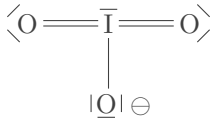
CORRIGE DS5 (2024)

Exercice 1 : Solubilité du diiodate de baryum

D - Solubilité du diiodate de baryum

32 L'iode a pour configuration électronique $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^2\,3d^{10}\,4p^6\,5s^2\,4d^{10}\,5p^5$: elle compte donc sept électrons de valence, et peut être hypervalente. L'oxygène a pour configuration $1s^2\,2s^2\,2p^4$ et compte six électrons de valence. On peut donc proposer comme structure de Lewis :



L'édifice est de type AX_3E (l'atome central est relié à trois atomes et porte un doublet non-liant), donc d'après la théorie VSEPR sa géométrie est **pyramidale à base triangulaire**.

> *La théorie VSEPR et la géométrie des molécules ne figurent pas du tout au programme de PT !!*

33 L'équation de dissolution du précipité s'écrit

$$\boxed{\mathrm{Ba(IO_3)_{2(s)}} \;=\; \mathrm{Ba^{2+}_{(aq)}} + 2\,\mathrm{IO^-_{3(aq)}}\,.}$$

34 Par définition, la solubilité s est égale à la quantité de matière de solide $\xi_{\text{éq}}$ dissoute dans $V = 1\,\mathrm{L}$ de solution lorsque l'équilibre est atteint, exprimée en $\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$: on a donc $s = \xi_{\text{éq}}/V$. D'après le bilan de matière,

$$[\mathrm{Ba^{2+}}]_{\text{éq}} = \frac{\xi_{\text{éq}}}{V} = s \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{IO_3^-}]_{\text{éq}} = \frac{2\xi_{\text{éq}}}{V} = 2s\,.$$

D'après la loi d'action des masses,

$$s \times (2s)^2 = K_\mathrm{s} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{K_\mathrm{s} = 4s^3\,.}$$

1 - Dosage conductimétrique

35 Il s'agit ici de doser les ions baryum $\mathrm{Ba^{2+}}$ par les ions sulfate $\mathrm{SO_4^{2-}}$, la réaction de titrage est donc

$$\boxed{\mathrm{Ba^{2+}_{(aq)}} + \mathrm{SO^{2-}_{4(aq)}} \longrightarrow \mathrm{BaSO_{4(s)}}\,.}$$

36 L'ajout d'un grand volume d'eau distillée dans un dosage conductimétrique permet de **négliger la variation de volume de solution** dans le bécher au cours du titrage, et ainsi d'utiliser une expression linéarisée de la conductance pour l'exploitation de l'équivalence.

37 La conductance est reliée à la conductivité par $G = k\sigma$, avec la constante de cellule k qui se détermine par étalonnage, et la conductivité est reliée aux concentrations C_i en ions par la loi de Kohlrausch,

$$\sigma = \sum_{\text{ions } i} \lambda_i^\circ C_i\,.$$

D'après la question précédente, on suppose $V_0 = \text{cte}$, ce qui permet de relier directement la conductance aux quantités de matière $n_i = C_i V_0$,

$$G = \frac{k}{V_0}\sum_{\text{ions } i} \lambda_i^\circ n_i = \frac{k}{V_0}\left(\lambda^\circ(\mathrm{IO_3^-})\,n_{\mathrm{IO_3^-}} + \lambda^\circ(\mathrm{Ba^{2+}})\,n_{\mathrm{Ba^{2+}}} + \lambda^\circ(\mathrm{SO_4^{2-}})\,n_{\mathrm{SO_4^{2-}}} + \lambda^\circ(\mathrm{Na^+})\,n_{\mathrm{Na^+}}\,.\right)$$

Au cours du dosage, la quantité de matière de IO_3^- reste égale à celle contenue dans le volume V_f du filtrat, où il est présent en concentration $2s$ d'après la question 34 :

$$n_{IO_3^-} = 2sV_f = \text{cte}\,.$$

L'ion Na^+ est un ion spectateur, sa quantité de matière augmente proportionnellement au volume V de solution titrante versée, où il est présent en concentration $2C$ (le sulfate de baryum se dissout en $2\,Na^+ + SO_4^{2-}$), soit

$$n_{Na^+} = 2CV\,.$$

Enfin, procédons au bilan de matière de la réaction de titrage pour déterminer la quantité de matière en ions baryum et sulfate,

	Ba^{2+}	$+$	SO_4^{2-}	$=$	$BaSO_4$
Initial	sV_f		CV		0
Final	$sV_f - \xi$		$CV - \xi$		ξ
$V < V_E$	$sV_f - CV$		0		CV
$V = V_E$	0		0		$CV_E = sV_f$
$V > V_E$	0		$CV - sV_f$		$CV_E = sV_f$

Ainsi, en regroupant les constantes, on trouve comme expression de la conductance

▷ avant l'équivalence :

$$G = \frac{k}{V_0}\left[-\lambda^\circ(Ba^{2+})\,CV + 2\lambda^\circ(Na^+)\,CV\right] + \text{cte} = \underbrace{\frac{k}{V_0}\left[2\lambda^\circ(Na^+) - \lambda^\circ(Ba^{2+})\right]C}_{<0}\,V + \text{cte}$$

▷ après l'équivalence :

$$G = \frac{k}{V_0}\left[\lambda^\circ(SO_4^{2-})\,CV + 2\lambda^\circ(Na^+)\,CV\right] + \text{cte}' = \underbrace{\frac{k}{V_0}\left[\lambda^\circ(SO_4^{2-}) + 2\lambda^\circ(Na^+)\right]C}_{>0}\,V + \text{cte}'$$

La pente de la courbe $G = f(V)$ change donc de signe au passage de l'équivalence. Compte tenu des valeurs numériques données, elle est (en valeur absolue) beaucoup plus élevée après l'équivalence. On en déduit le tracé de la figure 6.

