ kg/m}^3$	15 kg/m^3		
r	$N(\mu, \sigma^2)$	$8\ 000\text{ kg/m}^3$	335 kg/m^3		
R	$T(a,b)$			0	0,01 mg
δ	$R(a, b)$			0	$1,118.10^{-2}$ mg
ΔX	$N(\mu, \sigma^2)$	0,3 mg	0,018 mg		
a	$N(\mu, \sigma^2)$	$1,16\text{ kg/m}^3$	$0,058\text{ kg/m}^3$		
a_0	constante	$1,2\text{ kg/m}^3$			

$N(\mu, \sigma^2)$ signifie loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ
 $R(a, b)$ signifie loi rectangulaire sur le segment $[a,b]$
 $T(a,b)$ signifie loi triangulaire isocèle sur le segment $[a,b]$

Propagation et résultats

Une fois définies les lois associées aux grandeurs d'entrée, on effectue des simulations de Monte Carlo pour obtenir la distribution empirique de la grandeur de sortie. On a procédé à 2.10^5 tirages, nombre suffisant dans cette application pour assurer la convergence des résultats (l'espérance mathématique, l'écart type et l'intervalle à 95%).

Dans le cas de la méthode LPU, un coefficient d'élargissement égal à 2 a été choisi pour calculer l'incertitude élargie. C'est donc sur cette base qu'ont été calculés les intervalles du tableau 3.

Dans ce même tableau est présenté l'ensemble des résultats obtenus par les deux méthodes.

Afin de comparer les deux méthodes, MCM et LPU, nous avons utilisé le critère objectif de validation défini dans [2]. Nous avons considéré, après discussion avec les métrologues, que seul le premier chiffre non nul de l'incertitude-type sur la masse conventionnelle était significatif. Par conséquent nous en avons déduit la valeur de la tolérance δ associée. Puis nous avons

comparé cette valeur aux distances d_{low} et d_{high} entre les intervalles élargis obtenus par les deux méthodes.

Si l'on se limite à un développement au premier ordre de la formule de propagation de l'incertitude (LPU1), les résultats ne sont pas validés. Par contre si l'on prend en compte les termes d'ordres supérieurs et que l'on utilise la formule de propagation de l'incertitude à l'ordre 2, les nouveaux résultats obtenus (LPU2) sont eux bien validés par la méthode de Monte Carlo.

Cet exemple permet ainsi d'illustrer l'une des principales limites de la méthode LPU ; à savoir que lorsque le modèle mathématique n'est pas linéaire, l'approximation d'un développement à l'ordre 1 peut se révéler trop grossière et conduire à des résultats erronés. Dans le cas présent, il apparaît donc nécessaire, pour obtenir des résultats corrects, de développer la formule de propagation à l'ordre 2 (qui nécessite de fastidieux calculs de dérivées partielles) ou d'utiliser la méthode de Monte Carlo.

Tableau 3 - Comparaison des résultats des méthodes LPU et MCM

Méthode	C_M	$u(C_M)$	Plus petit intervalle de confiance à 95 %	d_{low}	d_{high}	LPU validé? ($\delta = 5.10^{-6}$)
	g	g		g	g	
LPU1	100,000450	$4,5.10^{-5}$	[100,000359 ; 100,000541]	$1,6.10^{-5}$	$1,8.10^{-5}$	Non
MCM	100,000492	$5,8.10^{-5}$	[100,000345 ; 100,000559]			
LPU2	100,000450	$5,5.10^{-5}$	[100,000341 ; 100,000559]	$2,5.10^{-6}$	$2,3.10^{-8}$	Oui

Conclusions

Nous avons rappelé succinctement les grands principes de l'évaluation des incertitudes de mesure et évoqué certaines limites et difficultés rencontrées lors de l'utilisation de la méthode de la loi de propagation des incertitudes. Le supplément 1 au GUM fournit quant à lui une méthode alternative basée sur la propagation des distributions utilisant des simulations de Monte Carlo. Nous avons présenté les principales étapes de cette méthode ainsi que certains de ses avantages. Un exemple d'évaluation de l'incertitude sur une mesure de puissance thermique a été exposé et nous a permis de voir que la méthode numérique de Monte Carlo peut venir valider les résultats obtenus par la loi de propagation. Nous avons ensuite présenté un exemple d'évaluation de l'incertitude en métrologie des masses pour lequel on obtient des résultats différents entre les deux méthodes. Nous avons ainsi pu illustrer la nécessité d'utiliser la méthode Monte Carlo lorsqu'une ou plusieurs conditions d'application de la loi de propagation de l'incertitude ne sont plus réunies.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Gérard Perrin, auteur du logiciel BOOST, pour sa contribution à l'étude.

Références

[1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd ed., ISBN 92-67-10188-9, 1995.

[2] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement-Propagation of distributions using a Monte Carlo method, draft.

[3] Bédia N., "Méthode numérique de propagation des incertitudes de mesure (Méthode de Monte Carlo)", NTV 06/022, Note Technique interne CETIAT, 2006, 19 pages.

[4] Gosset A., "Comparaison de masses étalons par substitution. Formules et incertitudes", Note Technique 02 interne LNE/CMSI