



---

# SYSTÈMES LINÉAIRES ET SIGNAUX

---

**Emmanuel BOSSY**  
emmanuel.bossy@espci.fr

Version : 15 Décembre 2014



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Système Linéaire Invariant (SLI)</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions	7
1.2 Exemples de Systèmes Linéaires Invariants	8
1.2.1 En électronique/électricité	8
1.2.2 En optique	8
1.2.3 En propagation d'ondes acoustiques	9
1.3 Caractérisation d'un SLI	9
1.3.1 Approche dans l'espace "physique"	9
1.3.2 Approche dans l'espace transformé	11
1.3.3 Bilan	13
1.4 Terminologie	14
1.5 Retour sur les exemples	14
<b>2 Réponse d'un système linéaire temporel</b>	<b>17</b>
2.1 Causalité et stabilité d'un SLI	17
2.1.1 Causalité	17
2.1.2 Stabilité d'un SLI	17
2.2 Système temporel (linéaire) décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants	18
2.2.1 Equation du système	18
2.2.2 Transformée de Fourier de l'équation	18
2.2.3 Transformée de Laplace de l'équation	19
2.2.4 Rôle des pôles de $H(p)$ et $H_F(\omega)$ pour le comportement du système	19
2.3 Résolution pratique d'une équation différentielle (linéaire et à coefficients constants) avec conditions initiales	20
2.3.1 Méthode générale par transformation de Laplace	20
2.3.2 Etude qualitative du comportement du système	21
2.3.3 Exemple d'un système du premier ordre	21
<b>3 Représentation et Manipulation de Signaux par Transformée de Fourier</b>	<b>25</b>
3.1 Signaux et distributions de base	26
3.2 Interprétation de la transformée de Fourier	29
3.2.1 Discussion sur le cas 1D	29
3.2.2 Cas 2D : TF d'une "image"	29
3.3 Relation d'Incertitude	29
3.3.1 Définition de la largeur d'un signal	29
3.3.2 Relation d'incertitude	30
3.4 Multiplication et Convolution entre signaux	31
3.4.1 Propriétés de la transformation de Fourier pour la multiplication et la convolution	31
3.4.2 Application : multiplication et transformation de Fourier	31
3.4.3 Convolution et peigne de Dirac	33

<b>4</b>	<b>Introduction à l'Échantillonnage</b>	<b>35</b>
4.1	Échantillonnage idéal d'un signal continu	35
4.1.1	Définition	35
4.1.2	Représentation par un peigne de Dirac	35
4.1.3	Transformée de Fourier de la fonction échantillonnée	35
4.2	Echantillonnage sans perte d'information	36
4.2.1	Théorème d'échantillonnage	36
4.2.2	Formule de reconstruction	37
4.2.3	Phénomène de repliement de spectre	37
4.2.4	Remarque sur la TF d'un signal à bande limitée	38
<b>5</b>	<b>Transformée de Fourier d'un signal numérique</b>	<b>39</b>
5.1	Transformée de Fourier Discrète (DFT)	39
5.1.1	Définition	39
5.1.2	Transformation de Fourier Rapide (FFT)	40
5.2	Relation entre FFT d'un signal échantillonné et TF d'un signal continu	40
5.2.1	Hypothèses sur l'échantillonnage	40
5.2.2	Lien entre FFT et TF	40
5.2.3	Phénomènes de périodisation	41
5.3	Estimation d'une TF à l'aide d'une FFT	41
5.3.1	Conditions pour une estimation correcte	41
5.3.2	Exemples	42

# Introduction

L'objectif de ce cours est de familiariser les étudiants avec les notions et outils relatifs aux systèmes linéaires, et à la représentation et à la manipulation des signaux. Les outils techniques pré-requis (transformation de Fourier et de Laplace, théorie des distributions, ...) sont abordés dans le cours de Méthodes Mathématiques de 1<sup>ère</sup> année. Le cours tente d'introduire de manière aussi unifiée que possible des notions communes à de nombreuses matières, notions qui seront par la suite souvent appréhendées avec des points de vue et/ou des terminologies qui diffèrent selon le contexte. Les cours plus particulièrement concernés sont les cours d'électronique et commande de processus, d'électromagnétisme et télécommunications, d'optique et d'acoustique.

Le premier chapitre introduit de façon générale les systèmes linéaires invariants par translation dans le temps ou l'espace. On montre en particulier que de tels systèmes sont entièrement caractérisés dans l'espace physique (temps ou espace) par leur réponse impulsionnelle, ou dans un espace transformé (Fourier ou Laplace) par leur fonction de transfert. Cette première partie se termine par des exemples concrets de systèmes linéaires qui seront rencontrés tout au long de la scolarité (phénomène de propagation d'onde, commande de processus, circuit électronique, imagerie, ...), en insistant sur les terminologies propres à chaque domaine. Le second chapitre est consacré aux systèmes temporels, et en particulier à la description du comportement des systèmes décrits par une équation linéaire à coefficients constants. Une attention particulière est portée à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace, courante en commande de processus. Le troisième chapitre concerne la représentation et la manipulation des signaux dans le domaine de Fourier. La transformation de Fourier est présentée d'une part comme un outil de calcul, mais aussi comme un outil de représentation fréquentielle des signaux, représentation naturelle et intuitive pour la description de nombreux phénomènes physiques. Le quatrième chapitre est une introduction à l'échantillonnage des signaux. On y démontre le théorème de Shannon et la formule de reconstruction d'un signal continu à partir de sa version correctement échantillonnée. Dans le dernier chapitre, on introduit la transformation de Fourier discrète et son implémentation sous forme de FFT, et on discute le lien entre FFT d'un signal échantillonné fini et la TF du signal continu correspondant.

Une première version polycopiée de ce cours a été entièrement rédigée par des élèves de la 125<sup>ème</sup> promotion, Pierrick Cavalié, Matthieu Pebayle et Charles Bourdil. La version actuelle du polycopié est à présent une version profondément remaniée, mais qui a évolué à partir de la version initiée par ces étudiants. Je les remercie vivement pour leur travail, sans lequel la version actuelle de ce polycopié n'existerait pas. Je remercie par avance tous ceux qui voudront bien me transmettre (Emmanuel.Bossy@espci.fr) leurs suggestions, corrections, remarques, afin d'améliorer ce polycopié.



# Chapitre 1

## Systeme Linéaire Invariant (SLI)

**Introduction :** On considère dans ce chapitre un système  $\mathcal{H}$  qui à un "signal" d'entrée fait correspondre un signal de sortie. Par signal, on entend ici fonction d'une variable temporelle  $t$  ou d'une variable de position spatiale  $\vec{r}$ , ou fonction de ces deux types de variables :

$$e(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = \mathcal{H}[e(t)]$$

ou

$$e(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{H}} s(\vec{r}) = \mathcal{H}[e(\vec{r})]$$

ou

$$e(t, \vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t, \vec{r}) = \mathcal{H}[e(t, \vec{r})]$$

Par la suite, on notera plus généralement :

$$e \xrightarrow{\mathcal{H}} s = \mathcal{H}[e]$$

### 1.1 Définitions

**Linéarité :** un système  $\mathcal{H}$  est linéaire quand sa réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la même combinaison linéaire des réponses individuelles à chacun des signaux d'entrées.

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } \forall(e_1, e_2), \mathcal{H}[\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2] = \alpha_1 \mathcal{H}[e_1] + \alpha_2 \mathcal{H}[e_2]$$

**Invariance :** un système  $\mathcal{H}$  est invariant quand une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie.

$$\text{En temps : } \mathcal{H}[e(t)] = s(t) \Rightarrow \forall t_0, \mathcal{H}[e(t - t_0)] = s(t - t_0)$$

$$\text{En espace : } \mathcal{H}[e(\vec{r})] = s(\vec{r}) \Rightarrow \forall \vec{r}_0, \mathcal{H}[e(\vec{r} - \vec{r}_0)] = s(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{En temps et espace : } \mathcal{H}[e(\vec{r}, t)] = s(\vec{r}, t) \Rightarrow \forall(\vec{r}_0, t_0), \mathcal{H}[e(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)] = s(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$$

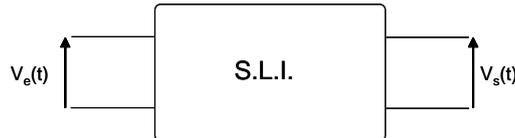
Remarque : pour un système invariant, l'origine des coordonnées est sans importance vis-à-vis des propriétés du système.

## 1.2 Exemples de Systèmes Linéaires Invariants

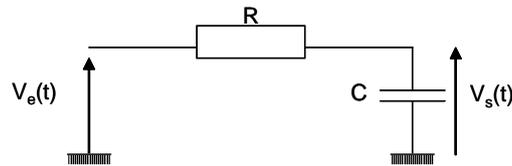
Dans cette section, nous donnons quelques exemples de SLI qui seront rencontrés dans différents domaines. Les caractérisations de ces systèmes seront données à la fin de ce chapitre, une fois définies les grandeurs qui caractérisent un SLI (voir section 1.3).

### 1.2.1 En électronique/électricité

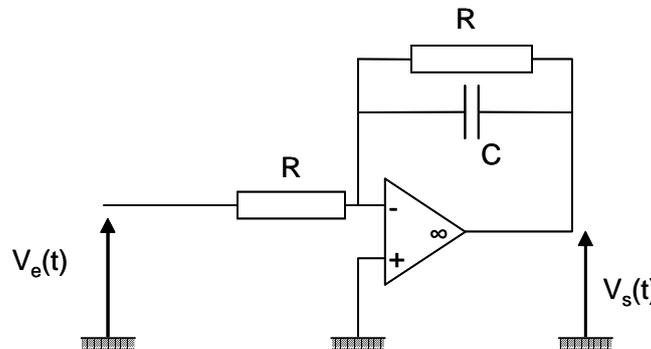
Il existe de nombreux systèmes électroniques/électriques linéaires et invariants qui relient une tension de "sortie"  $V_e(t)$  à une tension d'"entrée"  $V_s(t)$  :



**circuit RC :** On a  $V_e(t) \rightarrow \mathcal{H}[V_e(t)] = V_s(t)$ . Ici,  $\mathcal{H}$  est un système linéaire car R et C relient linéairement le courant qui les traverse à la tension à leurs bornes (par des opérateurs de dérivation). Il est de plus invariant si l'on suppose que les composants sont stables au cours du temps.



**Montage intégrateur à AO :** Le domaine de linéarité est ici limité par la condition  $|V_s| < V_{sat}$ . Il est invariant temporellement si l'on peut considérer qu'il n'y a pas de vieillissement des composants, de sensibilité à la variation de température ...



### 1.2.2 En optique

**Propagation d'un champ scalaire :** Soit  $U(x, y, z)$  le champ optique dans l'approximation scalaire, en régime monochromatique. On montre que dans l'espace libre (homogène et infini donc), la connaissance de  $U(x, y, z)$  dans un plan  $z$  suffit pour déterminer  $U(x, y, z')$  dans n'importe quel autre plan  $z'$ . L'opérateur  $\mathcal{H}_{z \rightarrow z'}$  qui à  $U(x, y, z)$  associe  $U(x, y, z')$  est un exemple d'opérateur linéaire et invariant : la linéarité et l'invariance proviennent de la linéarité de l'équation du champ scalaire (en général l'équation de Helmholtz).

**Diffraction d'une onde cohérente :** L'opérateur qui à l'amplitude du champ dans une image idéale sans diffraction associe l'amplitude du champ de l'image réelle (entachée des limitations du système d'imagerie dues à la diffraction) est également un opérateur linéaire et invariant. En pratique, l'invariance est limitée spatialement au voisinage de l'axe pour un système centré, dans la mesure où la tâche de diffraction associée à un point peut varier si l'on s'éloigne trop de l'axe optique.

### 1.2.3 En propagation d'ondes acoustiques

Dans un milieu infini homogène, si l'on considère l'opération qui à une répartition continue de source de pression (décrite par une fonction  $S(\vec{r}', t')$ ) associe la pression  $p(\vec{r}, t)$  mesurée en un point  $\vec{r}$  en fonction du temps, l'opérateur correspondant est sous certaine condition linéaire et invariant (en espace et en temps). En effet, les ondes acoustiques d'amplitude suffisamment faible sont régies par une équation d'onde linéaire, et la pression générée par plusieurs sources en un point de l'espace est égale la somme de la pression générée en ce point par chacune des sources (en supposant des sources qui n'interagissent pas les unes sur les autres). Il y a invariance dans le temps si le milieu n'évolue pas au cours du temps (pas de changement de température, d'écoulement atmosphérique, ...), et il y a invariance spatiale si le milieu est homogène et infini.