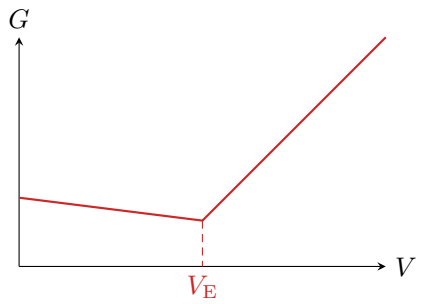


Figure 6 – Évolution de la conductance au cours du titrage.

38 D'après le tableau d'avancement construit précédemment, on a à l'équivalence

$$CV_E = sV_f \qquad \text{soit} \qquad \boxed{s = \frac{CV_E}{V_f}}$$

Numériquement,

$$s = \frac{5\cdot 10^{-2}\times 11\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-2}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{s = 11\cdot 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\,.}$$

2 - Dosage des ions iodate

39 Le nombre d'oxydation de l'iode dans I_2 vaut 0, et il vaut $-I$ dans I^-. Pour IO_3^-,

$$\text{NO}_{IO_3^-} - 2\times 3 = -1 \qquad \text{soit} \qquad \text{NO}_{IO_3^-} = +\text{V}\,.$$

40 Les trois NO sont différents, on en déduit donc directement que le domaine ① est celui de IO_3^-, le domaine ② celui de I_2 et le domaine ③ celui de I^-.

41 Il s'agit d'une frontière redox pour le couple I_2/I^-, associé à la demi-équation

$$I_2 + 2\,e^- \;=\; 2\,I^- \,.$$

La loi de Nernst s'écrit

$$E = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[I_2]}{[I^-]^2}\,.$$

Sur la frontière, $[I_2] = [I^-] = c = 0{,}1\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$, donc

$$\boxed{E_{23} = E^\circ(I_2/I^-) - 0{,}03\log c\,.}$$

Numériquement,

$$E_{23} = 0{,}62 + 0{,}03 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_{23} = 0{,}65\,\mathrm{V}\,.}$$

42 Il s'agit d'une réaction de médiamutation entre les ions iodate IO_3^- et les ions iodure I^- : à pH élevé, ces deux ions peuvent coexister (il existe une frontière commune), mais ce n'est plus le cas à pH faible, ils réagissent donc l'un avec l'autre pour former du diiode I_2, de couleur marron. L'équation de réaction s'écrit

$$\begin{array}{rcll}
2\,I^- &=& I_2 + 2\,e^- & (\times 5)\\
2\,IO_3^- + 12\,H^+ + 10\,e^- &=& I_2 + 6\,H_2O & \\
\hline
10\,I^- + 2\,IO_3^- + 12\,H^+ &=& 6\,I_2 + 6\,H_2O & \\
\hline
5\,I^- + IO_3^- + 6\,H^+ &=& 3\,I_2 + 3\,H_2O &
\end{array}$$

La constante d'équilibre de cette réaction s'écrit

$$K^\circ = 10^{\frac{5}{0{,}06}(E^\circ(IO_3^-/I_2) - E^\circ(I_2/I^-))} = 10^{\frac{5}{0{,}06}\times(1{,}2-0{,}62)} = 10^{\frac{5}{0{,}06}\times 0{,}6}$$

ce qui donne en ordre de grandeur

$$\boxed{K^\circ \simeq 10^{50} \gg 1\,.}$$

La réaction de médiamutation est donc quasi-totale.

43 En supposant IO_3^- limitant, de quantité de matière $n_{IO_3^-,I} = 2s\,V_f'$ (cf. question 34) avec $V_f' = 20\,\mathrm{mL}$ le volume de filtrat prélevé, la quantité de diiode formée est égale à

$$\boxed{n_{I_2,f} = 3n_{IO_3^-,I} = 6sV_f'\,.}$$

L'équation de la réaction de titrage par le thiosulfate s'écrit

$$\begin{array}{rcl}
I_2 + 2\,e^- &=& 2\,I^- \\
2\,S_2O_3^{2-} &=& S_4O_6^{2-} + 2\,e^- \\
\hline
I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} &=& 2\,I^- + S_4O_6^{2-}
\end{array}$$

Notons $C' = 10^{-2}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ la concentration de la solution de thiosulfate. Un bilan de matière à l'équivalence donne

$$\begin{cases} C'V_E' - 2\xi_E' = 0 \\ n_{I_2,f} - \xi_E' = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad n_{I_2,f} = \frac{C'V_E'}{2}$$

d'où on déduit finalement la quantité de matière initiale en ions iodate en identifiant les deux expressions de $n_{I_2,f}$,

$$\boxed{n_{IO_3^-,I} = \frac{C'V_E'}{6}\,.}$$

Exercice (2) : Montgolfière

(I) - Atmosphère en équilibre.

