IMSP CB 2025
Partie Modélisation

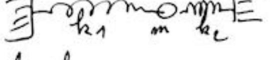
Partie I)

1°) En négligeant la pesanteur, le point matériel A subit deux forces de rappel élastique : $\vec{F_{1/A}} = -k_1(x_1)\vec{u_x}$ puisque x_1 représente son allongement.
et $\vec{F_{2/A}} = -k_2(x_1 - x_2)\vec{u_x}$ puisque $(x_2 - x_1)$ est son allongement.
le point matériel B subit : $\vec{F_{2/B}} = k_2(x_1 - x_2)\vec{u_x}$

2°) On ajoute la force $\vec{F_0} = F_0\vec{u_x}$ sur B
L'équilibre de B permet d'écrire : $\Sigma\vec{F_{/B}} = \vec{0} \Leftrightarrow F_0\vec{u_x} + k_2(x_{1_{eq}} - x_{2_{eq}})\vec{u_x} = \vec{0}$
soit : $F_0 + k_2(x_{1_{eq}} - x_{2_{eq}}) = 0$ (B)
et comme A est également à l'équilibre : $k_1 x_{1_{eq}} = -k_2(x_{1_{eq}} - x_{2_{eq}})$ (A)
Or l'objectif est de trouver k_{eq} permettant d'écrire :
$\vec{F_{\text{resort}/B}} = -\vec{F_0} = -k_{eq}\, x_{2_{eq}}\vec{u_x}$ (avec x_2 allongement de B)
L'éq d'équilibre de (A) donne : $x_{1eq}(k_1 + k_2) = k_2 x_{2eq}$
soit $x_{2eq} = x_{1eq}\dfrac{k_2 + k_1}{k_2}$.
donc $\vec{F_0} = -k_2(x_{1eq} - x_{2eq})\vec{u_x} = k_1 x_{1eq}\vec{u_x} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_{eq}\vec{u_x}$
et $\vec{F_{\text{resort}/B}} = -\vec{F_0} = -\underbrace{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}_{= k_{eq} \text{ par identification}} x_{2eq}\vec{u_x}$

Rq : On retient que lorsque deux ressorts sont en série :
$$\boxed{\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$ (comme les capacités des condensateurs en série)

(!) il existe aussi le cas des ressorts en série opposition
correspondant à ce cas :



et dans ce cas : $k'_{eq} = k_1 + k_2$
comme si les ressorts étaient en parallèle.

3°) G C T G A G G — $k\ k\ k\ k\ k\ k$ correspond à 6 ressorts en série

soit en vertu de la relation démontrée en 2 :
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{6}{k} \Leftrightarrow \boxed{k_{eq} = \frac{k}{6}}$$

4°) Si on néglige l'effet des liaisons hydrogène (correspondant également à 1 modèle élastique), l'allongement global de l'ensemble des 2 brins correspond à celui de deux ressorts en parallèle (commun donc) sous l'action d'une force de $\vec{F_{1brin}} = -k_{eq\,1brin}\, x\,\vec{u_x}$
avec $k_{eq\,1brin} = \frac{k}{6}$ pour chaque brin.
donc
$$-k'_{eq\,2brins}\, x\,\vec{u_x} = \Sigma\vec{F_{brin}} = -\frac{2k}{6}\, x\,\vec{u_x}$$
$$\Rightarrow \boxed{k'_{eq\,2brins} = \frac{k}{3}}$$
(7 paires de bases = 6 ressorts en série + 6 liaisons en //)

5°) L'extension e est l'allongement relatif à la longueur totale à vide.
donc $\vec{F_{2brins}} = -k'_{eq\,2brins}\, x\,\vec{u_x}$
la longueur totale à vide vaut : $6\,l_0$ donc $e = \dfrac{x}{6l_0}$
soit : $\vec{F_{2brins}} = -\dfrac{k}{3} \times 6l_0 e\,\vec{u_x} = -2kl_0 e\,\vec{u_x}$
on attend donc 1 loi de type : $\|\vec{F_{2brins}}\| = Ke$
avec $K = 2kl_0$.
Seule zone où c'est envisageable : jusqu'à $e = 0,9$ (ce qui correspond tout de même à 1 allongement relatif de 90 % !)
et comme l'échelle est inadaptée pour visualiser la pente dans cette zone ... (on pourrait presque que la force est invariante avec e dans cette zone).

6°) Ah ! donc on nous demande d'utiliser cette pente (pourrie !).
On va dire que si cette pente se poursuivait jusqu'à $e = 1$ on estimerait la force à 5 pN (?) $\Rightarrow K = \dfrac{\|F\|}{e} \# 5.10^{-12} = 2kl_0$
$\Rightarrow k \# \dfrac{2{,}5.10^{-12}}{3.10^{-12}} \# \underline{1\ N.m^{-1}}$

Partie (II) : Elasticité d'1 long brin.

$U(x) = U_0 + \frac{1}{2} k' \frac{x^2}{\langle x^2 \rangle}$ avec $k' = 3 k_b T$

et x : distance séparant les 2 extrémités du brin

7°) $\langle \vec{r_i} \cdot \vec{r_j} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{(j \neq i)}^{N-1} \vec{r_i} \cdot \vec{r_j}}{N} \simeq \frac{a^2 \sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i}{N}$

moyenne effectuée sur le Nombre N de petits fragments

donc si la répartition est aléatoire : $\sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i = 0$

et $\langle \vec{r_i} \cdot \vec{r_j} \rangle = 0$ pour $i \neq j$

8°) $\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \rangle$ est 1 somme vectorielle de vecteurs positions dont les sens et directions sont totalements aléatoires

$\Rightarrow \langle \vec{r} \rangle = \vec{0}$

$\langle r^2 \rangle \equiv \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_i} \cdot \vec{r_i}) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \vec{r_i} \cdot \vec{r_j} \right\rangle$

$\langle r^2 \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_i} \cdot \vec{r_i}) \right\rangle}_{\sim N a^2} + \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \vec{r_i} \cdot \vec{r_j} \right\rangle}_{= 0}$ (question 7).