## 1.3 Caractérisation d'un SLI

### 1.3.1 Approche dans l'espace "physique"

#### 1.3.1.1 Réponse impulsionnelle d'un SLI

**Distribution de Dirac** Qualitativement, on peut considérer la distribution de Dirac notée  $\delta$  comme la limite d'une suite de fonction  $f_n$  dont le support (valeurs où  $f_n$  est non nulle) tend vers le point 0, et dont la suite des intégrales tend vers 1 :  $\int f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , l'intégrale s'étendant sur tout le domaine de définition de la variable ( $\mathbb{R}$  pour une intégration temporelle,  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  pour une intégration spatiale). Néanmoins, un tel objet n'existe pas au sens des fonctions (par exemple, la "fonction" correspondante étant nulle presque partout, elle ne peut pas avoir une intégrale non nulle). La définition qualitative donnée ci-dessus sera amplement suffisante pour la première partie de ce cours. La définition rigoureuse de la distribution  $\delta$ , en permettant une manipulation correcte et compréhensible dans des cas plus complexes que ceux abordés dans ce cours, sera vu en cours de méthodes mathématiques.

Exemple à 1D :  $\frac{1}{\Delta T} \Pi(t/\Delta T) \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} \delta$ , où  $\Pi(t/\Delta T)$  est la fonction porte, d'amplitude unité et de support  $\Delta T$  centré en 0. La fonction d'aire unité  $\frac{1}{\Delta T} \Pi(t/\Delta T)$  est représentée sur la figure suivante :

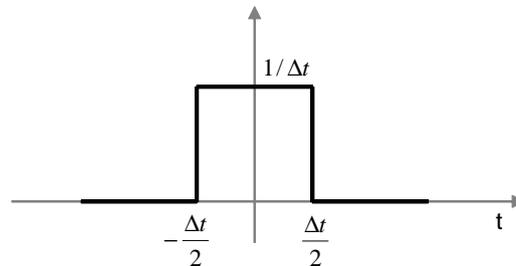


FIGURE 1.1 – Fonction porte d'aire unité

La définition rigoureuse de  $\delta$  est liée à la propriété suivante, pour le cas unidimensionnel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \Pi\left(\frac{t-t_0}{\Delta T}\right) f(t) dt \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} f(t_0)$$

Pour cette raison, on utilise souvent la notation *symbolique* suivante, qui permet une manipulation aisée de la distribution  $\delta$  basée sur la plupart des propriétés du calcul intégral (linéarité, changement de variable, intégration par partie...) sans recourir au formalisme de la théorie des distributions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0)$$

### Définition de la réponse impulsionnelle d'un SLI

**Définition :**

La réponse impulsionnelle d'un SLI, notée  $h$ , est la limite de la réponse du système à une entrée qui tend vers la distribution  $\delta$ .

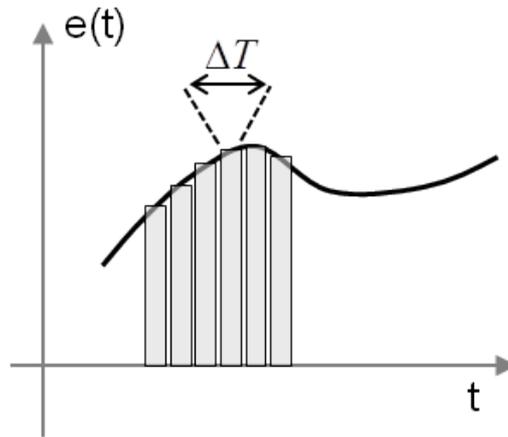
Deux types de situations peuvent se présenter :

- La réponse impulsionnelle tend vers une distribution, telle qu'une distribution de Dirac ou ses dérivées ; la réponse impulsionnelle n'est pas alors une fonction mais une distribution. Par exemple, la propagation sans déformation d'une onde d'un point à un autre peut-être décrite par un simple opérateur de retard, qui décale simplement le signal.

- La réponse impulsionnelle est une fonction (ex : système RLC en électricité, fonction de diffraction en optique ou acoustique). C'est le cas que nous rencontrerons le plus fréquemment.

#### 1.3.1.2 Réponse d'un SLI à une excitation quelconque

Dans un souci de clarté, traitons explicitement le cas unidimensionnel, par exemple pour une variable temporelle. Supposons que l'on connaisse la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un S.L.I temporel. Cherchons un moyen de lier  $s(t)$  à  $e(t)$  :



Une façon de faire est d'approximer la fonction d'entrée  $e(t)$  par une fonction en escalier de pas  $\Delta T$ , c'est à dire par une somme de fonctions portes décalées les unes par rapport aux autres. Ainsi,  $e(t)$  peut s'écrire :

$$e(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k\Delta t) \Pi\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta T}\right)$$

$$e(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k\Delta t) \frac{1}{\Delta t} \Pi\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta T}\right) \Delta t$$

En utilisant alors la linéarité et l'invariance du système, on obtient :

$$s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k\Delta t) \mathcal{H}\left[\frac{1}{\Delta t} \Pi\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta T}\right)\right] \Delta t$$

Lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , la fonction porte tend vers une distribution de Dirac, donc le terme le terme en  $\mathcal{H}$  tend vers la réponse impulsionnelle du système, décalée de  $k.\Delta T$ . De plus, la somme tend vers une intégrale de Riemann, dans laquelle le terme  $k.\Delta T$  est remplacé par la variable d'intégration  $t'$ . En notant  $h$  la réponse impulsionnelle du système, on obtient donc l'expression suivante pour la réponse du système :

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(t').h(t-t').dt' \\
s(t) &= e(t) * h(t)
\end{aligned}$$

Le traitement du cas spatial bidimensionnel ou tridimensionnel est similaire, en découpant le plan ou l'espace, et on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
s(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}'} e(\vec{r}').h(\vec{r}-\vec{r}').d\vec{r}' \\
&= e(\vec{r}) * h(\vec{r})
\end{aligned}$$

**Conclusion :** La réponse d'un SLI à une excitation quelconque s'obtient simplement en convoluant l'excitation avec la réponse impulsionnelle du système.

$$s = e * h$$

En conséquence, un système linéaire invariant est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle.

## 1.3.2 Approche dans l'espace transformé

### 1.3.2.1 Fonctions propres d'un SLI

Pour des raisons de simplicité, traitons le cas monodimensionnel, avec par exemple une variable temporelle  $t$  : soit une entrée  $e_p$  de la forme  $e_p(t) = e^{pt}$  avec  $p \in \mathbb{C}$ , on cherche à évaluer  $s_p(t) = \mathcal{H}[e_p(t)]$ . Soit un  $t'$  fixé quelconque réel.

Par linéarité de  $\mathcal{H}$  on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[e^{p(t+t')}] &= \mathcal{H}[e^{pt} \cdot e^{pt'}] \\
&= e^{pt'} \mathcal{H}[e^{pt}] \\
&= e^{pt'} s_p(t)
\end{aligned}$$

Et par invariance de  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H}[e^{p(t+t')}] = s_p(t+t')$$

Donc,

$$\forall(t, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad s_p(t+t') = e^{pt'} s_p(t)$$

Pour  $t = 0$ , et  $\forall t' \in \mathbb{R}$ , on a  $s_p(t') = s_p(0) \cdot e^{pt'}$ . Donc en utilisant le fait que  $t'$  est une variable muette qu'on peut remplacer par  $t$ , on obtient finalement

$$s_p(t) = s_p(0) \cdot e^{pt}, \forall t \in \mathbb{R}$$

La famille  $\{e^{pt}\}_{p \in \mathbb{C}}$  est donc une famille de **fonctions propres de  $\mathcal{H}$** , dont les valeurs propres sont  $s_p(0)$ . Ces valeurs ne dépendent que de  $p$ , on les notera par la suite  $H(p)$ . On peut de plus montrer que les fonctions exponentielles sont les seules fonctions propres des SLI, dans la mesure où ce sont les seules pour lesquelles une translation de la variable est équivalente à un changement d'amplitude.

Le raisonnement que l'on vient de tenir peut être également fait pour une variable spatiale, en dimension quelconque, pour une fonction d'entrée de la forme  $e^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , où  $\vec{k}$  est un vecteur à composante dans  $\mathbb{C}$ .

**En conclusion :** les fonctions exponentielles sont fonctions propres des systèmes linéaires invariants. Pour des systèmes temporels, spatiaux, ou spatio-temporels, on a donc :

$$\begin{aligned} e^{pt} &\xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = H(p)e^{pt} \\ e^{\vec{q}\cdot\vec{r}} &\xrightarrow{\mathcal{H}} s(\vec{r}) = H(\vec{q})e^{\vec{q}\cdot\vec{r}} \\ e^{pt+\vec{q}\cdot\vec{r}} &\xrightarrow{\mathcal{H}} s(\vec{r}, t) = H(p, \vec{q})e^{pt+\vec{q}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

Le résultat précédent montre que pour un SLI, si on connaît la fonction  $H$ , il est très simple de connaître la réponse à toute combinaison linéaire (discrète ou continue) de fonctions exponentielles. On a ainsi :

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_p f(p).e^{pt} dp \xrightarrow{\mathcal{H}} s(t) = \int_p f(p)H(p).e^{pt} dp \\ e(\vec{r}) &= \int_{\vec{q}} f(\vec{q}).e^{\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q} \xrightarrow{\mathcal{H}} s(\vec{r}) = \int_{\vec{q}} f(\vec{q}).H(\vec{q}).e^{\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q} \\ e(\vec{r}, t) &= \int_p \int_{\vec{q}} f(p, \vec{q}).e^{pt+\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q} dp \xrightarrow{\mathcal{H}} s(\vec{r}, t) = \int_p \int_{\vec{q}} f(p, \vec{q}).H(p, \vec{q}).e^{pt+\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q} dp \end{aligned}$$

Décomposer une fonction en une somme d'exponentielles est exactement ce que permet de faire la transformation de Fourier (à une ou plusieurs dimensions) et la transformée de Laplace (pour le cas unidimensionnel seulement). C'est la raison pour laquelle les transformations de Fourier et Laplace jouent un rôle fondamental dans la théorie des systèmes linéaires invariants, rôle développé dans les deux paragraphes qui suivent. On va montrer en particulier que la donnée de la fonction  $H$  est équivalente à la donnée de la réponse impulsionnelle.

Remarque : ce résultat justifie que pour des systèmes décrits par des équations différentielles linéaires à coefficient constants (qui sont sous certaines hypothèses des SLI, comme on le verra dans le chapitre suivant), une des premières choses que l'on apprend est que la réponse à une fonction harmonique est toujours une fonction harmonique, avec un changement de phase et d'amplitude.

### 1.3.2.2 Utilisation de la transformée de Fourier :

La définitions de la transformée de Fourier (et donc de son inverse) varient en fonction des ouvrages, du nombres de dimensions, des communautés d'utilisateurs, des habitudes, ... Il faut garder à l'esprit que les différences sont essentiellement des différences de signe sur  $i$  ou de facteurs de la forme  $\sqrt{(2\pi)^\alpha}$ , qui se répercutent sur divers théorèmes comme ceux relatifs au produit de convolution. Dans ce chapitre, les définitions choisies sont un peu différentes de celles du cours de méthodes mathématiques (cf. facteurs  $2\pi$ ) :

Pour la version temporelle :

$$\text{TF}[f(t)](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t).e^{-i\omega t} dt \iff f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \mathbb{R}} \tilde{f}(\omega).e^{i\omega t} d\omega$$

Pour la version spatiale :

$$\text{TF}[f(\vec{r})](\vec{k}) = \tilde{f}(\vec{k}) = \int_{\vec{r} \in \mathbb{R}^n} f(\vec{r}).e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}} d\vec{r} \iff f(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^n} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}).e^{i\vec{r}\cdot\vec{k}} d\vec{k}$$

Cette définition conduit au théorème de convolution sous la forme suivante :

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \times \tilde{g}$$

D'après le paragraphe précédent, la réponse du système dans chacun des cas est donnée simplement par :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \mathbb{R}} \tilde{e}(\omega).H(i\omega).e^{i\omega t} d\omega \\ s(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi^n} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^n} \tilde{e}(\vec{k}).H(i\vec{k}).e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \end{aligned}$$

$$s(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi^{(n+1)}} \int_{\omega \in \mathbb{R}} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^{(n)}} \tilde{e}(\vec{k}, \omega) \cdot H(i\omega, i\vec{k}) \cdot e^{i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} d\omega$$

Par la suite, on notera  $H(i \cdot \bullet) = H_F(\bullet)$  pour toute variable " $\bullet$ ", scalaire ou vectorielle. Les expressions ci-dessus ne sont rien d'autre que les transformations de Fourier inverses de  $s$  et indiquent donc que

$$\tilde{s} = \tilde{e} \times H_F$$

Or on sait d'après la caractérisation dans l'espace physique que le signal de sortie s'écrit toujours :

$$s = e * h$$

En prenant la transformée de Fourier de cette relation, on obtient (n étant la dimension de l'espace considéré) :

$$\tilde{s} = \tilde{e} \times \tilde{h}$$

Par identification, on obtient directement :

$$H_F = \tilde{h}$$

qui indique que la fonction  $H_F$  n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

### 1.3.2.3 Approche opérationnelle : Transformée de Laplace

Dans ce paragraphe, on considère la décomposition d'un signal (temporel uniquement) à l'aide de sa transformée de Laplace. La formule d'inversion de Bromwich, qui représente une intégrale *dans le plan complexe*, indique :

$$e(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{p \in \gamma} E(p) \cdot e^{pt} dp$$

où  $E(p)$  est la transformée de Laplace de  $e(t)$  et  $\gamma$  toute droite verticale située à droite de l'abscisse de sommabilité. D'après le paragraphe précédent, la réponse du système est donnée simplement par :

$$s(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{p \in \gamma} H(p) \cdot E(p) \cdot e^{pt} dp$$

L'expression ci-dessus n'est rien d'autre que les transformations de Laplace de  $s$  et indique donc que

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

où  $H(p)$  est définie comme la valeur propre associée à  $e^{pt}$  :  $e^{pt} \xrightarrow{\mathcal{H}} H(p) \cdot e^{pt}$

Or on a aussi  $s(t) = e(t) * h(t)$ , où  $h$  est la réponse impulsionnelle du système. En prenant la transformée de Laplace de cette expression, et en la comparant à l'expression précédente, on obtient :

$$H(p) = \text{TL}(h(t))$$

Remarque : ce résultat justifie a posteriori que l'on ait choisi la notation  $H(p)$  pour la valeur propre associée à  $e^{pt}$ .