I.A) Atmosphère isotherme. $T_0 = 288$ K uniforme.

1°) Modèle Gaz Parfait : $PV = nRT$ s'écrit également par définition de la masse volumique : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{n M_e}{V} = \frac{P M_e}{RT}$ avec M_e la masse molaire moyenne de l'air.

soit ici pour $T = T_0$: $\boxed{\mu = \frac{PM}{RT_0}}$

2°) Condition d'équilibre de l'air (dans "lui-m̂") en présence du seul champ de pesanteur : $\vec{grad}\, p = \mu \vec{g}$ (EFSF)

qui donne ici par projection sur $\vec{e_z}$: $\frac{dp}{dz} = -\mu g$

soit également d'après la question (1) : $\frac{dP}{dz} = -\frac{P M_e g}{RT_0}$

En séparant les variables p et z : $\frac{dp}{p} = \frac{-M_e g\, dz}{RT_0}$

s'intègre entre $z=0$ et $z=z$: $\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{M_e g}{RT_0}(z-0)$

ou encore : $\boxed{P(z) = P_0\, e^{-\frac{M_e g z}{RT_0}}}$

avec $H = \frac{RT_0}{M_e g} \Rightarrow \boxed{P(z) = P_0\, e^{-\frac{z}{H}}}$

3°) $M_e = 0{,}2 \times M_{O_2} + 0{,}8 \times M_{N_2} = 0{,}2 \times 32 + 0{,}8 \times 28 = 28{,}8$ g/mol d'"air"

$H = \frac{8{,}314 \times 288}{28{,}8 \cdot 10^{-3} \times 9{,}8} = 8480$ m $\simeq 8{,}5$ km

$P(z_{iso\,50\%}) = \frac{P_0}{2} = P_0\, e^{-\frac{z_{iso\,50\%}}{H}}$

soit $\ln 2 = \frac{z_{iso\,50\%}}{H} \Rightarrow z_{iso\,50\%} = 5{,}88$ km

I.B) Equilibre polytropique :

atmosphère à gradient de température (troposphère) : $T = T_0(1-\alpha z)$

4°) L'EFSF associée à l'équation d'état des GP donne cette fois :

$\frac{dp}{p} = \frac{-M_e g\, dz}{RT_0(1-\alpha z)}$ soit par intégration :

$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \int_0^z \frac{d(1-\alpha z)}{1-\alpha z}$.

donc : $\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln(1-\alpha z)$

ou encore : $\boxed{P(z) = P_0 (1-\alpha z)^{\beta}}$ avec $\beta = \frac{M_e g}{\alpha R T_0}$

On peut écrire également par définition de $z_0 = \frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{H} = \frac{Mg}{RT_0}$

$$\boxed{\beta = \frac{z_0}{H}}$$

On obtient $\mu(z)$ par la loi des GP :

$$\mu = \frac{pM_e}{RT_0(1-\alpha z)} = \frac{M_e}{RT_0}\,\frac{p_0(1-\alpha z)^{\beta}}{(1-\alpha z)}$$

soit $\boxed{\mu = \mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}}$ avec $\mu_0 = \frac{p_0 M_e}{RT_0}$

5°) Calcul du $z_{50\%}$ pour le modèle polytropique :

$z_{50} = z_{50\%\,poly}$ vérifie $\frac{\cancel{p_0}}{2} = \cancel{p_0}(1-\alpha z_{pol})^{\beta}$

A.N : $\beta = \frac{33}{8,5} \simeq 3,88$

$$1-\alpha z_{pol} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} \simeq 0,84$$

$$z_{pol} \simeq 0,16 \times 33 \simeq \underline{5,4\ km}$$

Prévisible puisqu'une température moyenne + basse implique moins d'agitation thermique et donc 1 répartition des pressions de gradient + élevé avec + de molécules de gaz à basses altitudes.

6°) $(\alpha T_0)_{exp} = 6,94 \Rightarrow \alpha_{exp} = \frac{6,94}{288,15} \simeq 0,024$

$$\Rightarrow z_{0\,exp} = 41,52\ \underline{km}$$

$$\Rightarrow \beta_{exp} = \frac{z_{0\,exp}}{H} = \underline{4,9} \neq 5,26\ !$$

incohérence non négligeable entre le modèle et l'évolution réelle des grandeurs avec z.

7°) Désormais : $T_0 = 288K$ $P_0 = 1013\ hPa$ $\beta = 5$ $z_0 = 40\ km$ (et $\alpha_{loc} = 2,5 \cdot 10^{-5}\ m^{-1}$)

P_e, μ_e, T_e relatifs à l'atmosphère extérieure à la montgolfière.

$V_0 = 2000\ m^3$ volume intérieur (fixe) de la montgolfière.

