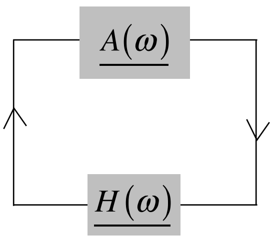
Corrigé de l'application : conditions d'oscillations de BARKHAUSEN

Oscillateur à filtres RC en cascade

Préliminaires :

Deux présentations usuelles :

- Présentation en simple boucle amplificateur puis filtre :



Le critère de BARKHAUSEN correspond à la limite entre la divergence et la convergence des oscillations c'est à dire lorsque que le signal complexe est multiplié exactement par l'unité lors du parcours de la boucle, soit un gain de boucle :

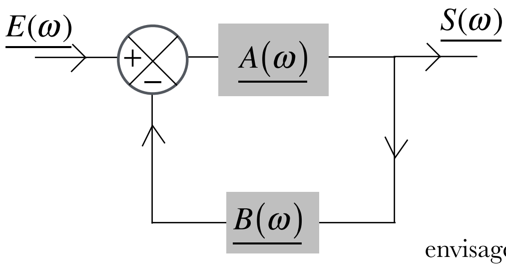
$$\boxed{\underline{A}(\omega).\underline{H}(\omega)=1}$$

Cette équation complexe correspond à deux équations réelles :

$$\boxed{\begin{array}{l}|\underline{A}(\omega)|.|\underline{H}(\omega)|=1\\ \arg(\underline{A}(\omega))+\arg(\underline{H}(\omega))=2k\pi\end{array}} \text{ ou } \boxed{\begin{array}{l}\Re(\underline{A}(\omega).\underline{H}(\omega))=1\\ \Im(\underline{A}(\omega).\underline{H}(\omega))=0\end{array}}$$

Lorsque l'amplificateur est de gain réel, la seconde permet de déterminer la pulsation de l'oscillateur et la première le gain de l'amplificateur.

- Présentation en schéma-bloc de rétroaction :



Dans cette présentation on rappelle la FTBF :

$$\underline{H}(\omega)\equiv\frac{\underline{S}(\omega)}{\underline{E}(\omega)}=\frac{\underline{A}(\omega)}{1+\underline{A}(\omega).\underline{B}(\omega)}$$

Cette FTBF montre qu'une réponse finie non nulle est envisageable en sortie même en absence d'entrée à la condition que le dénominateur de la FTBF soit nul , soit :

$$\boxed{1+\underline{A}(\omega).\underline{B}(\omega)=0} \text{ qui s'écrit également } \boxed{\begin{array}{l}|\underline{A}(\omega)|.|\underline{B}(\omega)|=1\\ \arg(\underline{A}(\omega))+\arg(\underline{B}(\omega))=(2k+1)\pi\end{array}}$$

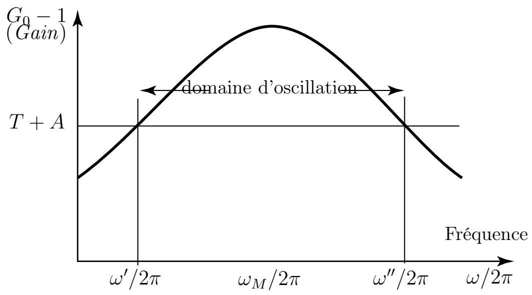
- **Dans le cas d'un LASER** présentant un milieu amplificateur de longueur traversée L_A et donc de gain d'amplification **en puissance par « tour » ou « aller-retour »** $G(L_A)$ très légèrement supérieur à 1 et de coefficient de pertes **en puissance par « tour » ou « aller-retour »** à la réflexion et à la diffusion (1-T).(1-A) très légèrement inférieur à 1, la condition limite d'oscillation s'écrit pour les puissances : $G(L_A).(1-T).(1-A)=1$ soit une naissance possible d'oscillations pour : $G(L_A).(1-T).(1-A)>1$ correspondant quasiment à $G(L_A)-1>T+A$ si ces coefficients T et A sont <<1.