### 1.3.3 Bilan

Les relations suivantes résument les résultats précédent :

Espace considéré	caractérisation du système	signal quelconque
Physique (temporel ou spatial)	$\delta \xrightarrow{\mathcal{H}} h$	$e \xrightarrow{\mathcal{H}} s = h * e$
Fourier (temporel)	$e^{i\omega t} \xrightarrow{\mathcal{H}} H_F(\omega).e^{i\omega t}$	$\tilde{e} \xrightarrow{\mathcal{H}} \tilde{s}(\omega) = H_F(\omega) \times \tilde{e}(\omega)$
Fourier (spatial)	$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \xrightarrow{\mathcal{H}} H_F(\vec{k}).e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$	$\tilde{e}(\vec{k}) \xrightarrow{\mathcal{H}} \tilde{s} = H_F(\vec{k}) \times \tilde{e}(\vec{k})$
Fourier (spatio-temporel)	$e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \xrightarrow{\mathcal{H}} H_F(\vec{k}; \omega).e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$	$\tilde{e}(\vec{k}, \omega) \xrightarrow{\mathcal{H}} \tilde{s} = H_F(\vec{k}, \omega) \times \tilde{e}(\vec{k}, \omega)$
Laplace	$e^{pt} \xrightarrow{\mathcal{H}} H(p).e^{pt}$	$E(p) \xrightarrow{\mathcal{H}} S(p) = H(p) \times E(p)$

où  $H$  et  $H_F$  sont reliées à la réponse impulsionnelle par  $H_F = \tilde{h}$  et  $H(p) = \text{TL}(h)$ . Remarque : l'utilisation de la transformation de Fourier ou de Laplace est conditionnée par leur existence pour un système donné. Quand les deux transformations existent, on retrouve la propriété  $\tilde{h}(\omega) = \text{TL}(h)(i\omega)$ .

## 1.4 Terminologie

Les notions introduites dans ce premier chapitre sont communes à un grand nombre de problèmes physiques, dans les régimes où les phénomènes étudiés correspondent à l'action d'un système linéaire invariant. Si les notions théoriques sont exactement les mêmes, la terminologie pour désigner en particulier les fonctions caractérisant le système est propre à chaque domaine. Le tableau suivant (non exhaustif et sujet à variation...) donne quelques exemples de termes qui seront rencontrés dans des contextes différents, mais qui représentent fondamentalement le même objet.

	$h$	$H_F$	$H(p)$
Commande de Processus	Réponse impulsionnelle	Gain complexe	Fonction de Transfert
Filtrage en fréquence	Réponse impulsionnelle	Fonction de Transfert	/
Imagerie	Fonction d'appareil PSF (Point Spread Function)	Fonction de Transfert	/
Propagation	Fonction de Green	Fonction de Transfert	/
Mécanique	Réponse percussive	Fonction de Transfert	/

Remarque : dans le cadre de la commande de processus, on s'intéresse le plus souvent non pas à la réponse impulsionnelle, mais à la réponse indicelle. La réponse indicelle est la réponse à un échelon de Heaviside, et la réponse impulsionnelle en est la dérivée.

## 1.5 Retour sur les exemples

Reconsidérons les exemples de la section 1.2, pour donner explicitement la caractérisation des systèmes correspondants.

1. **Circuit RC.** Dans le cas du circuit RC de la section 1.2.1, on peut calculer facilement à la fois la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et les fonctions de transfert  $H(p)$  et  $H_F(\omega) = H(i\omega)$  :

$$h(t) = \frac{H(t)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$H_F(\omega) = \frac{1}{1 + i\tau\omega}$$

où  $\tau = RC$  est la constante de temps du système. Si on raisonne en fréquence, on constate immédiatement à partir de l'expression de  $H_F$  que le montage est suiveur à basse fréquence, et intégrateur à haute fréquence, la fréquence de transition entre ces deux régimes est  $f_c = 1/\tau$ . Si on raisonne en temps de réponse, on constate immédiatement à partir de l'allure de  $h$  que le système répond avec un temps de réponse donné par  $\tau$ .

2. **Montage à AO.** Le montage à amplificateur opérationnel de la section 1.2.1 conduit à une réponse similaire au circuit RC, mais avec une inversion de signe :

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{H(t)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ H(p) &= -\frac{1}{1 + \tau p} \\ H_F(\omega) &= -\frac{1}{1 + i\tau\omega} \end{aligned}$$

3. **Propagation d'un plan à un autre.** L'opérateur de propagation d'un plan  $z_1$  à un plan  $z_2$  pour un champ scalaire  $s(x, y, z)$  vérifiant l'équation de Helmholtz  $\Delta s + k_0^2 s = 0$  est facilement caractérisé dans l'espace fréquentiel par la fonction de transfert suivante :

$$H_F(k_x, k_y, z_1, z_2) = \exp \left[ i\sqrt{k_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \times (z_2 - z_1) \right]$$

Cette expression fait apparaître deux régimes de propagation :

- si  $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$ , la fonction de transfert est purement imaginaire et correspond à un terme de phase traduisant le retard liée à la propagation entre le plan  $z_1$  et le plan  $z_2$ .
- si  $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ , la fonction de transfert traduit une décroissance exponentielle avec la distance entre le plan  $z_1$  et le plan  $z_2$ .

En d'autres termes, on dit souvent que la propagation agit comme un filtre sur les fréquences spatiales : les "basses" fréquences se propagent, alors que les "hautes" fréquences sont "coupées". Si l'expression de  $H_F(k_x, k_y)$  est simple, il n'en est pas de même pour son équivalent en terme de réponse impulsionnelle, qu'on ne donnera pas ici.

4. **Propagation d'ondes acoustiques.** En milieu fluide, homogène et sans dissipation, la pression acoustique vérifie dans l'approximation linéaire l'équation de d'Alembert :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t)$$

Le "signal" d'entrée est ici le terme source  $S(\vec{r}, t)$ , la "sortie" est l'onde de pression  $p(\vec{r}, t)$  et le système linéaire est constitué par l'opérateur de d'Alembert qui traduit la propagation dans le milieu. La "fonction" de Green  $G(\vec{r}, t)$  permet d'obtenir la solution sous la forme :

$$p(\vec{r}, t) = G(\vec{r}, t) * S(\vec{r}, t)$$

où la convolution se fait à la fois en temps et en espace.

Pour  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , la fonction de Green est une distribution, et s'écrit

$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)$$

Elle donne la réponse à un terme source ponctuel à la fois en temps et en espace, et permet de déduire la réponse à n'importe quel terme source.

Remarque : la forme de la fonction de Green de l'opérateur de d'Alembert dépend très fortement de la dimension de l'espace dans lequel on travaille.



## Chapitre 2

# Réponse d'un système linéaire temporel

### 2.1 Causalité et stabilité d'un SLI

#### 2.1.1 Causalité

**Définition :** Un système  $\mathcal{H}$  est causal  $\iff [e(t) = 0 \forall t \leq t_0 \Rightarrow s(t) = 0 \forall t \leq t_0]$

**Théorème :**  $\mathcal{H}$  est causal  $\iff h(t) = 0 \forall t \leq 0$

*Démonstration :*

- Montrons  $\implies$  : On sait que  $s(t) = h(t) * e(t)$  quelque soit  $e(t)$ . Choisissons pour  $e(t)$  la limite d'une suite  $e_{\Delta T}(t) = \mathcal{J}\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\Delta T} \left( t - \frac{\Delta T}{2} \right) \right]$ , c'est-à-dire une suite de fonction causale qui tend vers une distribution  $\delta(t)$ .  $\forall t < 0, s_{\Delta T}(t) = \mathcal{H}[e_{\Delta T}(t)] = 0$  car le système est causal par hypothèse. Par passage à la limite  $\Delta T \rightarrow 0$  dans  $s_{\Delta T}(t) = (h * e_{\Delta T})(t)$ , on obtient que la réponse causale  $s_{\Delta T}(t)$  tend vers  $h(t)$ , car la convolution avec  $\delta(t)$  renvoie  $h(t)$ . Donc  $h(t)$  est bien causale.

- Montrons  $\impliedby$  : On suppose  $e(t)$  telle que  $e(t) = 0 \forall t \leq t_0$ . On veut montrer que  $s(t)$  possède la même propriété, avec pour hypothèse que  $h(t) = 0 \forall t \leq 0$ . Or  $s(t)$  s'écrit comme la convolution suivante

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t')h(t-t')dt'$$

En utilisant l'hypothèse sur  $h$ , il est clair que l'intégrale est nulle pour toutes les valeurs de  $t' > t$ , donc  $s(t)$  s'écrit

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_{-\infty}^t e(t')h(t-t')dt'$$

De plus, comme  $e(t') = 0$  pour  $t' < t_0$ , donc on obtient bien que  $s(t)$  est nul pour  $t < t_0$ . Dans le cas où  $t > t_0$ , on obtient l'expression suivante pour un système causal :

$$\forall t > t_0, s(t) = (h * e)(t) = \int_{t_0}^t e(t')h(t-t')dt'$$

Cette expression traduit que la réponse d'un système causal à l'instant  $t$  met en jeu les valeurs de l'excitation depuis le moment où elle a commencé jusqu'à l'instant présent  $t$ .

#### 2.1.2 Stabilité d'un SLI

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système. Dans le cadre de ce cours, on considère la définition suivante (dite BIBO pour Bounded Input  $\implies$  Bounded Output) :

**Définition :** Un système est stable  $\iff [e(t)$  bornée  $\implies s(t)$  bornée].

**Théorème :** Un système est stable  $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$

*Démonstration :*

- Montrons  $\Leftarrow$  : Soit une entrée bornée ( $\exists M, |e(t)| \leq M$ ), montrons que  $s(t)$  est bornée

$$s(t) = (h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t')h(t-t')dt'$$

$$|s(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t')h(t-t')| dt' \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$$

- Montrons  $\Rightarrow$  : On choisit l'entrée bornée suivant  $e(t) = \text{sgn}(h(-t))$

donc  $s(t)$  est bornée

Or  $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(h(-t'))h(t-t')dt'$  doit être bornée

En particulier en  $t = 0$  :

$$s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(h(-t'))h(-t')dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-t')| dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t')| dt'$$

## 2.2 Système temporel (linéaire) décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans cette section, on montre comment un système temporel décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants peut être facilement caractérisé à l'aide de sa fonction de transfert (en espace de Fourier ou dans l'espace opérationnel de Laplace). En particulier, on montre que la stabilité et la causalité d'un système sont déterminés uniquement par la position des pôles de la fonction de transfert. On montre finalement comment en pratique la transformée de Laplace est l'outil de choix pour résoudre les équations différentielles linéaire à coefficients constants en prenant en compte les conditions initiales.

### 2.2.1 Equation du système

$$\sum_{n=0}^q a_n s^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^r b_m e^{(m)}(t)$$

La linéarité d'un système décrit par une telle équation est assurée de manière évidente par la linéarité même de l'équation. Par contre le caractère invariant du système dépend de la façon dont le problème est posé en terme de conditions initiales. Ce point sera discuté dans les sections qui suivent, à la lumière des résultats obtenus. Dans le cadre de ce cours, on supposera que  $r < q$ . On admettra que cette condition est nécessaire pour un système physiquement réalisable. Par exemple, un système dérivateur, décrit par  $s(t) = \frac{de(t)}{dt}$  n'est pas réalisable. Dans le cadre d'un circuit électrique à éléments passifs, il faudrait pour avoir un tel système que les composants n'aient aucune résistance, ce qui est irréalisable en pratique.