$m = 500\ kg$ comprenant l'enveloppe, la nacelle et les passagers.

m_i masse d'air intérieur variable.

$(m + m_i)$ masse de l'ensemble

$P_i = P_e$ à tout instant grâce à l'ouverture inférieure.

$m_i = \mu_i V_0 = \frac{P_i M_e V_0}{R T_i}$ (6P) $\boxed{m_i = \frac{P_e M_e V_0}{R T_i}}$ car $P_e = P_i$

et $\mu_e = \frac{P_e M_e}{R T_e}$ donc : $\boxed{m_i = \mu_e V_0 \frac{T_e}{T_i}}$

8°) Soit $\vec{P}$ le poids de l'ensemble : $\vec{P} = (m_i + m)\vec{g}$

Soit $\vec{\Pi}_a$ la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_a = -\mu_e V_0 \vec{g}$

L'équilibre mécanique (ou bien le cas d'ascension uniforme en l'absence de frottements) donne : $\vec{P} + \vec{\Pi}_a = \vec{0}$

Soit encore ici :

$$m_i + m = \mu_e V_0 \left(= \frac{m_i T_i}{T_e}\right).$$

$$\mu_e V_0 \left(\frac{T_e}{T_i}\right) + m = \mu_e V_0.$$

$$\boxed{m = \mu_e V_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)}.$$

ou bien : $\boxed{m = m_i \left(\frac{T_i}{T_e} - 1\right)}$

9°) Compensation seulement du poids mg (?).

$$m \cancel{g} = \mu_e V_0 \cancel{g}$$

$$m = \frac{P_e M_e}{R T_e} V_0 = \frac{M_e V_0}{R} \times \frac{P_e}{T_e} = \frac{M_e V_0}{R} \times \frac{P_0}{T_0} (1 - \alpha z)^{\beta - 1}$$

$$m = \mu_0 V_0 (1 - z_m \alpha)^{\beta - 1}$$

A.N : $\mu_0 = \frac{P_0 M_e}{R T_0} = \frac{1{,}013 . 10^5 \times 28{,}8 . 10^{-3}}{8{,}314 \times 288} = 1{,}218 \text{ kg/m}^3$

$\mu_0 V_0 = 2437 \text{ kg}$.

$\frac{\mu_0 V_0}{m} = 4{,}874$ et $\beta - 1 = 4$

$1 - z_m \alpha = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\frac{m}{\mu_0 V_0}}} = 0{,}673 \Rightarrow z_m \alpha = 0{,}327$

soit enfin : $z_m \simeq 13 \text{ km}$

10°) On chauffe donc l'air jusqu'à T_d qui est la température intérieure à la limite de l'équilibre.

D'après la question 8) : $m = \underset{\text{au sol}}{\mu_0} V_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_d}\right)$

soit : $1 - \frac{T_0}{T_d} = \frac{m}{\mu_0 V_0}$ et donc $1 - \frac{m}{\mu_0 V_0} = \frac{T_0}{T_d}$

ou encore : $T_d = T_0 \times \frac{\mu_0 V_0}{\mu_0 V_0 - m} = 288 \times \frac{2437}{1937} \simeq \underline{362 \text{ K}}$

11°) L'équilibre (à une altitude qcq !) donnait :

$$m = \mu_e V_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \quad \text{(question 8°))}$$

et $$\mu_e = \mu_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta - 1} \quad \text{(question 4°))}$$

donc : $$m = \mu_0 V_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)$$

avec $\rho_e = \rho_i = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta}$ et $\frac{\rho_e}{T_e} = \frac{\rho_0}{T_0}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1}$

soit : $$\frac{m}{\mu_0 V_0} = \left(1 - \frac{T_0}{T_d}\right) = \frac{T_0 \rho_e}{T_e \rho_0}\left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)$$

$$\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d}\right) = \frac{\rho_e}{\rho_0}\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i}\right)$$

et enfin : $$\rho_e\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i}\right) = \rho_0\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d}\right).$$

$\underline{K = \rho^0}$!

On remarque que $\rho_0\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d}\right)$ est 1 constante m̂ pendant l'ascension de la montgolfière donc :

$$d\left(\frac{\rho_e}{T_e} - \frac{\rho_e}{T_i}\right) = 0$$

ou $$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + \frac{d\left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i}\right)}{\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i}} = 0$$

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + \frac{T_i T_e}{T_i - T_e}\left(-\frac{dT_e}{T_e^2}\right) + \frac{T_i T_e}{T_i - T_e}\left(\frac{dT_i}{T_i^2}\right) = 0$$

$$\frac{dT_i}{T_i} \times \frac{T_e}{T_i - T_e} = \frac{dT_e}{T_e} \times \frac{T_i}{T_i - T_e} - \frac{d\rho_e}{\rho_e}$$

$$\frac{dT_i}{T_i} = \frac{T_i}{T_e}\left(\frac{dT_e}{T_e}\right) - \left(\frac{T_i - T_e}{T_e}\right)\frac{d\rho_e}{\rho_e}$$

qui donne avec leur notation (non-différentielle ?)

$$\boxed{\frac{\delta T_i}{T_i} = \left(\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{\delta T_e}{T_e} + \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right)\frac{\delta \rho_e}{\rho_e}}$$

et on en fait quoi ??!...