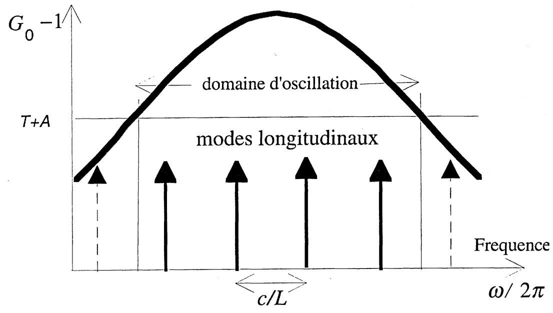
Rajoutons que $G(L_A)$ dépend également de la puissance du rayonnement traversant le milieu amplificateur mais aussi de la pulsation du rayonnement. Ainsi le « léger » dépassement requis correspond à une bande de pulsation assez limitée représentée graphiquement à la page suivante.

Ceci ne constitue pas encore un critère de type BARKHAUSEN car il ne s'agit pas d'un produit de grandeurs complexes. En vérité, il faut raisonner sur la grandeur vibratoire soit le champ électrique et utiliser le fait que le champ doit **non seulement revenir avec la même amplitude mais la même phase après un « aller-retour » ou un « tour ».** Cette condition typique d'onde stationnaire dans un milieu limité donne une condition de type :

$$\boxed{L_{parcours}=k.\lambda_k}\Rightarrow\omega_k=\frac{2\pi c}{\lambda_k}=k.\left(\frac{2\pi c}{L_{parcours}}\right)$$

Visualisation graphique des modes longitudinaux d'un LASER par l'analogie de BARKHAUSEN

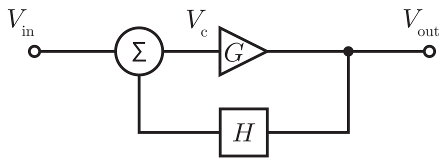




- On peut également choisir de présenter le mode de fonctionnement d'un LASER à deux miroirs par une cavité de type FABRY-PEROT. En notant r_1,t_1,r_2,t_2 les coefficients de réflexion et transmission **<u>en champ électrique</u>** des miroirs, L la longueur d'un aller dans la cavité et α le coefficient des pertes linéiques dans la cavité (α <0 ici car amplification), on peut alors reprendre le modèle rétroactif du critère de BARKHAUSEN pour identifier les fonctions de transfert de la chaine directe et de la chaine retour équivalente. Comme on montre que la FTBF s'écrit :

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{t_1\, t_2\, \mathrm{e}^{-i\,k\,L}\, \mathrm{e}^{-\alpha\, L}}{1 - r_1\, r_2\, \mathrm{e}^{-i\,2\,k\,L}\, \mathrm{e}^{-2\,\alpha\, L}}$$

On peut identifier les fonctions de transfert d'une chaîne directe et d'une chaîne retour (**<u>attention c'est un sommateur en entrée ici et non un comparateur</u>**) :



Transmission du circuit : $\dfrac{V_{out}}{V_{in}} = \dfrac{G}{1 - H\, G}$

Critère de Barkhausen : oscillation si annulation du dénominateur : $H\,G = 1$

- Condition sur la phase (résonance) : $\arg(H(w)) + \arg(G(w)) = 0\ [2\,\pi]$
- Condition sur le gain (égalité gain-pertes) : $|G|\ |H| = 1$

→ **Existence du champ en sortie (V_{out}) en absence d'excitation externe (V_{in})**

→ **Analogie avec la transmission du Fabry-Perot avant le miroir de sortie :**
$G \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha\, L}$ et $H \Leftrightarrow r_1\, r_2\, \mathrm{e}^{-i\,2\,k\,L}\ \mathrm{e}^{-\alpha\, L}$

Possibilité d'oscillation si le dénominateur s'annule : $r_1\, r_2\, \mathrm{e}^{-i\,2\,k\,L}\, \mathrm{e}^{-2\,\alpha\, L} = 1$

- Condition sur la phase (résonance) : $2\,k\,L = 0\ [2\,\pi]$ soit $\lambda_N = 2\,n\,L\,/\,N$
- Condition sur le gain (égalité gain-pertes) : $r_1\, r_2 = \mathrm{e}^{2\,\alpha\, L}$ ou $\alpha = \ln(r_1\, r_2)/(2\,L)$

Signalons enfin les gains en puissance équivalents aux gains en champ E dans les deux présentations précédentes :

$$G_{eq}\left(L_A\right) = \left(e^{-\alpha L_A}\right)^2 = \left(e^{-2\alpha(\omega)L}\right)^2$$

$$1 - T = R = \underline{H_{eq}}(\omega).\underline{H_{eq}}(\omega)^* = \left(r_1.r_2.e^{-j\frac{4\pi L}{\lambda}}\right).\left(r_1.r_2.e^{+j\frac{4\pi L}{\lambda}}\right) = \left(r_1.r_2\right)^2$$

I. Circuit « 5RC »

A. Reconnaissance

1. Dans tous les montages, la rétroaction relie la sortie de l'ALI à son entrée inverseuse sans aucune rétroaction déstabilisante et aucun des potentiels d'entrée n'est directement imposé. Tous les ALI peuvent donc fonctionner en régime linéaire.