### 2.2.2 Transformée de Fourier de l'équation

Rappel :  $\widetilde{f^{(n)}} = (i\omega)^n \widetilde{f}$

On suppose que les dérivées concernées de  $e(t)$  et de  $s(t)$  admettent une transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^q a_n (i\omega)^n \widetilde{s}(\omega) &= \left[ \sum_{m=0}^r b_m (i\omega)^m \right] \widetilde{e}(\omega) \\ \Rightarrow \widetilde{s}(\omega) &= \left[ \frac{\sum_{m=0}^r b_m (i\omega)^m}{\sum_{n=0}^q a_n (i\omega)^n} \right] \widetilde{e}(\omega) = H_F(\omega) \cdot \widetilde{e}(\omega) \end{aligned}$$

- L'expression ci-dessus montre que la fonction de transfert est obtenue directement comme une fraction rationnelle. Si on cherche la réponse fréquentielle du système, le travail est terminé.

- Si on cherche la réponse temporelle à une excitation donnée  $e(t)$ , il faut calculer  $h(t)$ . Pour cela, il faut calculer la TF inverse de  $H_F(\omega)$ . On obtient alors  $s(t) = (h * e)(t)$ .

On constate que la solution obtenue par cette méthode est unique (on peut montrer que  $h$  est toujours unique pour un système causal). Or on sait que l'ensemble des solutions de l'équation est un espace de dimension  $q$ . L'unicité est en fait ici imposée par le fait qu'on a supposé l'existence d'une transformée de Fourier pour  $e(t)$  et  $s(t)$ . On a de fait trouvé l'unique solution possédant une transformée de Fourier. En terme de conditions aux limites, c'est la seule fonction qui tend vers 0 en  $+\infty$  et  $-\infty$ . De ce fait, la méthode de résolution d'une telle équation par Fourier n'est en général commode que pour des problèmes avec ce genre de conditions aux limites. Dans le cas contraire, il faut ajouter une combinaison linéaire appropriée de solutions indépendantes de l'équation sans second membre, qui demande un travail supplémentaire.

### 2.2.3 Transformée de Laplace de l'équation

Rappel :

$$\begin{aligned} \text{TL}(f') &= p\text{TL}(f) - f(0^+) \\ \text{TL}(f'') &= p^2\text{TL}(f) - pf(0^+) - f'(0^+) \\ \text{TL}(f^{(n)}) &= p^n\text{TL}(f) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} f^{(i)}(0^+) \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation, on obtient l'expression suivante :

$$S(p) = \left[ \frac{\sum_{m=0}^r b_m p^m}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} \right] E(p) - \left[ \frac{\sum_{m=1}^r b_m \left[ \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-1-j} e^{(j)}(0^+) \right]}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} \right] + \left[ \frac{\sum_{n=1}^q a_n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} s^{(i)}(0^+) \right]}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} \right]$$

Cette expression comporte trois termes, dont le premier ne dépend que des caractéristiques du système, et dont les deux suivants dépendent des conditions initiales sur le signal d'entrée et sur la réponse du système. On en déduit que l'équation représente un SLI uniquement pour des signaux dont toutes les conditions initiales à l'origine sont nulles. Ceci est cohérent dans la mesure où on peut considérer un dirac comme une fonction dont toutes les valeurs de dérivées  $n^{\text{ième}}$  en  $0^+$  sont nulles. Le premier terme donne donc la réponse à une excitation impulsionnelle pour un système initialement au repos, c'est à dire par définition la réponse impulsionnelle. Le troisième terme donne le régime libre, c'est à dire l'évolution du système quand il évolue sans second membre, mais avec des conditions initiales données.

La transformation de Laplace est donc l'outil de choix pour résoudre ce type d'équation en prenant en compte les conditions initiales à  $t = 0^+$ . Un second intérêt de la transformée de Laplace réside dans le fait que de nombreuses fonctions de bases n'ont pas de transformée de Fourier alors qu'elles admettent une transformée de Laplace. C'est en particulier le cas de la fonction de Heaviside, fondamentale en commande de processus.

### 2.2.4 Rôle des pôles de $H(p)$ et $H_F(\omega)$ pour le comportement du système

**Rappel** : Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Toute fraction rationnelle se décompose en une partie entière + une partie en éléments simple :

$$H(p) = Q(p)/P(p) = \text{Ent}(p) + \sum_{\text{racine } p_i} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(p - p_i)^k}$$

où  $m_i$  est la multiplicité de la racine  $p_i$ , et  $\alpha_{i,k}$  des constantes.

S'il y avait une partie entière ( $\text{Ent}(p) = E_0 + E_1 p + E_2 p^2 + \dots$ ), les termes correspondant dans l'espace temporel seraient  $E_0 \delta + E_1 \delta' + E_2 \delta'' + \dots$ . Un système physiquement réalisable ne peut répondre par un signal infiniment bref, il y a toujours un temps de réponse associé, même si l'excitation est elle-même infiniment brève. Ceci justifie a posteriori l'hypothèse énoncée en début de section sur le degré négatif de la fraction rationnelle  $H(p)$ .

**Rôle sur la causalité du système. Approche par transformée de Fourier :**

$$h(t) = \text{TF}^{-1}(H(i\omega) = H_F(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p_i} \sum_{k=0}^{r_i} \left( \frac{\alpha_{i,k}}{i^k (\omega - \omega_i)^k} \right) e^{2i\pi\nu t} d\omega$$

où les pôles de  $H_F(\omega) = H(i\omega)$  et de  $H(p)$  sont reliés par  $\omega_i = -ip_i$ . On applique la méthode des résidus :

Pour  $t > 0$  On prend un demi-cercle dans le plan supérieur pour pouvoir appliquer le lemme de Jordan (les termes devant les exponentielles tendent bien vers 0 en module).

Pour  $t < 0$  On prend un demi-cercle dans le plan inférieur pour pouvoir appliquer le lemme de Jordan (les termes devant les exponentielles tendent bien vers 0 en module).

Si le système est causal, il faut que l'on trouve  $h(t < 0) = 0$ .

On en déduit qu'un système causal est caractérisée par une fonction de transfert de Fourier  $H_F(\omega)$  n'ayant des pôles  $\omega_i$  que dans le demi-plan supérieur, c'est à dire à partie imaginaire positive. Et donc que les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$  sont à partie réelle négative.

Dans les cas où il existe un ou plusieurs pôles de  $H_F(\omega)$  sur l'axe réel, la méthode ci-dessus ne s'applique plus. On admettra qu'il y a plusieurs solutions  $h(t)$  possibles, mais qu'une seule est causale (cf. exemple en travaux dirigés de mathématiques).

**Rôle sur la stabilité du système. Approche par transformée de Laplace :** La décomposition en éléments simples permet de trouver directement la réponse impulsionnelle :

$$H(p) = \sum_{p_i} \sum_{k=0}^{\lambda_{ii}} \left( \frac{1}{(p - p_i)^k} \right)$$

TL<sup>-1</sup> ↓

$$h(t > 0) = \sum_{p_i} \sum_{k=1}^{\lambda_i} \left( \frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!} \right)$$

De cette expression, on déduit que le système est stable ( $h(t)$  est bornée) uniquement si les racines  $p_i$  sont à parties réelles négatives. C'est à dire aussi que les racines  $\omega_i$  sont à partie imaginaire positive.

Si un système à des pôles  $p_i$  à partir réelles nulles, on dit que le système est marginalement stable.

**Conclusion :** finalement, on en déduit que les conditions sur la stabilité et la causalité sont les mêmes, à savoir :

$$\text{Un système est stable et causal} \iff \text{Re}(p_i) < 0 \iff \text{Im}(\omega_i) > 0$$

## 2.3 Résolution pratique d'une équation différentielle (linéaire et à coefficients constants) avec conditions initiales

### 2.3.1 Méthode générale par transformation de Laplace

$$\sum_{n=0}^p a_n s^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^q b_n e^{(m)}(t)$$

*Première étape :* On prend la TL de l'équation pour obtenir l'expression suivante

$$S(p) = \left[ \frac{\sum_{m=0}^q b_m p^m}{\sum_{n=0}^p a_n p^n} \right] E(p) + f(s^{(m)}(0^+), e^{(m)}(0^+))$$

*Deuxième étape :* Décomposition en éléments simples (c'est la partie calculatoire).

*Troisième étape :* On prend la TL inverse de chaque élément simple.

### 2.3.2 Etude qualitative du comportement du système

- **Causalité et stabilité** Nous avons vu qu'il fallait que toutes les racines de  $\sum_{n=0}^p a_n p^n$  soient à parties réelles négatives. Il existe des critères permettant de vérifier cette condition SANS CALCULER les racines :

Ordre 1 :  $a_0 + a_1 p$

$a_0$  et  $a_1$  de même signe

Ordre 2 :  $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 = a_2(p - p_1)(p - p_2) = a_2[p^2 - (p_1 + p_2)p + p_1 p_2]$

$a_0, a_1$  et  $a_2$  de même signe.

Pour un ordre quelconque, il s'agit du *critère de ROUTH*.

- **Comportement aux limites**

$$\lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s(t)$$

### 2.3.3 Exemple d'un système du premier ordre

On considère ici des systèmes régis par une équation de la forme

$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = K e(t)$$

- Stabilité / causalité? OK si

$$\tau > 0$$

( $\tau$  homogène à un temps).

- Fonction de transfert  $[\tau p + 1]S(p) = K.E(p)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

**Approche fréquentielle de la réponse**

$$H_F(\omega) = \frac{K}{1 + i\omega\tau}$$

Gain complexe :

$$H_F(\omega)$$

Module du gain :

$$|H_F(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Il y a deux régimes :

- Basse fréquence

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \implies |H_F(\omega)| \sim K$$

- Haute fréquence

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} \implies |H_F(\omega)| \sim \frac{K}{\omega\tau} \implies G_{dB} \sim 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega\tau)$$

Diagramme de Bode :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})$$

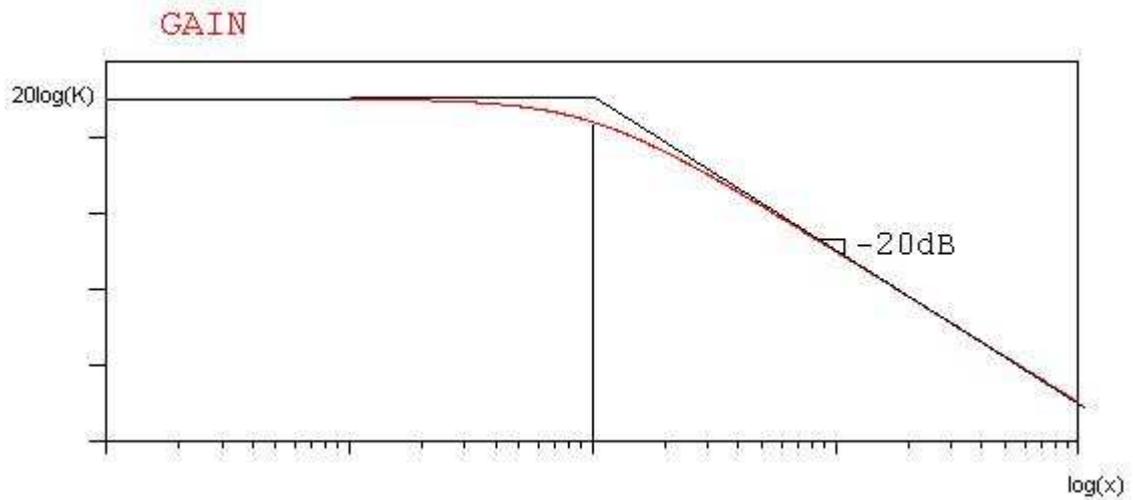


FIGURE 2.1 –

$\Rightarrow$  ce gain commence chuter quand  $\omega$  approche de  $\frac{1}{\tau}$

La bande passante est de largeur  $\sim \frac{1}{\tau}$

**Approche temporelle de la réponse**

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Réponse impulsionnelle :

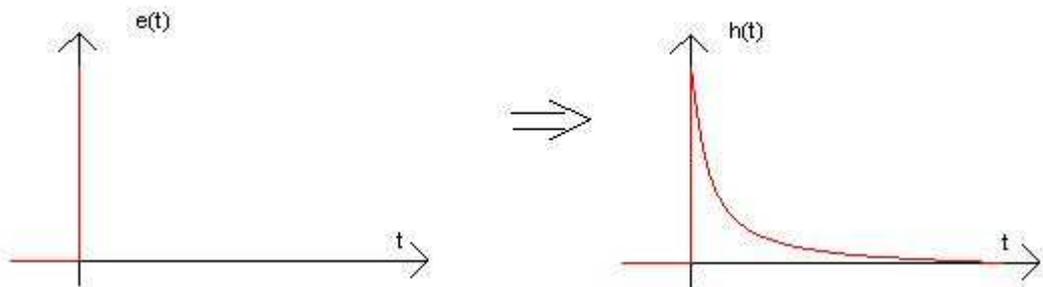


FIGURE 2.2 –

$$h(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} H(t)$$

Obtention de la réponse indicielle

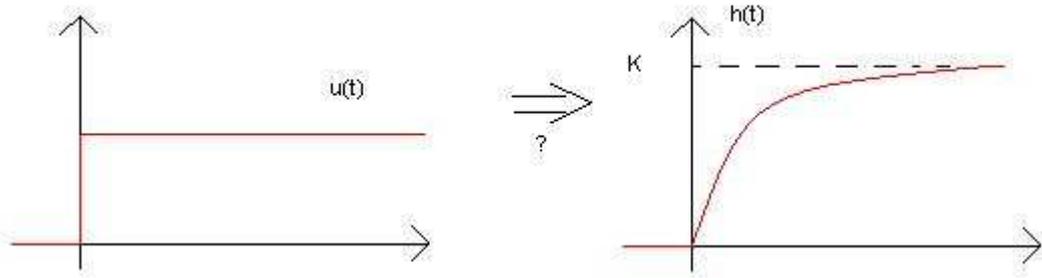


FIGURE 2.3 –

$$\text{Ind}(p) = H(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau p}$$

Méthode par intégration

$$u(t) \longrightarrow \delta$$

$$\text{Ind}(t) \longrightarrow h(t)$$

$$\int \frac{K}{2} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -K e^{-\frac{t}{\tau}} + cste$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Ind}(t) = K \implies cste = K \quad \text{Ind}(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