12°) Dans la question 8°) on a montré : $\frac{m}{\mu_0 V_0} = \frac{\mu_e}{\mu_0}\left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)$

soit : $$\frac{m}{\mu_0 V_0} = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1}\left(1 - \frac{T_0\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)}{T_i}\right)$$

$$\frac{m}{\mu_0 V_0} = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta-1} - \frac{1}{\theta_i}\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\beta}$$

soit en effet avec : $z = \alpha z = \frac{z}{z_0}$

$$\boxed{\frac{m}{\mu_0 V_0} + \frac{1}{\theta_i}(1-z)^\beta = (1-z)^{\beta-1}}$$ CQFD.

Et la question 9 faisait apparaître (très artificiellement) 1 z_m

$$z_m = \frac{z_m}{z_0} \quad \text{et} \quad \frac{m}{\mu_0 V_0} = (1-z_m)^{\beta-1}$$

donc : $(1-z_m)^{\beta-1} + \frac{1}{\theta_i}(1-z)^\beta = (1-z)^{\beta-1}$

pour pouvoir proposer la fonction $\theta_i(z)$:

$$\theta_i(z)\left[(1-z)^{\beta-1} - (1-z_m)^{\beta-1}\right] = (1-z)^\beta.$$

$$\boxed{\theta_i(z) = \frac{(1-z)^\beta}{(1-z)^{\beta-1} - (1-z_m)^{\beta-1}}}$$

($\beta = 5$ et $\beta - 1 = 4$) et on travaille dans 1 zone où $z = \frac{z}{z_0} \ll 1$.

On peut également supposer que $z < z_m$ ($z_m = 13$ km).

θ_i est 1 paramètre adimensionné repérant indirectement la température chaude intérieure T_i à T_0 la température de l'atmosphère au sol.
La relation à z (et donc indirectement à z) est basée sur l'équilibre de la Montgolfière sous θ_i à l'altitude z.
Les courbes repèrent donc (indirectement) les températures d'air chaud nécessaires à l'équilibre à 1 altitude fixée.
si θ_i est décroissante de z (cas de $\frac{\beta m}{\mu_0 V_0} < 1$ manifestement) alors + on chauffe + l'altitude d'équilibre est basse !
Comme l'opérateur ne peut que chauffer (baisse de température spontanée gouvernée par la conduction et la convection naturelle) alors il peut être dans des conditions où l'air trop chaud peut conduire à 1 écrasement au sol !

13°) $\theta_i'(0) > 0$ pour $\frac{\beta m}{\mu_0 V_0} > 1 \Rightarrow V_0 < \frac{\beta m}{\mu_0} \simeq \frac{5 \times 500}{1{,}22} = \underline{2050\ m^3}$

et comme l'enveloppe va se détériorer si $T > 100°C = 373K$.

au décollage (10°) $\frac{m}{\mu_0 V_{0d}} = \left(1 - \frac{T_0}{T_d}\right) = \left(1 - \frac{1}{\theta_i}\right) = 0{,}228$

$$V_{0d} = \frac{500}{1{,}22 \times 0{,}228} \simeq 1800\ m^3 \quad (< 2050\ m^3 \text{ OUF}).$$

($z_m(V_{min}) \simeq 12$ km) et ($z_m(V_{max}) \simeq 13$ km).

EXERCICE 3 : Énergie Hydroélectrique

3.1) $\boxed{16}$ L'eau arrive à l'altitude de la turbine après conversion de son énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique. Si on néglige tout frottement (viscosité) lors de cette "chute" précédant le passage dans la turbine, alors on peut appliquer le théorème de BERNOULLI sur cette phase :

$$P^0 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu v_0^2}_{\simeq 0} + \mu g \underbrace{z_0}_{} = P_{\text{entrée de turbine}} + \frac{1}{2}\mu v^2 + \mu g \underbrace{z_T}_{}$$

($\simeq 0$: vitesse négligeable au niveau de la surface libre du réservoir d'eau) ; z_0 : altitude de la surface libre de la retenue ; v : vitesse en entrée de turbine ; z_T : altitude turbine

→ Si l'entrée de la turbine est à l'air libre aussi ($P_{\text{entrée}} = P^0$) alors on vérifie approximativement :

$$\mu g \underbrace{(z_0 - z_T)}_{H} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

↳ entrée de turbine.

soit : $v = \sqrt{2gH}$ (Torricelli).