2. Premier montage : Amplificateur inverseur de gain $-\frac{R_2}{R_1}$. Suivants : 5 suiveurs de tension intercalés entre les filtres RC du premier ordre.

3. L'amplificateur est déjà identifié. L'ensemble des 5 filtres RC suivis systématiquement d'un suiveur est assimilable à un filtre passe-bas d'ordre 5.

B. Etude du filtre

1. temps caractéristique évident $\tau = RC = 100\mu s = 0.10 ms$

2. La fonction de transfert à vide d'un seul filtre RC passe-bas s'obtient aisément (diviseur de tension) :

$\frac{1}{1+jx}$. Et dans la mesure où chaque filtre est suivi par un suiveur de résistance d'entrée « infinie », le calcul de la fonction de transfert à vide de chaque module est utilisable pour obtenir : $\underline{H}(x) \equiv \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_B}} = \left(\frac{1}{1+jx}\right)^5$

avec $x = RC\omega = \omega.\tau = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 2\pi RCf = 6{,}28\ 10^{-4}.f$

C. Simulation

1. 15,3-12,7=2,6ms pour 3 périodes soit T=0,87ms
2. f =1,15 kHz et donc x=0.722
3. Le critère de BARKHAUSEN s'écrit ici : $\underline{H}(x).\left(-\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(\frac{1}{1+jx}\right)^5.(-k) = 1$

en développant le dénominateur on obtient : $-k = 1 + 5jx - 10x^2 - 10jx^3 + 5x^4 + jx^5$

soit le système de deux équations :

$$\begin{cases} 5x - 10x^3 + x^5 = 0 \\ 1 - 10x^2 + 5x^4 = -k \end{cases}$$

(Un calcul approché de k à partir du x estimé précédemment donne : 2.9)

4. On lit une valeur R_2=30kΩ et R_1=10kΩ soit k=3,0. On en déduit que le gain de boucle est supérieur à l'unité pour la fréquence associée à x=0.73 donc le régime est légèrement divergent et le signal quasi-sinusoïdal : on observe en effet des harmoniques sur la FFT. Toutes les harmoniques sont à environ -45 dB du pic fondamental soit des composantes plus de 100 fois plus petites d'où l'allure quasi-sinusoïdal.

5. Dans cette nouvelle FFT, le premier harmonique n'est qu'à -25dB du fondamental donc le signal n'est vraiment plus sinusoïdal (-25 dB -> 18 fois plus petit). La déformation est certainement visible. La valeur de R_2=100kΩ donne un gain trop important : régime diverge plus vite et le temps dans les phases non-linéaires augmente. On remarque d'ailleurs que la fréquence fondamentale d'oscillation (et des harmoniques) a légèrement diminué (augmentation de la période des oscillations).

II. Circuit « 4RC »

1. Des oscillations préalables sont progressivement atténuées et disparaitront complètement.

Le calcul de BARKHAUSEN conduit à : $-k = 1 + 4jx - 6x^2 - 4jx^3 + x^4$

soit le système de deux équations :

$$\begin{cases} 4x - 4x^3 = 0 \\ 1 - 6x^2 + x^4 = -k \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 1 \\ 1 - 6 + 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le choix de R_2=39kΩ correspond donc à un k trop faible : zone de stabilité => disparition des oscillation

2. On choisira R_2 légèrement supérieur à 40 kΩ et la fréquence des oscillations doit correspondre à x=1 soit une fréquence de $1/(6{,}28.10^{-4})$=1.59 kHz. Quant à l'amplitude des oscillations en régime permanent, elle sera fixé par l'équation en régime non-linéaire…que nous ne connaissons pas.

III. Avec deux filtres en cascade, la fonction de transfert du filtre du second ordre ne peut présenter une partie imaginaire nulle : impossible d'avoir $-k = 1 + 2jx - x^2$ avec k réel ! (R et C non nuls !)