## Chapitre 3

# Représentation et Manipulation de Signaux par Transformée de Fourier

La définitions de la transformée de Fourier (et donc de son inverse) varient en fonction des ouvrages, du nombres de dimensions, des communautés d'utilisateurs, des habitudes... Il faut garder à l'esprit que les différences sont essentiellement des différences sur le signe sur  $i$  dans les intégrales, sur de facteurs de la forme  $\sqrt{(2\pi)^\alpha}$ , ou sur le choix de la variable spectrale (pulsation ou fréquence), qui se répercutent sur divers théorèmes comme ceux relatifs au produit de convolution. Dans ce cours, les définitions choisies varient plus selon le contexte (signal temporel, images, etc). Dans les chapitres 3 et 4, on utilisera les conventions suivantes :

1. Pour des signaux temporels, on utilisera la définition suivante :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{t \in \mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt \iff f(t) = \int_{\nu \in \mathbb{R}} \tilde{f}(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

Pour cette définition, les propriétés de la transformation de Fourier vis-à-vis du produit de convolution s'écrivent :

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \times \tilde{g} \quad \widetilde{f \times g} = \tilde{f} * \tilde{g} \quad \int_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\nu \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu$$

2. Pour des fonctions de l'espace (dimension  $n$ ), on utilisera la définition suivante :

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_{\vec{r} \in \mathbb{R}^n} f(\vec{r}) \cdot e^{-i\vec{r} \cdot \vec{k}} d\vec{r} \iff f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{r} \cdot \vec{k}} d\vec{k}$$

Pour cette définition, les propriétés de la transformation de Fourier vis-à-vis du produit de convolution s'écrivent :

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \times \tilde{g} \quad \widetilde{f \times g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \tilde{f} * \tilde{g}$$

3. Pour l'analyse des champs spatio-temporels (dimension  $n + 1$ ), on utilisera la définition suivante :

$$\tilde{f}(\omega, \vec{k}) = \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\vec{r} \in \mathbb{R}^n} f(\vec{r}, t) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\vec{r} dt \iff f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\omega \in \mathbb{R}} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega$$

Pour cette définition, les propriétés de la transformation de Fourier vis-à-vis du produit de convolution s'écrivent :

Pour cette définition, les propriétés de la transformation de Fourier vis-à-vis du produit de convolution s'écrivent :

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \times \tilde{g} \quad \widetilde{f \times g} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \tilde{f} * \tilde{g}$$

### 3.1 Signaux et distributions de base

Les signaux et distributions présentés ci-après sont parmi les plus rencontrés dans de nombreux domaines utilisant l'analyse Fourier. Il importe d'en connaître les transformées de Fourier, au minimum d'un point de vue qualitatif. Quand les définitions intégrales des transformées de Fourier posent un problème (fonction non intégrables, ...), les transformées de Fourier correspondantes sont à prendre au sens des distributions.

On se limite dans cette partie à des signaux ou distributions à 1 dimension. Rappelons que pour une fonction réelle, la transformée de Fourier a un module pair, et un argument impair. Ou de façon équivalente, les valeurs de la transformée de Fourier obtenue pour les fréquences négative est complexe conjuguée des valeurs obtenues pour les fréquences positives. Donc pour toutes les fonctions réelles, les spectres (module de la transformée de Fourier) seront toujours des fonctions paires.

**Fonction porte :**

$$\text{TF}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta T}\right)\right](\nu) = \Delta T \cdot \text{sinc}(\pi\nu\Delta T) \quad (3.1)$$

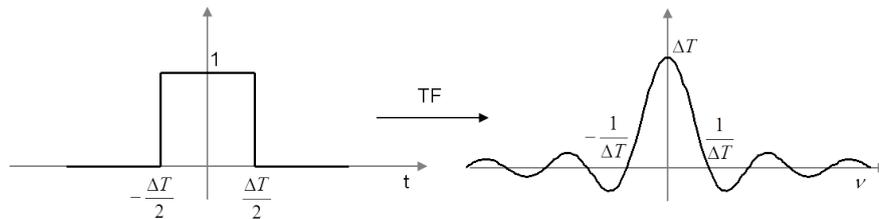


FIGURE 3.1 – Transformée de Fourier de la porte

**Gaussienne :**

$$\text{TF}\left[e^{-\left(\frac{t}{\Delta T}\right)^2}\right](\nu) = \sqrt{2\pi} \cdot \Delta T \cdot e^{-(\pi\nu\Delta T)^2} \quad (3.2)$$

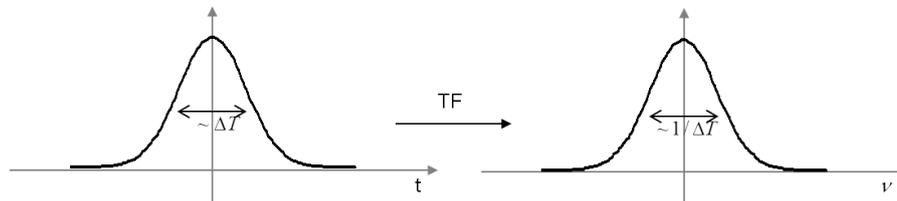


FIGURE 3.2 – Transformée de Fourier de la gaussienne

**Exponentielle complexe :**

$$\text{TF}\left[e^{2i\pi\nu_0 t}\right](\nu) = \delta(\nu - \nu_0) \quad (3.3)$$

**Sinusoïde :**

$$\text{TF}[\cos(\omega_0 t + \varphi)](\nu) = \frac{1}{2}[e^{i\varphi}\delta(\nu - \nu_0) + e^{-i\varphi}\delta(\nu + \nu_0)] \quad (3.4)$$

**Pic de Dirac :**

$$\text{TF}[\delta(t - t_0)](\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \quad (3.5)$$

On retiendra également que la connaissance de la  $TF$  d'une fonction est équivalente à la connaissance de la  $TF^{-1}$  de sa conjuguée :

$$\text{TF}^{-1}(f) = \overline{\text{TF}(f)}$$

ou

$$\text{TF}(f) = \overline{\text{TF}^{-1}(f)}$$

Cette relation est très pratique quand les fonctions sont réelles ou imaginaires pures. Par exemple, la  $TF$  de la fonction porte donnée ci-dessus permet de déduire la  $TF$  du sinus cardinal :

$$\text{TF}[\text{sinc}(\pi\nu_e t)](\nu) = \frac{1}{\nu_e} \Pi\left(\frac{\nu}{\nu_e}\right) \quad (3.6)$$

### 3.1.0.1 Rappels sur les séries de Fourier

Soit une fonction  $T_0$ -périodique continue par morceaux. On a :

$$f(t) \stackrel{pp}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2i\pi k\nu_0 t} \quad \nu_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi k\nu_0 t} dt$$

De plus, si  $f$  est réelle,  $c_k = c_{-k}$ .

### 3.1.0.2 TF d'une fonction périodique

$$f(t) \stackrel{pp}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2i\pi k\nu_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \tilde{f}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(\nu - k\nu_0)$$

La transformée de Fourier d'une fonction périodique est une série de distributions  $\delta$  réparties tous les  $\nu_0$  pondérées par les coefficients de Fourier.

### 3.1.0.3 Peigne de Dirac de période $T_0$ : $\mathbb{III}_{T_0}(t)$

**Définition :**

$$\mathbb{III}_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

*Remarque :* Par définition de la distribution  $\delta$ , le peigne de Dirac est la distribution qui  $\forall \varphi \in D, \langle \mathbb{III}_{T_0}(t) | \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kT_0)$

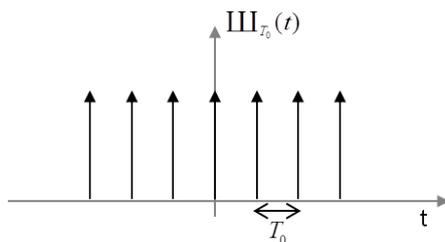


FIGURE 3.3 – Peigne de Dirac

**Formule sommatoire de Poisson :** Afin de calculer dans le paragraphe suivant la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac, nous démontrons tout d'abord la formule suivante dite formule sommatoire de Poisson :

$$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i.k \frac{2\pi}{T_0} t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

**Démonstration :**

Soit  $S_{T_0}(t)$  la fonction  $T_0$ -périodique définie de la façon suivante :

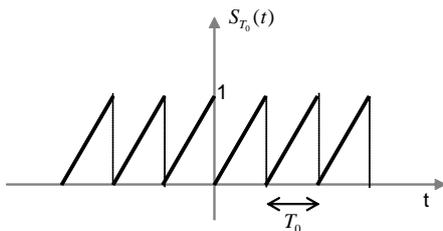


FIGURE 3.4 – Fonction "dents de scie"

En dérivant au sens des distributions, on obtient :

$$S'_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} - \text{III}_{T_0}(t)$$

$S_{T_0}$  étant périodique, on peut la décomposer en série de Fourier :

$$S_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2i\pi k \nu_0 t}$$

Le calcul des coefficients de Fourier donne :

$$c_k = \frac{i}{2k\pi}, \quad k \neq 0$$

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

C'est à dire

$$S_{T_0}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{i}{2\pi \cdot k} e^{2i\pi k \nu_0 t}$$

En dérivant terme à terme la série de Fourier, on obtient

$$S'_{T_0}(t) = -\frac{1}{T_0} \sum_{k \neq 0} e^{2i\pi k\nu_0 t}$$

En comparant les deux expressions de  $S'_{T_0}(t)$ , on obtient la formule de Poisson :

$$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i.k\frac{2\pi}{T_0}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Il est important de réaliser que cette égalité n'est pas une égalité entre séries de nombres ou de fonctions, mais entre des distributions. Dans ce cas, la différence est fondamentale : si l'on prend  $\nu = \frac{n}{T_0}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{2i\pi\nu kT_0} = 1$  pour tout  $k$ ; la série est donc grossièrement divergente. La formule de Poisson n'a pas de sens si on l'interprète en termes de séries de nombres ou de fonctions.

**TF du Peigne de Dirac :** En prenant la transformée de la formule de Poisson ci-dessus, on obtient l'expression suivante pour la transformée de Fourier du peigne de Dirac :

$$\text{TF}[\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{T_0}(t)] = \frac{1}{T_0} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1/T_0}(\nu)$$

Cette formule montre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac en temps est un peigne de Dirac en fréquence.

## 3.2 Interprétation de la transformée de Fourier

### 3.2.1 Discussion sur le cas 1D

cf. discussion en cours.

### 3.2.2 Cas 2D : TF d'une "image"

cf. discussion en cours.

## 3.3 Relation d'Incertitude

La "relation d'incertitude", utilisée notamment en mécanique quantique, est une relation très générale reliant la largeur d'une fonction et celle de sa transformée de Fourier. Le sens du mot "largeur" est défini ci-après.

### 3.3.1 Définition de la largeur d'un signal

On considère ici des signaux à énergie finie, c'est à dire par définition tels que

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu < \infty$$

L'égalité des deux intégrales découle du théorème de Parseval, qui dit que l'énergie d'un signal s'exprime de façon analogue en temps ou en fréquence. Les définitions qui suivent donnent une mesure du domaine autour de l'origine sur lequel la fonction prend des valeurs significatives.