→ Sinon :

$$\mu g H + (P_0 - P_{\text{entrée}}) = \frac{1}{2}\mu v^2$$

(vitesse inférieure en entrée de turbine et pression + forte)

(μ = ρ_{eau} dans l'énoncé)

→ L'énergie cinétique débitée (par seconde) à l'entrée de la turbine serait par définition :

$$\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{\text{entrée Turbine}} = \underbrace{Q}_{\text{débit volumique}} \times \left(\frac{dE_c}{d\tau}\right) = Q \times \frac{1}{2}\rho_{eau} v^2$$

↳ énergie cinétique volumique

Cette grandeur a bien l'unité d'une puissance et donc par définition de l'énoncé :

$$P_{\text{Hydro}} = Q \times \left(\frac{1}{2}\rho_{eau} v^2\right) = Q \times \rho_{eau} \times g H$$

(si la turbine est à l'air libre)

Cette puissance peut-être intégralement fournie à la turbine si le fluide sort de celle-ci sans aucune vitesse et s'il n'y a aucune pertes. Il s'agit donc du <u>maximum de puissance récupérable par la turbine</u>.

optimisation
- ⇒ minimiser les frottements : dans le tuyau (canalisation d'amenée) au niveau de la turbine.
- ⇒ perdre 1 max de vitesse pendant le passage dans la turbine. (on peut jouer sur la vitesse de rotation de la turbine).
- ⇒ éviter les frottements mécanique sur l'arbre.

3.2 | 17 "Donner" l'expression... ⇒ $p(z) = P_0 + \rho_{eau} g (h - z)$
(si $\rho = \rho_0$ → incompressible-homogène)

Dans l'atmosphère, le gradient de pression dû à la pesanteur est presque 1000x inférieur à celui dans l'eau à cause du rapport des masses volumiques (mêmes si (attention) ce gradient n'est pas uniforme).

18 $\overrightarrow{dF}_{\substack{pression \\ eau}} = +p(z) \times \underbrace{(L\,dz)}_{\substack{\text{surface} \\ \text{élémentaire} \\ \text{à l'altitude } z \text{ à } dz \text{ près.}}} \times \vec{e_x}$

$$\vec{F}_{eau} = \int_{\substack{\text{face} \\ \text{plane verticale} \\ \text{barrage.}}} \overrightarrow{dF}_{\substack{pression \\ eau}} = \left(\int_0^{h=H} \left(P_0 + \rho_{eau} g (h - z) \right) L\,dz \right) \vec{e_x}$$

$$\vec{F}_{eau} = \underbrace{P_0 \times L \times H\ \vec{e_x}}_{\text{dûe à l'atmosphère}} + \underbrace{\rho_{eau}\, g \frac{H^2}{2} \times L\ \vec{e_x}}_{\text{due exclusivement à l'eau.}} \quad (h = H)$$

Avec 1 pression de l'air supposée uniforme le module de la $\vec{F}_{air}$ vaudra $P_0 \times H\sqrt{2} \times L$ (triangle isocèle) et aura deux projections (horizontale et verticale) de mêmes valeurs :

$\vec{F}_{air} \cdot \vec{e_x} = -P_0 H L$ (base de longueur H = hauteur).
$\vec{F}_{air} \cdot \vec{e_z} = -P_0 H L$.

⇒ $\vec{F}_{air}$ à 45° de la verticale et de l'horizontale.

La composante horizontale globale cherchant à faire "céder" le barrage (glisser en fait) est donc :

$$\cancel{P_0 LH} + \rho_{eau}\, g \frac{H^2 L}{2} - \cancel{P_0 HL} = \rho_{eau}\, g \frac{H^2 L}{2}$$

$\boxed{19}$ La force de frottement solide est bien sûr suivant $-\vec{e_x}$

L'équilibre du barrage donne :

→ en vertical : $\vec{P_{eson\,tot}} + \vec{R} = \vec{0}$

$$-\rho_m \frac{H^2 L}{2} g\, \vec{e_z} + \vec{R} = \vec{0}$$

(attention à ne pas oublier que la force de pression verticale de l'air est compensée par P_0 régnant sous le barrage)

(barrage = volume fermé entouré intégralement de P_0)

donc : $\|\vec{R}\| = \rho_m \frac{H^2 L}{2} g$

(Si l'énoncé envisage 1 barrage ventouse alors $\|\vec{R}\| = \rho_m \frac{H^2 L}{2} g + P_0 LH$!)

(Mais au sol on doit plutôt avoir la situation suivante :

donc le barrage est quasiment intégralement entouré de P_0 sauf aux "points" de contact !)

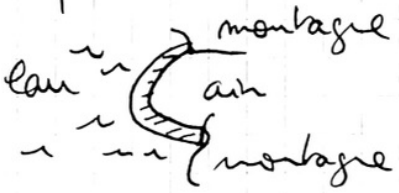
Avenir habituelle de ces sujets !

→ en horizontal : $\underbrace{\rho_{eau}\, g \frac{H^2 L}{2}}_{\text{bilan horizontal des forces de pression}} = \|\vec{F_{frottement}}\|$

donc : $\rho_{eau}\, g \frac{H^2 L}{2} \leq \underset{\downarrow \; 1/2}{\mu} \times \rho_m\, g \frac{H^2 L}{2}$

vérifié tout juste ⟹ $\boxed{\rho_{eau} \leq \frac{\rho_m}{2}}$ → car 1 béton a une masse volumique d'environ 2500 kg/m³

$\boxed{20}$ barrage voûte : n'utilise pas la force de frottement au sol mais la réaction d'1 paroi rocheuse et puisque la voûte est dans ce sens :



le béton subit des efforts de compression au lieu de traction (ce à quoi il résiste bien mieux !)

