

DS5 :
Titrages d'espèces dissoutes
Statique et énergétique des fluides
Modèles de fluide parfait et de fluide Newtonien

Exercice 1 : Solubilité du diiodate de Baryum

Le diiodate de baryum $\text{Ba}(\text{IO}_3)_2(\text{s})$ que l'on nommera par la suite iodate de baryum est un sel peu soluble en solution aqueuse dont il est possible de vérifier expérimentalement la solubilité selon le protocole suivant : Une solution saturée en iodate de baryum est filtrée pour éliminer le précipité. Un dosage par conductimétrie des ions baryum restant dans un volume donné du filtrat est effectué en les faisant précipiter par des ions sulfates à l'aide d'une solution de sulfate de sodium ($2\text{Na}^+, \text{SO}_4^{2-}$). Parallèlement, il est possible de doser par oxydoréduction des ions iodate.

Q32. L'iode a pour numéro atomique $Z = 53$. Proposer une structure de Lewis et donner la géométrie de l'ion IO_3^- .

Q33. Ecrire l'équation de la réaction bilan de la dissolution du précipité d'iodate de baryum.

Q34. Exprimer le produit de solubilité K_s de l'iodate de baryum en fonction de la solubilité s .

1) Dosage conductimétrique.

On considère une solution saturée en iodate de baryum. On la filtre pour récupérer 100 mL de filtrat. Dans 50,0 mL du filtrat précédent, sont ajoutés environ 350 mL d'eau. La burette est remplie avec une solution de sulfate de sodium à $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le suivi du titrage par conductimétrie permet de tracer le graphe $G = f(V)$.

Q35. Ecrire l'équation de la réaction du titrage conductimétrique sachant que le sulfate de baryum est totalement insoluble en solution aqueuse.

Q36. Quel est le rôle des 350 mL d'eau ?

Q37. Tracer et expliquer l'allure de la courbe $G = f(V)$.

On donne (en $10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$) :

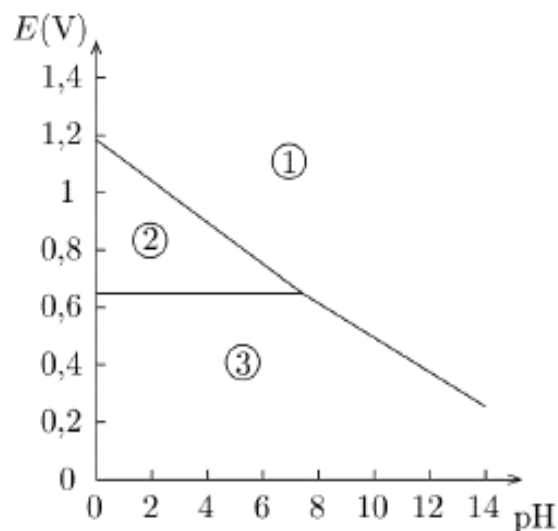
$\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) = 35$; $\lambda^\circ(\text{OH}^-) = 20$; $\lambda^\circ(\text{Na}^+) = 5$; $\lambda^\circ(\text{Ba}^{2+}) = 13$; $\lambda^\circ(\text{SO}_4^{2-}) = 16$; $\lambda^\circ(\text{IO}_3^-) = 7$

Q38. Calculer la concentration en baryum sachant que l'équivalence est atteinte pour un volume de 11,0 mL en sulfate de sodium.

2) Dosage des ions iodate :

Dans 20 mL du filtrat contenant les ions iodate, on ajoute 10 mL d'iodure de potassium (KI) molaire et quelques cm^3 d'acide chlorhydrique. La solution devient alors marron. On dose ensuite cette solution colorée par du thiosulfate de sodium ($2\text{Na}^+, \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) à $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q39. On donne ci-dessous le diagramme potentiel pH muet de l'élément iode. Indiquer le nombre d'oxydation de l'élément iode dans les trois espèces. On se limitera aux espèces I_2 , I^- et IO_3^- , la concentration de chacune des espèces étant de $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.



Q40. Reporter ce diagramme sur votre feuille et compléter le en indiquant la correspondance des espèces avec les numéros.

Q41. Etablir l'expression littérale du potentiel E_{23} sur la frontière séparant les domaines 2 et 3 en fonction des concentrations de chacune des espèces. Calculer la valeur de ce potentiel frontière.

Q42. Expliquez à l'aide d'une équation d'oxydo-réduction la formation de l'espèce marron. Exprimer la constante d'équilibre associée à cette réaction et conclure.