**En temps :**

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt}{E_f}}$$

**En fréquence :**

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \bar{\nu})^2 |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu}{E_f}}$$

Les valeurs de temps moyen et de fréquence moyenne fournissent une "position" moyenne des signaux temporel et spectral, et sont naturellement définies par :

$$\bar{t} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt}{E_f}$$

$$\bar{\nu} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \nu |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu}{E_f}$$

### 3.3.2 Relation d'incertitude

Pour les signaux à énergie finie, la relation d'incertitude (souvent appelée relation d'incertitude de Gabor-Heisenberg) traduit la dépendance entre la largeur temporelle et spectrale du signal. Elle s'écrit :

$$\Delta\nu \times \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

**Démonstration :**

1) rappel :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \cdot dt \text{ définit un produit scalaire}$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \text{ définit une norme}$$

Relation de Schwartz :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \times \|g\|$$

ou encore :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \cdot dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt} \times \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt}$$

2) On choisit sans perte de généralité une origine des temps et des fréquences telles que  $\bar{t} = 0$  et  $\bar{\nu} = 0$ , et on pose  $h(t) = t \cdot (f \cdot \bar{f})' = t \cdot f' \cdot \bar{f} + t \cdot f \cdot \bar{f}'$  :

$$\left| \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot (f \cdot \bar{f})' \cdot dt}_{\substack{=0 \\ (E_f < \infty)}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \cdot dt}_{E_f} \right| \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |t \cdot \bar{f}|^2 dt}_{\Delta t \cdot \sqrt{E_f}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}'|^2 dt}_{2\pi \Delta \nu \sqrt{E_f}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |t \cdot f|^2 dt}_{\Delta t \cdot \sqrt{E_f}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f'|^2 dt}_{2\pi \Delta \nu \sqrt{E_f}}$$

En effet :  $\widetilde{f'(\nu)} = 2i\pi\nu\tilde{f}(\nu)$ , on a :

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu}{E_f}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\nu)|^2 d\nu}{4\pi^2 E_f}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt}{4\pi^2 E_f}}$$

On obtient bien la relation d'incertitude

$$\Delta\nu \times \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

### 3.4 Multiplication et Convolution entre signaux

#### 3.4.1 Propriétés de la transformation de Fourier pour la multiplication et la convolution

Les exemples illustratifs qui suivent sont basés sur les propriétés suivantes de la transformée de Fourier vis-à-vis de la convolution :

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \times \tilde{g}$$

$$\widetilde{f \times g} = \tilde{f} * \tilde{g}$$

#### 3.4.2 Application : multiplication et transformation de Fourier

##### 3.4.2.1 Modulation d'amplitude : exemple de la radio AM

Considérons un signal audio, correspondant à une prise de son avec une bande passante de l'ordre de 5 kHz : la largeur spectrale totale (en comptant les fréquence négative) du signal est donc de l'ordre de 10 kHz (5 kHz de part et d'autre de la fréquence nulle) :

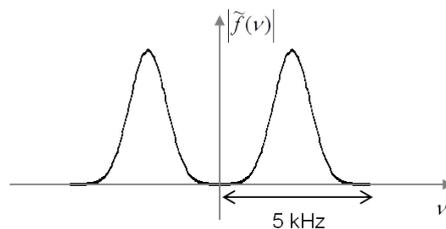


FIGURE 3.5 – spectre d'un signal sonore audible de bande passante 5 kHz

Pour propager ce type de signal à l'aide d'onde électromagnétique, il faut propager l'information avec une onde dont la gamme de fréquence est de l'ordre de un MHz à une centaine de MHz. Une façon simple est d'utiliser une onde sinusoïdale de fréquence élevée, dite porteuse, dont l'amplitude est modulée par le signal audio à transporter. Mathématiquement, la modulation d'amplitude est simplement une *multiplication* de l'amplitude de l'onde porteuse  $\cos(2\pi\nu_p t)$  par le signal que l'on veut transporter  $f(t)$  :

$$f_m(t) = \cos(2\pi\nu_p t) f(t)$$

N.B : dans la pratique, on ajoute en réalité un décalage constant au signal  $f(t)$ , mais ce point ne modifie en rien le raisonnement qui suit.

La multiplication dans l'espace temporel se traduit par une convolution dans l'espace des fréquences. Sachant que la  $TF$  de l'onde porteuse est constituée de deux pics de Dirac centrés en  $2\nu_p$  et  $-2\nu_p$ , on obtient le spectre suivant :

$$\tilde{f}_m(\nu) = \frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_p) + \delta(\nu + \nu_p)] * \tilde{f}(\nu) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(\nu - \nu_p) + \tilde{f}(\nu + \nu_p)]$$

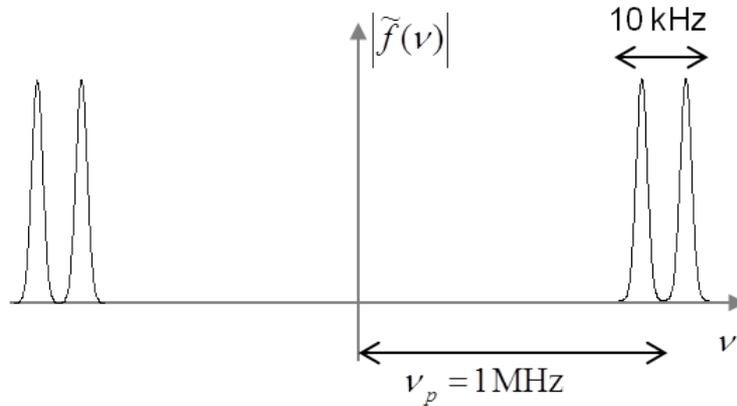


FIGURE 3.6 – Décalage et dédoublement de spectre par modulation d'amplitude

Le spectre du signal modulé est donc dédouble de part et d'autre de la fréquence de modulation. On constate sur cet exemple que si l'on veut transporter deux ondes en même temps sans qu'elles ne se recouvrent en fréquence, il faut que les deux porteuses utilisées aient une fréquence porteuse séparé d'au moins 10 kHz. On pourra constater sur un poste de radio que le pas en fréquence proposé en AM est bien de l'ordre de 10 kHz.

### 3.4.2.2 Excitation d'un système avec plusieurs résonances (ex de la RMN)

Par définition, un système résonant est caractérisé par une fonction de transfert présentant un ou plusieurs pics aux valeurs des fréquences dites de résonances. On considère ici un exemple de système présentant plusieurs résonances, que l'on souhaite exciter avec un champ magnétique oscillant. L'exemple considéré est celui de la résonance magnétique nucléaire (RMN) : l'excitation magnétique d'un noyau d'hydrogène (par l'intermédiaire de son moment magnétique de spin) comporte une fréquence de résonance (du champ magnétique excitateur) qui dépend de l'environnement atomique du noyau dans la molécule dans laquelle il se trouve. En conséquence, si une molécule comporte des protons qui ne sont pas équivalents du point de vue de leur emplacement dans la molécule, alors la réponse spectrale à une excitation magnétique comportera autant de pic de résonance qu'il y a de protons avec un environnement différent. Dans la molécule d'éthanol ( $CH_3CH_2OH$ ), il y a trois types d'environnement pour les protons  $H$ , le spectre est donc constitué de trois pics (eux-même présentant des structures fines...). Typiquement, l'écart entre ces pics est de l'ordre de quelques centaines de Hz (pour une fréquence de résonance autour de quelques centaines de MHz, pour un champ magnétique de l'ordre du Tesla). Pour étudier ce système, on peut utiliser un champ magnétique oscillant sinusoïdalement, et balayer en fréquence pour trouver une à une les fréquences de résonances. Mais on peut aussi utiliser une approche impulsionnelle (on parle alors de RMN impulsionnelle), qui met en jeu une excitation qui est un train d'onde sinusoïdal de durée  $\Delta T$ . Le spectre d'une telle excitation est un sinus cardinal (cf TF d'une fonction porte) :

$$f_{imp}(t) = B_0 \cdot \cos(2\pi\nu_0 t) \times \Pi(t/\Delta T) \implies \tilde{f}_{imp}(\nu > 0) \propto \text{sinc}[\pi\Delta T \cdot (\nu - \nu_0)]$$

Si la durée  $\Delta T$  de l'impulsion est courte, la largeur spectrale de l'impulsion est de l'ordre de  $\frac{1}{\Delta T}$ , peut-être suffisamment large pour englober toutes les fréquences de résonances. Dans le cas des molécules telle que l'éthanol, une durée inférieure la milliseconde permet d'exciter simultanément toutes les fréquences de résonances.

### 3.4.3 Convolution et peigne de Dirac

#### 3.4.3.1 Périodisation d'une fonction par convolution avec un peigne de Dirac

Soit une fonction  $f$ . Considérons la fonction  $g_{T_0}$  définie par

$$g_{T_0}(t) = f(t) * \text{III}_{T_0}(t)$$

où,  $T_0$  est une période quelconque. Sachant que l'effet de la convolution d'une fonction par une distribution  $\delta$  est simplement de translater cette fonction de la valeur sur laquelle est centrée la distribution  $\delta$ , on obtient pour  $g_{T_0}$  l'expression suivante :

$$g_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT_0)$$

qui montre que la convolution avec un peigne de Dirac a pour effet de "périodiser" la fonction  $f$ . On obtient une fonction  $g_{T_0}$  qui est  $T_0$ -périodique :

$$g_{T_0}(t) = f(t) * \text{III}_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT_0)$$

#### 3.4.3.2 Écriture d'une fonction $T_0$ -périodique à l'aide de $\text{III}_{T_0}(t)$

Par définition, le "motif"  $m_{T_0}$  d'une fonction  $T_0$ -périodique  $f_{T_0}$  est la fonction à support bornée définie par

$$m_{T_0}(t) = f_{T_0}(t) \times \Pi(t/T_0)$$

D'après la propriété du peigne de Dirac décrite ci-dessus, la fonction  $f_{T_0}$  peut s'écrire à l'aide de son motif de la façon suivante :

$$f_{T_0}(t) = m_{T_0}(t) * \text{III}_{T_0}(t)$$

En prenant la transformée de Fourier de cette expression, on obtient une expression générale très simple de la transformée de Fourier d'une fonction périodique en fonction de la transformée de Fourier de son motif :

$$\widetilde{f}_{T_0} = \widetilde{m}_{T_0} \times \frac{1}{T_0} \text{III}_{1/T_0}(\nu)$$

Cette expression montre que pour obtenir la suite des coefficients de Fourier d'une fonction périodique (c'est à dire sa série de Fourier ou de façon équivalente sa transformée de Fourier), il suffit de "prélever" les valeurs tous les  $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$  sur la transformée de Fourier du motif (transformée qui est toujours une fonction continue). On retrouve le résultat de la section 3.1.0.2, à savoir que la transformée de Fourier d'une fonction périodique est une suite de pic de Dirac régulièrement espacé tous les  $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ .

Exemple : Considérons la fonction périodique  $f_{T_0}(t)$  de période  $T_0$  dont le motif est un créneau de largeur  $T_0/2$ . Nous avons vu que :

$$\text{TF}[\Pi(\frac{t}{T_0/2})](\nu) = \frac{T_0}{2} \text{sinc}(\frac{\pi\nu T_0}{2})$$

d'où l'expression de la transformée de Fourier de  $f$  :

$$\widetilde{f}_{T_0}(\nu) = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{\pi\nu T_0}{2}) \text{III}_{\nu_0}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\frac{k\pi}{2}) \delta(\nu - k\nu_0)$$

ou encore

$$\widetilde{f}_{T_0}(\nu) = \frac{1}{2} \delta(\nu) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \delta(\nu - (2k+1)\nu_0)$$

On obtient donc très rapidement que seules les harmoniques impaires sont non-nulles, que leurs signes sont alternés, et que leurs amplitudes absolues décroissent comme en  $\frac{1}{k}$ .

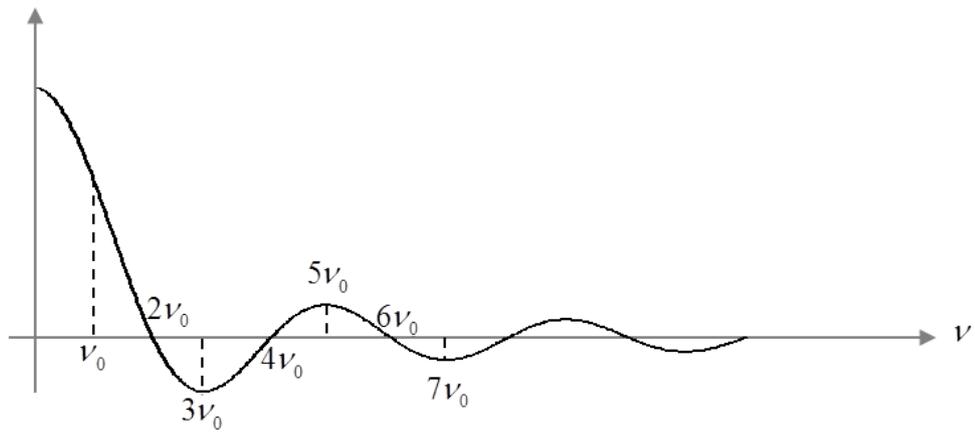


FIGURE 3.7 – Relation entre le spectre de la fonction créneau périodique et le spectre de la fonction porte

# Chapitre 4

## Introduction à l'Échantillonnage

Si les signaux physiques sont par nature *continus* pour la plupart (une signal sonore, un champ ondulatoire, etc...), leur *mesure* avec des instruments modernes (oscilloscope, enregistreur audio, caméscope, etc...) fournissent en général des signaux à variables *discrètes*, obtenus à partir d'un *échantillonnage* de valeurs prélevées sur le signal physique continu. On démontre dans ce chapitre un des théorèmes fondamentaux de la théorie de l'information, le théorème d'échantillonnage, qui énonce que l'on peut sous certaines conditions échantillonner un signal sans aucune perte d'information. En particulier, sous ces conditions, on peut reconstruire le signal continu à partir de la suite de ses valeurs échantillonnées. Ce chapitre d'introduction se limite au cas unidimensionnel des signaux temporels.