3.3) $\boxed{21}$ le débit volumique au niveau de la surface de la retenue d'eau vaut : $\frac{dh}{dt} \times S_{re}$ (vitesse uniforme sur la section)

et le débit volumique en sortie (section de turbine) vaut : $V \times S$

S'il y avait 1 débit Q_e entrant dans la retenue d'eau, alors la conservation du débit volumique (fluide incompressible donnerait)

$$Q_e + \left|\frac{dh}{dt}\right| S_{re} = V S.$$

si Q_e est négligeable $\Rightarrow \left|\frac{dh}{dt}\right| S_{re} = V S \Rightarrow \left|\frac{dh}{dt}\right| = \frac{V S}{S_{re}}.$

le rapport des vitesses égale le rapport inverse des sections

donc si $S_{re} \gg S$ alors $V \gg \left|\frac{dh}{dt}\right|$.

$\boxed{22}$ BERNOULLI : $P + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z = Cte$ sur 1 ligne de courant

si l'écoulement est stationnaire, parfait et incompressible homogène.

Turbine à l'air libre : (B à l'entrée de la turbine) $P_B = P_0 = P_A$

donc : $\boxed{\frac{\mu}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \mu g h(t) = \frac{\mu}{2} V^2 + \mu g(-H_1)}$

$(\mu = \rho_{eau})$

$V_A = \left|\frac{dh}{dt}\right| = \frac{V S}{S_{re}}$

donc : $\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}_{\text{négligeable devant}} + g h(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{re}^2}{S^2}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + (-g H_1)$

$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \simeq \left(\frac{S^2}{S_{re}^2}\right) \times 2g(h + H_1)$

soit $\boxed{\frac{dh}{dt} \simeq -\frac{S}{S_{re}}\sqrt{2g(h+H_1)}}$ CQFD.

$\boxed{23}$ Avec $\Psi(t) = h(t) + H_1$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{S}{S_{re}}\sqrt{2g\,\Psi(t)}$$

soit $$\frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi}} = -\underbrace{\frac{S}{S_{re}}\sqrt{2g}}_{K}\,dt$$

$$\int \frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi}} = 2\int \frac{1}{2}\frac{d\Psi}{\sqrt{\Psi}} = 2\int d(\sqrt{\Psi})$$

donc par intégration entre $\Psi(0) = H + H_1$ et $\Psi^*(t^*)$

$$\sqrt{\Psi^*} - \sqrt{H+H_1} = -\frac{K}{2}(t^* - 0)$$

ou bien :

$$\sqrt{h(t) + H_1} - \sqrt{H+H_1} = -\frac{S}{S_{re}}\frac{\sqrt{2g}}{2}t$$

$$h(t) + H_1 = \left(-\frac{S}{S_{re}}\frac{\sqrt{2g}}{2}t + \sqrt{H+H_1}\right)^2$$

et $$V = \frac{S_{re}}{S}\left(-\frac{dh}{dt}\right) = -\frac{S_{re}}{S}\frac{dh}{dt} = -\frac{S_{re}}{S}\frac{d\Psi}{dt}.$$

$$V = \sqrt{2g\,\Psi(t)} = \sqrt{2g}\sqrt{\Psi(t)} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H+H_1} - \frac{K}{2}t\right)$$

$$\boxed{V(t) = \sqrt{2g(H+H_1)} - g\frac{S}{S_{re}}t.}$$

Descendre la turbine permet d'avoir 1 plus forte énergie cinétique disponible à l'entrée de la turbine pour le m̂ débit → plus de puissance hydraulique disponible (On évite d'augmenter la hauteur du barrage pour autant)

$\boxed{24}$ Vidange totale du barrage si $h(T_H) = 0$ ($H_1 = 0$ m désormais !)

$$\Rightarrow T_H = \frac{\sqrt{H}\,2}{S/S_{re}\sqrt{2g}} = \boxed{2\frac{S_{re}}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}}}$$

et pour 1 1/2 vidange :

$$h(T_{H/2}) = H/2 = \left(-\frac{S}{S_{re}}\sqrt{2g}\,T_{H/2} + \sqrt{H}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{2}} - \sqrt{H} = -\frac{S}{S_{re}}\sqrt{2g}\,T_{H/2} = -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{H}$$

$$\Rightarrow T_{H/2} = \underbrace{\frac{S_{re}}{S}\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{H}}_{T_H}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{T_H\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

donc : $\frac{T_{H/2}}{T_H} \simeq 0{,}3$ 30% du temps de vidange pour faire la 1/2 vidange

ordre de grandeur de T_H : $\frac{S_{re}}{S} = 10000$ et $\sqrt{\frac{100}{2\times10}} = \sqrt{5} \simeq 2{,}25$

$\Rightarrow T_H \simeq 2\times22500\,s \simeq 12h30$ environ.