9°) $U(x) = U_0 + \frac{3 k_b T}{2 N a^2} x^2$ dimension.

$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, U$ qui s'écrit en unidimensionnel :

$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{3 k_b T}{N a^2} x$

et $\vec{F} = -\left(\frac{3 k_b T}{N a^2} \right) x \, \vec{u_x}$.

Partie (III)

Hyp : on suppose que le seul champ $\vec{E}$ dans lequel baignent les charges $+q$ et $-q$ est le $\vec{E}_{ext} = \vec{E}$. (on néglige l'interaction de l'une sur l'autre).

10°) $\vec{F}_{M_1} = -q\vec{E}$ et $\vec{F}_{M_2} = +q\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{M_1} + \vec{F}_{M_2} = \vec{0}$!

11°) Force magnétique de Lorentz.

$\vec{F}_{B/M_1} = -q \vec{v_1} \wedge \vec{B}$ et $\vec{F}_{B/M_2} = +q \vec{v_2} \wedge \vec{B}$.

$\vec{F}_{TOT\,B} \equiv \vec{F}_{B/M_1} + \vec{F}_{B/M_2} = -q \vec{v_1} \wedge \vec{B} + q \vec{v_2} \wedge \vec{B}$

$\vec{F}_{TOT\,B} = q (\vec{v_2} - \vec{v_1}) \wedge \vec{B}$

or $\vec{v_2} = \frac{d\vec{OM_2}}{dt}$ $\vec{v_1} = \frac{d\vec{OM_1}}{dt}$ $\Rightarrow \vec{v_2} - \vec{v_1} = \frac{d(\vec{M_1 M_2})}{dt}$

avec $\vec{M_1 M_2} = \vec{a}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{TOT\,B} = q \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right) \wedge \vec{B}}$ ou $\frac{d(q\vec{a})}{dt} \wedge \vec{B}$

(puisque q est constante ici)

(mais on ne sait pas pourquoi car les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ seront dépendants du temps. Sont-ils responsables de la charge $q(t)$?)

Champ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cos(\omega t - kz) \vec{u_y}$.

12°) $\langle \vec{F_1} \rangle = \frac{1}{2} \alpha \langle \vec{\text{grad}}(E^2) \rangle$

moyenne temporelle ici

avec $E^2 = E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\omega t - kz)$

enfin : $\vec{\text{grad}} \left(E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\omega t - kz) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\omega t - kz) \right) \vec{u_x}$

$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\omega t - kz) \right) \vec{u_z}$

soit : $\vec{\text{grad}}(E^2) = -\frac{4x}{\sigma^2} E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u_x}$

$+ E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} k \sin(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz) \vec{u_z}$

$\langle \vec{\text{grad}}(E^2) \rangle = -\frac{2x}{\sigma^2} E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \vec{u_x}$ (car $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \sin(\;) \cos(\;) \rangle = 0$)

et $\boxed{\langle \vec{F_1} \rangle = -\frac{\alpha x}{\sigma^2} E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \vec{u_x}}$

13) $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt}\, dt = \frac{1}{2} \left[f(t_0+T) - f(t_0) \right] = 0$

si f est T périodique.

Si $\vec{B}$ est la composante magnétique associée à $\vec{E}$ alors elle est également T périodique et $\vec{E} \wedge \vec{B}$ est $T/2$ périodique.

$\Rightarrow \langle \vec{F_2} \rangle = \vec{0}$.

14°) L'intensité lumineuse locale est le carré de l'amplitude A de l'onde (Vous ne savez pas encore que $s^2 \propto E^2$.)

$\Rightarrow I \underset{\text{proportionnelle}}{\propto} \langle E^2 \rangle$

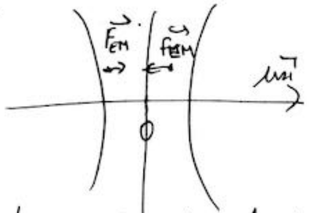
$\Rightarrow I = \underset{\text{choix de notation}}{1} \langle E^2 \rangle = 1 \frac{E_0^2}{2} e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}$

15°) $\langle \vec{F_{EM}} \rangle = \langle \vec{F_1} \rangle + \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\langle \vec{F_2} \rangle}} = - \frac{\alpha x}{\sigma^2} E_0^2 e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}} \vec{u_x}$

$\langle \vec{F_{EM}} \rangle = - \underset{\text{kappa}}{K} x \vec{u_x}$ avec $K = \frac{\alpha E_0^2}{\sigma^2} e^{-\frac{2x^2}{\sigma^2}}$

$K = \frac{2\alpha}{1\sigma^2} I(x)$.

16°) La "constante de raideur" est d'autant + élevée que l'intensité lumineuse est élevée.
Le sens de la force dépend du signe de α (comme pour 1 ressort).



La bille est bien piégée dans la direction $\vec{u_x}$.
(si elle a de la vitesse suivant $\vec{u_y}$ ou $\vec{u_z}$ elle peut sortir du faisceau !).