### 4.1 Échantillonnage idéal d'un signal continu

#### 4.1.1 Définition

**Échantillonnage idéal :** Opération qui consiste à prélever sur un signal *continu* une suite de valeurs discrètes régulièrement espacées. Le pas  $T_e$  entre deux valeurs consécutives (période d'échantillonnage) définit la fréquence d'échantillonnage  $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ .

$$\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{\text{échantillonner}} \{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

#### 4.1.2 Représentation par un peigne de Dirac

D'après la définition qui précède, l'échantillonnage revient à associer à une fonction continue une suite discrète de nombres  $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Cette suite peut être représentée et commodément manipulée à l'aide de la distribution suivante :

$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) = f(t) \times \text{III}_{T_e}(t)$$

Cette distribution définit la "fonction échantillonnée". C'est un objet théorique, dont la vocation est celle d'un outil utile pour démontrer des relations et des théorèmes relatifs à l'échantillonnage. Ce n'est en aucun cas un objet qui modélise un signal réel dans un système.

#### 4.1.3 Transformée de Fourier de la fonction échantillonnée

La représentation ci-dessus de la fonction échantillonnée par un peigne de Dirac permet d'obtenir deux expressions équivalentes de la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée. Si on prend terme à terme la transformée de Fourier de l'expression  $f_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$ , on obtient l'expression suivante pour la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée :

$$\tilde{f}_e(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e).e^{-2i\pi kT_e\nu} \quad (4.1)$$

Cette expression montre en particulier que la TF d'une fonction échantillonnée est une fonction *périodique* de la variable continue  $\nu$  de période  $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ . Cette expression n'est rien d'autre que le développement en série de Fourier de la TF de la fonction échantillonnée. Les valeurs échantillonnées sont les coefficients de Fourier correspondant.

Remarque : l'expression ci-dessus représente également la transformée en  $z$  d'une suite de nombre  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , calculée pour  $z = e^{-2i\pi T_e \nu}$ . Autrement dit, la transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée est strictement équivalente à la transformée en  $z$  d'une suite de nombre pour  $z = e^{-2i\pi T_e \nu}$ . La transformation en  $z$  est un outil très utilisé en commande de processus et en traitement du signal numérique (voir par exemple [http://fr.wikipedia.org/wiki/Transform%C3%A9e\\_en\\_Z](http://fr.wikipedia.org/wiki/Transform%C3%A9e_en_Z)).

On peut aussi considérer  $\tilde{f}_e(\nu)$  comme une version périodisée de la transformée de Fourier  $\tilde{f}(\nu)$  de la fonction continue  $f(t)$ . En effet :

$$f_e(t) = f(t) \times \text{III}_{T_e}(t) \longrightarrow \tilde{f}_e = \widetilde{\text{III}_{T_e}} * \tilde{f}$$

or nous avons montré précédemment que  $\widetilde{\text{III}_{T_e}} = \nu_e \text{III}_{\nu_e}$ , avec  $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ .

On obtient donc :  $\tilde{f}_e = \nu_e \text{III}_{\nu_e} * \tilde{f}$ .

La convolution par un peigne de Dirac conduisant à une version périodisée de la fonction (cf. section 3.4.3), on obtient finalement la formule suivante, exprimant que la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée s'obtient par périodisation de la transformée de Fourier de la fonction continue :

$$\tilde{f}_e(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu - k.\nu_e) \quad (4.2)$$

En résumé, l'expression 4.1 permet de calculer la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée (à partir des valeurs échantillonnées), alors que l'expression 4.2 en donne la signification par rapport à la transformée de Fourier de la fonction continue de départ.

## 4.2 Échantillonnage sans perte d'information

### 4.2.1 Théorème d'échantillonnage

**Définition :** Un signal est à bande limitée si sa transformée de Fourier est à support borné, c'est à dire :

$$\exists \nu_{max}, \forall |\nu| > \nu_{max}, \tilde{f}(\nu) = 0$$

**Théorème d'échantillonnage :** Tout signal à bande limitée peut être échantillonné sans perte d'information, à condition de l'échantillonner avec une fréquence d'échantillonnage strictement supérieure à deux fois la fréquence maximale contenu dans le spectre de ce signal, c'est à dire si  $\nu_e > 2\nu_{max}$ .

Échantillonner sans perte d'information signifie simplement que la connaissance de la fonction échantillonnée  $f_e$  implique la connaissance complète de la fonction  $f$  (n.b : cela ne signifie pas que le tracé de la fonction échantillonnée donne une représentation visuelle adéquate de la fonction continue).

**Démonstration :** La connaissance de  $f$  est équivalente à celle de sa transformée de Fourier. Or la transformée de Fourier  $\tilde{f}_e$  de la fonction échantillonnée étant une version périodisée de la transformée de Fourier de  $f$ , il suffit que cette périodisation se fasse sans recouvrement du spectre  $\tilde{f}$  de  $f$ . En effet, sans recouvrement, on

peut extraire  $\tilde{f}$  à partir de  $\tilde{f}_e$ . Il suffit donc que le signal soit à bande limitée, et que la périodisation du signal (période  $\nu_e$ ) soit plus grande que la bande du signal (support  $2\nu_{max}$ ).

**Terminologie** Le théorème d'échantillonnage est souvent appelé théorème de Shannon, ou théorème de Nyquist-Shannon, en référence à deux de ses découvreurs les plus connus. On utilise très souvent la fréquence de Nyquist d'un système échantillonneur, qui vaut par définition  $\nu_{Nyquist} = f_e/2$ . La condition du théorème d'échantillonnage s'écrit donc souvent sous la forme  $\nu_{max} < \nu_{Nyquist}$  (souvent appelée critère de Shannon!).

### 4.2.2 Formule de reconstruction

Le théorème de Shannon énonce que la connaissance de la fonction échantillonnée est équivalente à la connaissance complète de la fonction. L'expression suivante, dite *formule de reconstruction*, montre comment retrouver *explicitement* la fonction  $f$  à partir de la connaissance de la fonction échantillonnée  $f_e$  :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \cdot \text{sinc}(\pi\nu_e(t - kT_e)) \quad (4.3)$$

Cette formule exprime qu'un signal à bande limitée peut s'écrire comme une somme de sinus cardinaux centrés sur les points d'échantillonnage, et pondérés par les valeurs de la fonction aux points d'échantillonnage. Le théorème de Shannon exprime donc que pour  $T_e$  donné, la suite des fonctions  $\{\text{sinc}(\pi\nu_e(t - kT_e))\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de l'ensemble des fonctions telles que  $\nu_{max} < \frac{\nu_e}{2}$ .

**Démonstration.** S'il n'y a pas repliement, le spectre de  $f$  s'obtient simplement en multipliant le spectre de  $f_e$  par une porte de largeur  $\nu_e$  (à un facteur dimensionnel près  $\nu_e$ ) :

$$\tilde{f} = \frac{1}{\nu_e} \tilde{f}_e \times \Pi\left(\frac{\nu}{\nu_e}\right)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette expression, et en utilisant le fait que la TF inverse d'une porte est un sinus cardinal (cf. equation 3.6), on obtient :

$$f(t) = f_e(t) * \text{sinc}(\pi\nu_e t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) * \text{sinc}(\pi\nu_e t)$$

qui donne l'expression recherchée.

### 4.2.3 Phénomène de repliement de spectre

On parle de repliement de spectre lorsqu'un signal est échantillonné en deçà du critère de Shannon. En effet, la périodisation qui a alors lieu avec recouvrement conduit à un spectre du signal échantillonné qui contient des composantes spectrales additionnelles qui se trouvaient initialement au delà de la fréquence d'échantillonnage.

**Exemple :** Considérons l'exemple de l'échantillonnage à 8 kHz d'un signal composé de deux sinusoïdes à 1 kHz et 5 kHz (un échantillonnage correct requerrait une fréquence d'échantillonnage d'au moins  $2 \times 5 \text{ kHz} = 10 \text{ kHz}$ ). Comme l'illustre une simple figure, le repliement de spectre correspond à l'apparition dans la bande  $[-4 \text{ kHz}; +4 \text{ kHz}]$  de pics aux fréquences  $5 \text{ kHz} - 8 \text{ kHz} = -3 \text{ kHz}$  et  $-5 \text{ kHz} + 8 \text{ kHz} = +3 \text{ kHz}$ .

En conséquence, tout dispositif d'échantillonnage (de numérisation) bien conçu comporte en général un filtre "anti-repliement" (anti-aliasing en anglais) dont le but est d'éliminer *avant* l'échantillonnage toutes les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist  $\nu_{Nyquist} = \nu_e/2$ .

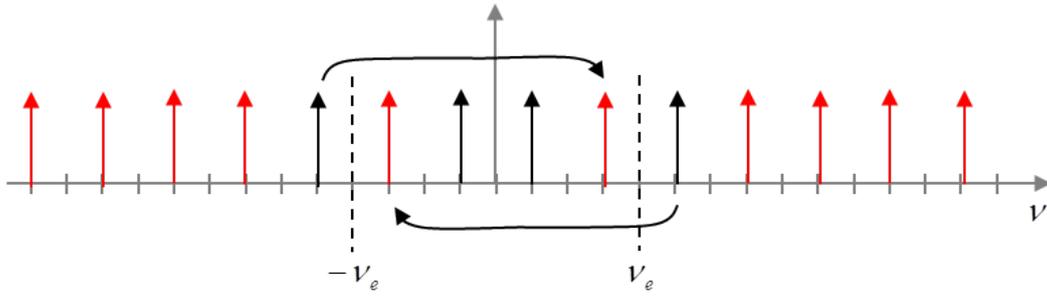


FIGURE 4.1 – Phénomène de repliement de spectre pour un fréquence d'échantillonnage trop faible. En noir : spectre avant échantillonnage. Rouge + noir : spectre après périodisation.

#### 4.2.4 Remarque sur la TF d'un signal à bande limitée

La transformée de Fourier de n'importe quel signal peut s'écrire comme une série de terme sous forme d'intégrale finie :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t).e^{-2i\pi\nu t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})T_e}^{(k+\frac{1}{2})T_e} f(t).e^{-2i\pi\nu t} dt$$

Or si ce signal est à bande limitée, et que la période  $T_e$  vérifie le critère de Shannon, alors on a  $\tilde{f}_e(\nu) = \nu_e \tilde{f}(\nu), \forall |\nu| < \frac{\nu_e}{2}$ . On en déduit, à l'aide de l'expression de la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée donnée ?? par que

$$\tilde{f}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})T_e}^{(k+\frac{1}{2})T_e} f(t).e^{-2i\pi\nu t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e).e^{-2i\pi\nu kT_e}.T_e \quad \forall |\nu| < \frac{\nu_e}{2}$$

Cette égalité montre que pour un signal à bande limitée, l'approximation de l'intégrale de Fourier par la méthode des rectangles sur des intervalles (dernier membre de l'équation) est rigoureusement égale l'intégrale de Fourier, sous réserve que la largeur  $T_e$  des intervalles vérifie le critère de Shannon ( $\nu_{max} < \frac{\nu_e}{2}$ ). Autrement dit, sous cette hypothèse, l'intégrale de Fourier d'un signal à bande limitée peut-être calculée par la méthode des rectangles *sans commettre d'erreur* .

## Chapitre 5

# Transformée de Fourier d'un signal numérique

Nous avons vu que pour les signaux continus, la transformation de Fourier (acronyme TF, ou FT en anglais) est une opération qui à un signal d'une variable continue dans l'espace physique (temporel par exemple) associe un signal d'une variable continue dans l'espace des fréquences. Pour les signaux échantillonnés, définis par une suite de nombres  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , nous avons vu dans le chapitre précédent que l'on peut définir une transformée de Fourier à partir de leur représentation sous forme d'une distribution construite à l'aide d'un peigne de Dirac. On obtient alors une "fonction" périodique d'une variable continue dans l'espace des fréquences. Dans la pratique, les signaux numériques consistent en une suite discrète de points de mesures, mais avec un nombre **fini** de points. Dans ce cas, nous allons définir la transformation de Fourier discrète (acronyme TFD, ou DFT en anglais), qui à un signal d'une variable discrète de l'espace physique, qui plus est à nombre fini d'échantillons, associe un signal d'une variable discrète de l'espace fréquentiel, également à nombre fini d'échantillons. Nous verrons en particulier que sous certaines conditions, la DFT est une représentation correcte de la Transformation de Fourier d'un signal continu, à la base de l'estimation spectrale numérique des signaux analogiques. Notons dès à présent que pour des questions d'implémentation, discutées dans la dernière section, on utilise le plus souvent le terme de FFT pour désigner la transformée de Fourier d'un signal numérique.