$\boxed{25}$

$$P_{Hydro} = Q(t)\times\rho_{eau}\times g\,h(t) = S\,V(t)\times\rho_{eau}\times g\times h(t)$$

$$P_{Hydro}(t) = \rho_{eau}\,g\,S\left(\sqrt{2gH} - \frac{gS}{S_{re}}t\right)\left(\sqrt{H} - \frac{S}{S_{re}}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right)^2$$

$$P_{Hydro}(t) = \rho_{eau}\,g\,S\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S}{S_{re}}t\right)^3$$

A.N : $P_{Hydro}(0) = \rho_{eau}\,g\,S\sqrt{2g}\left(\sqrt{H}\right)^3$

$\# 1000\times10\times1\times\sqrt{20}\,(10)^3$

$\# 4{,}5\cdot10^7\,W \;\#\; \underline{45\,MW}$

$\boxed{26}$

$$E_{hydro}(T) = \rho_{eau}\,g\,S\sqrt{2g}\int_0^T \Big(\underbrace{\sqrt{H} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S}{S_{re}}t}_{u(t)}\Big)^3 dt \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S}{S_{re}}$$

$$E_{hydro}(T) = \frac{\rho_{eau}\,g\,S\sqrt{2g}}{-\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S}{S_{re}}}\left[\frac{u^4}{4}\right]_{u(0)}^{u(T)} \quad \Rightarrow dt = \frac{du}{-\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{S}{S_{re}}}.$$

et on peut remarquer que $u(t) = \sqrt{h(t)}$

$$E_{hydro}(T) = -\frac{2\rho_{eau}\,g\,S_{re}}{4}\left(h^2(T) - h^2(0)\right)$$

à $\underline{\underline{T_H}}$ $\rightarrow E_{hydro}(T_H) = +\frac{\rho_{eau}\,g\,S_{re}\,H^2}{2}$ $\Rightarrow E(T_{H/2}) = \frac{3}{4}E(T_H)$

à $T_{H/2}$ $\rightarrow E_{hydro}(T_{H/2}) = \frac{3}{4}\left(\frac{\rho_{eau}\,g\,S_{re}\,H^2}{2}\right)$

$\boxed{\text{75\% de l'énergie récupérée en 30\% du temps}}$

Partie C- Écoulement sanguin

C-I Écoulement dans un tuyau

1. On calcule la vitesse moyenne sur une section $\mathcal{S}$:

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{\mathcal{S}} \vec{v}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} B\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr d\theta$$

Soit :

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2} B 2\pi \frac{R^2}{4} = \frac{B}{2} \Rightarrow B = 2V_m$$

B représente la vitesse maximale du fluide atteinte en $r = 0$.

2. (a) Pour ce fluide newtonien en écoulement laminaire, on peut écrire en $r = R$:

$$F = \eta|\frac{\partial v}{\partial r}|2\pi RL = \eta B * 2\frac{R}{R^2}2\pi RL = \eta V_m 8\pi L$$

Le débit volumique vaut :

$$D_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}.\overrightarrow{dS} = \pi R^2 V_m \Rightarrow \pi V_m = \frac{D_v}{R^2}$$

Finalement :

$$F = \eta\frac{D_v}{R^2}8L$$

(b) Les veines rapides accélèrent les veines lentes : la force est sur $+\vec{u}_z$.

3. En faisant un bilan de quantité de mouvement par analogie avec la démonstration du premier principe industriel, on obtient, en régime stationnaire :

$$D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

Ici la section est constante et la vitesse est toujours portée par $\vec{u}_z$ donc le fluide dans le cylindre est soumis à des forces qui se compensent (la force subie par le fluide de la part de la paroi vaut alors : $-F\vec{u}_z$) :

$$P_e S\vec{u}_z - P_s S\vec{u}_z - F\vec{u}_z = 0$$

On a ainsi (comme $S = \pi R^2$) :

$$P_e - P_s = \frac{F}{\pi R^2}$$

4. On remplace F par son expression :

$$P_e - Ps = 8\eta\frac{L}{\pi R^4}D_v = R_h D_v \Rightarrow R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

C-II Perte de charge

1. (a) La charge s'exprime en Pascal (Pa) comme la pression.

(b) Pour un fluide parfait en écoulement permanent : $P + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2}$ est une constante le long d'une ligne de courant. Si l'écoulement est de plus irrotationnel $P + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2}$ est constante au sein du fluide.

2. (a) $\frac{L}{R}$ est sans dimension, ρv^2 a la dimension d'une pression d'après le théorème de Bernoulli, f est donc sans dimension.

(b) Une perte de charge régulière est liée au frottement avec la canalisation et à la viscosité du fluide, elle est proportionnelle à la longueur de la canalisation contrairement à une perte de charge singulière.

(c) Il y a des pertes de charges singulières lors d'un changement brusque du diamètre de la canalisation, ou lors d'un coude de celle-ci.

5. (a) On a :

$$R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{P_A - P_B}{D_{vA}}$$

On trouve $R_{hAB} = 8.10^7 \text{Pa.s.m}^{-3}$

(b) 4 capillaires associés donnent une résistance équivalente :

$$R_{eq1} = \frac{R_{hcap}}{2} + \frac{R_{hcap}}{2} = R_{hcap}$$

L'association de n groupes de 4 a une résistance équivalente :

$$R_n = \frac{R_{eq1}}{n} = R_{hAB}$$

On a alors :

$$N_1 = 4n = 4\frac{R_{hcap}}{R_{hAB}}$$

L'application numérique donne 6.10^{11}.

FIN