### 5.1 Transformée de Fourier Discrète (DFT)

#### 5.1.1 Définition

Par définition, la transformée de Fourier discrète (DFT) d'une suite de nombres  $\{f_k\}_{k \in [0 \dots N-1]}$  est la suite de nombre  $\{\hat{f}_p\}_{p \in [0 \dots N-1]}$  donnée par :

$$\hat{f}_p = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2i\pi \frac{p \cdot k}{N}} \quad (5.1)$$

De plus, un peu d'algèbre permet de montrer que la suite  $\{f_k\}_{k \in [0 \dots N-1]}$  peut toujours s'exprimer à partir de la suite  $\{\hat{f}_p\}_{p \in [0 \dots N-1]}$  à l'aide de la relation suivante :

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{f}_p \cdot e^{+2i\pi \frac{p \cdot k}{N}} \quad (5.2)$$

La transformation précédente est donc l'inverse de la transformée de Fourier discrète. Elle est souvent notée iDFT. On remarque immédiatement que la structure de ces deux transformations, inverse l'une de l'autre, est strictement analogue aux TF et  $TF^{-1}$  du cas continu. Le lien entre ces deux types de transformations est discuté dans les paragraphes qui suivent.

### 5.1.2 Transformation de Fourier Rapide (FFT)

Le calcul d'une TFD d'un signal de  $N$  points à partir de l'expression 5.1 met en jeu un nombre d'opérations variant comme  $N^2$  (une fois calculés les termes de la forme  $e^{-2i\pi \frac{p.k}{N}}$ , il faut en effet réaliser  $N$  sommes de  $N$  produits). Il existe de nombreux algorithmes qui utilisent les propriétés des puissances des nombres de la forme  $e^{-2i\pi \frac{k}{N}}$  pour factoriser efficacement l'expression ci-dessus, de façon à réduire drastiquement le nombre d'opération, et aboutir à un nombre d'opérations variant en  $N \cdot \ln(N)$ . Ces algorithmes sont une mise en oeuvre rapide de la TFD, et sont appelés algorithmes de transformation de Fourier rapide (FFT pour Fast Fourier Transform). Un des algorithmes les plus populaires est l'algorithme de Cooley-Tukey, qui nécessitent que  $N$  soit une puissance de 2 (la description de cet algorithme sort du cadre de ce cours). L'importance pratique de ces algorithmes est telle que le terme FFT est quasi-systématiquement utilisé pour désigner un calcul numérique de transformation de Fourier discrète, voire par abus de langage pour désigner une transformation de Fourier continue. Par la suite, on utilisera systématiquement comme c'est l'usage l'acronyme FFT pour parler plus généralement de la DFT. On gardera à l'esprit qu'une FFT est une méthode de calcul rapide d'une TFD.

## 5.2 Relation entre FFT d'un signal échantillonné et TF d'un signal continu

### 5.2.1 Hypothèses sur l'échantillonnage

En pratique, l'échantillonnage numérique d'un signal continu (par exemple à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition de données) diffère de l'échantillonnage idéal évoqué ci-dessus au moins sur les points suivants :

- La mesure d'un point d'échantillonnage ne se fait pas instantanément.
- Le signal mesuré a nécessairement une durée finie, qui peut être plus courte que la durée du signal que l'on cherche à mesurer (par exemple, une sinusoïde sera nécessairement tronquée).
- L'amplitude des points échantillonnés est quantifiée (car codée avec un nombre fini de bits).
- Le calcul numérique d'une transformée de Fourier donne nécessairement dans le domaine fréquentiel un signal quantifié.

A chacun de ses points correspond un certain nombre de limitations quant à l'estimation numérique du spectre du signal mesuré. Dans ce qui suit, on considère seulement les effets liés à la durée finie d'acquisition : on considère la mesure comme un échantillonnage idéal pendant une durée finie  $\Delta T$ , aboutissant donc à une suite finie de  $N$  points de mesure ( $\Delta T = NT_e$ ).

### 5.2.2 Lien entre FFT et TF

Que la mesure se fasse de façon discrète (numérique) ou continue (analogique), la durée d'acquisition d'un signal est toujours finie. Ainsi, en pratique, on mesure de fait

$$f_{\Delta T}(t) = f(t) \times \Pi\left(\frac{t - T_e/2}{T_e}\right) \quad (5.3)$$

en considérant que la mesure commence à  $t = 0$ . Dans le domaine spectral, nous avons vu que cette durée finie d'acquisition se traduisait par une convolution du spectre réel avec un sinus cardinal, dont la largeur fréquentielle est de l'ordre de  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta T}$ . La résolution du spectre du signal effectivement mesuré n'est donc pas meilleure que  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta T}$ . Dans le cadre d'un calcul numérique, il est donc inutile de chercher à calculer les valeurs du spectre pour des intervalles de fréquences inférieurs à  $\frac{1}{\Delta T}$ .

Considérons ce que l'on obtient quand on calcule la TF du signal mesuré pour des intervalles en fréquence espacés de  $\frac{1}{\Delta T}$ , qui est la résolution attendue étant donné le temps de mesure  $\Delta T$ . Si le signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage  $T_e$ , alors la durée d'acquisition vaut  $\Delta T = N \cdot T_e$ , où  $N$  est le nombre de points de mesure. Le signal mesuré est représenté simplement par

$$f_{\Delta T}^{\text{éch}}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \quad (5.4)$$

La TF de ce signal est donc

$$\tilde{f}_{\Delta T}^{\text{éch}}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e).e^{-2i\pi\nu kT_e} \quad (5.5)$$

qui comme attendu est une fonction périodique de période  $\nu_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{\Delta T}$ . Si on échantillonne cette expression dans l'espace de Fourier avec un pas  $\delta\nu = \frac{1}{\Delta T}$ , on obtient donc  $N$  points de calcul par période  $\nu_e$ . En pratique, le calcul numérique d'une transformée de Fourier correspond donc aux  $N$  calculs suivants, pour  $p \in [0..N-1]$  :

$$\tilde{f}_{\Delta T}^{\text{éch}}\left(p\frac{\nu_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e).e^{-2i\pi p\frac{\nu_e}{N}kT_e} \quad (5.6)$$

Sachant que  $\nu_e.T_e = 1$ , on obtient

$$\tilde{f}_{\Delta T}^{\text{éch}}\left(p\frac{\nu_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_e).e^{-2i\pi\frac{p.k}{N}} \quad (5.7)$$

En notant  $\hat{f}_p = \tilde{f}_{\Delta T}^{\text{éch}}\left(p\frac{\nu_e}{N}\right)$  et  $f_k = f(kT_e)$ , nous constatons que le calcul décrit ci-dessus consiste en la TFD de la série des points de mesure :

$$\hat{f}_p = \sum_{k=0}^{N-1} f_k.e^{-2i\pi\frac{p.k}{N}}$$

En conséquence, nous venons de montrer que la FFT de la suite des points de mesure donne un échantillonnage dans le domaine fréquentiel de la fonction de la variable continue TF $[f_e(t) \times \Pi(\frac{t-T_e/2}{T_e})](\nu)$

### 5.2.3 Phénomènes de périodisation

Nous avons vu dans le chapitre 4 que l'échantillonnage dans le domaine *temporel* conduit à une périodisation du spectre. Dans la section précédente, nous avons également vu que la FFT correspondait à un échantillonnage *fréquentiel* du spectre périodisée. On peut sans difficulté montrer que pour les mêmes raisons que pour l'échantillonnage temporel, l'échantillonnage fréquentiel correspond à une périodisation temporelle du signal échantillonné : cette double périodisation est évidente sur les expressions 5.1 et 5.2, qui montre que si les indices  $k$  et  $p$  varient de  $-\infty$  à  $+\infty$ , la FFT et son inverse sont périodiques de période  $1/N$ . Traduite en terme de temps  $t$  et de fréquence  $\nu$ , la FFT et son inverse sont respectivement de période  $\Delta T$  et  $\nu_e$ .

Cette vision de la transformée discrète permet de comprendre intuitivement le rôle des fenêtres de pondération qu'il est souvent utile d'appliquer pour minimiser les effets de périodisation temporel liés à l'échantillonnage fréquentiel.

## 5.3 Estimation d'une TF à l'aide d'une FFT

### 5.3.1 Conditions pour une estimation correcte

Il est fondamental d'avoir à l'esprit que tout calcul de spectre réalisé numériquement, que ce soit à l'aide d'un oscilloscope numérique ou en post-traitement sur un ordinateur après acquisition, consiste non pas en un calcul de transformée de Fourier au sens de la TF d'une fonction, mais en un calcul de transformée de Fourier discrète, effectué sur un échantillonnage de durée finie du signal analogique dont on cherche à estimer le spectre. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que l'on obtenait un échantillonnage fréquentiel d'un spectre qui n'est pas celui du signal, mais celui de sa version échantillonnée à durée finie. Sous quelles conditions ces deux spectres sont-ils semblables ?

- Une première condition est donnée par le critère d'échantillonnage de Shannon : il faut que le signal soit à bande limitée, et que la fréquence d'échantillonnage vérifie  $\nu_{max} < \frac{\nu_e}{2}$ . Si cette condition n'est pas vérifiée, le spectre estimé va différer du spectre exact à cause du phénomène de repliement de spectre (périodisation spectrale).

- Une seconde condition est que la durée d'acquisition  $\Delta T$  doit être suffisamment grande de façon à peu déformer le spectre exact. Cette déformation résulte du fait que le spectre estimé est obtenu par une convolution du spectre exact par une fonction sinus cardinal de largeur  $\frac{1}{\Delta T}$ . Cette convolution peut se faire sans erreur, mais uniquement si le signal exact est à durée finie inférieure au temps de mesure. Dans le cas contraire, il faut pour avoir une estimation correcte que  $\frac{1}{\Delta T} \gg \delta\nu_{min}$ , où  $\delta\nu_{min}$  est le plus petit intervalle de fréquences sur lequel le spectre exact présente des variations significatives. Mais le spectre obtenu est nécessairement une version moins résolue du spectre exact.

On peut se demander s'il existe des cas où l'estimation spectrale numérique permet de reconstruire exactement le spectre exact continu, de la même façon que la formule de reconstruction permet de reconstruire exactement le signal continu à partir de ces échantillons discrets (à conditions d'avoir une infinité d'échantillons). La réponse à cette question est négative, pour la simple raison que les deux conditions discutées ci-dessus ne peuvent en fait pas être vérifiées simultanément : si le signal est à bande limitée, on peut montrer qu'il est nécessairement illimité dans le temps, et donc l'estimation pendant un temps fini correspond nécessairement à un manque d'information qui se traduit dans le domaine spectral par une convolution. Si le signal est à durée finie, il ne peut alors être à bande limitée, et la fréquence d'échantillonnage ne sera jamais assez élevée pour éviter le phénomène de repliement de spectre.

On ne peut donc jamais calculer de façon exacte un spectre, mais il n'y a par contre aucune limite théorique quand au degré d'approximation que l'on peut atteindre : il suffit d'échantillonner suffisamment rapidement, et pendant un temps suffisamment long, pour avoir une estimation aussi précise que voulue.

Dans la pratique expérimentale, de nombreux autres facteurs limitent la possibilité d'estimer précisément un spectre : le bruit est un facteur clé, ainsi que la quantification des mesures (discrétisation de l'amplitude des points de mesure). Concrètement, le meilleur échantillonnage temporel qui soit (en terme de fréquence  $\nu_e$  et de durée d'acquisition  $\Delta T$ ) est tel que l'erreur d'estimation sur le spectre exact soit limité par les facteurs tels que le bruit de mesure, la quantification, le temps nécessaire à la mesure de chaque points, ...

La prédiction des valeurs optimales de  $\nu_e$  et  $\Delta T$  en fonction de ces facteurs est tout à fait possible, mais sort du cadre de ce cours. On peut aussi montrer, dans le cadre d'une estimation de spectre par TFD que l'effet de la durée finie d'acquisition du signal sur la forme du spectre peut-être minimisée (si par exemple on cherche à résoudre des composantes spectrales proches) en pondérant différemment au cours du temps l'amplitude des points acquis pendant toute la mesure. En général, cette pondération est faite de façon à donner un poids d'autant plus faible aux points de mesures qu'ils sont proches du début ou de la fin de l'acquisition). Cette pondération est définie par ce que l'on appelle des fenêtres d'apodisation, dont les plus courantes (présentes notamment dans les oscilloscopes) sont les fenêtres de Hamming, gaussienne, de Hann, de Blackmann-Harris. On peut la voir comme un moyen de minimiser les différences entre le début et la fin du signal, qui par périodisation liée à l'échantillonnage fréquentiel se traduiraient par un signal présentant une discontinuité tous les périodes (bien qu'une fois le signal temporel échantillonné, on ne puisse plus parler stricto sensu d'une discontinuité : dans ce cas, on parle plutôt d'une forte variation à l'échelle d'un pas d'échantillonnage temporel, qui conduit à des fréquences élevées dans le spectre échantillonné).

## 5.3.2 Exemples

### 5.3.2.1 cas des signaux à support (quasi-)limité

cf exemples discutés en cours à l'aide du vidéo projecteur

### 5.3.2.2 cas des signaux périodiques

cf exemples discutés en cours à l'aide du vidéo projecteur