Q43. En déduire la relation entre la quantité de IO_3^- et la quantité de l'espèce marron, puis relier la quantité initiale d'ions iodate avec le volume équivalent de la réaction de titrage par le thiosulfate.

$$E^\circ(O_2/H_2O) = 1,26 \text{ V} ; E^\circ(H^+/H_2) = 0 \text{ V}$$

$$E^\circ(Cl_2/Cl^-) = 1,36 \text{ V} ; E^\circ(IO_3^-/I_2) = 1,20 \text{ V} ; E^\circ(I_2/I^-) = 0,62 \text{ V}$$

$$E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$$

Exercice 2 : Montgolfière

Les vecteurs sont notés en caractères gras, et leur norme en italique : Le vecteur $\mathbf{v}$ a pour norme v . Les valeurs des constantes physiques utiles dans les applications numériques sont données à la fin du texte.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g , est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz , et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical.

Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R . La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e , sa pression P , sa température T et sa masse volumique μ . On désigne par P_o, T_o et μ_o les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où $z = 0$).

La partie III est indépendante des deux premières.

I. — Atmosphère en équilibre

I.A. — Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme T_o . On prendra $T_o = 288$ K.

❑ 1 — Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P, R, T_o et M_e .

❑ 2 — Écrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_o , de la hauteur barométrique $H = RT_o / (M_e g)$ et de l'altitude z .

❑ 3 — En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en O_2 et de 80% en N_2 , calculer la valeur numérique de H . À quelle altitude $z_{50\%}^{\text{iso}}$ la pression est-elle égale à $P_o/2$?

I.B. — Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type $T = T_o (1 - \alpha z)$ où $\alpha = 1/z_o$ est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en z/z_o d'une expression plus précise. La valeur expérimentale $z_o \approx 33$ km justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

❑ 4 — Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_o (1 - \alpha z)^\beta$ et $\mu(z) = \mu_o (1 - \alpha z)^{\beta-1}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H et de z_o .

❑ 5 — À quelle altitude $z_{50\%}^{\text{pol}}$ la pression est-elle égale à $P_o/2$? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible ?

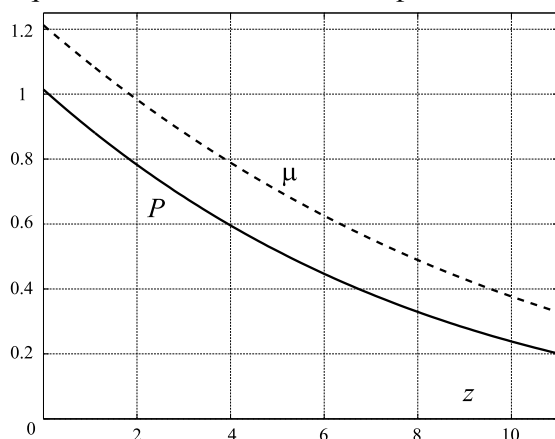


Figure 1

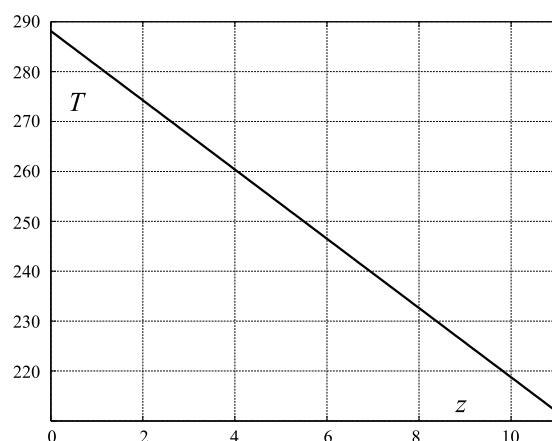


Figure 2

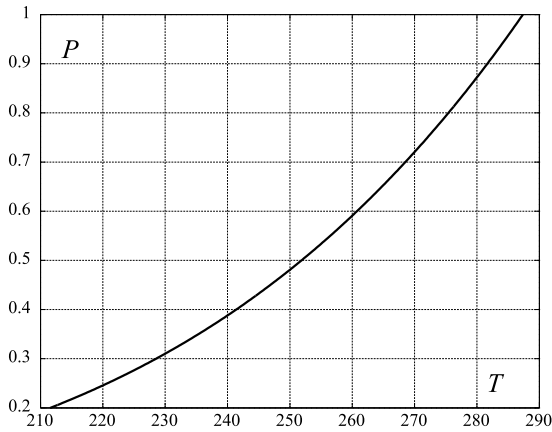


Figure 3

❑ 6 — Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les Figures 1,2 et 3. La pression est donnée en 10^5 Pa, la température en K, la densité en kg.m^{-3} et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations

$$\begin{aligned} T &= 288,14 - 6,94 z \\ P &= 1,01 (T/288,08)^{5,26} \end{aligned}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

Dans toute la suite du problème, on utilisera des valeurs numériques suivantes : $T_o = 288$ K, $P_o = 1013$ hPa, $\beta = 5$ et $z_o = 40$ km, soit $\alpha = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Ascension de la montgolfière

Une montgolfière standard reste à des altitudes raisonnables pour des questions évidentes de raréfaction en dioxygène. Le modèle polytropique des basses altitudes est donc bien adapté pour décrire son environnement atmosphérique, nous l'utiliserons désormais.

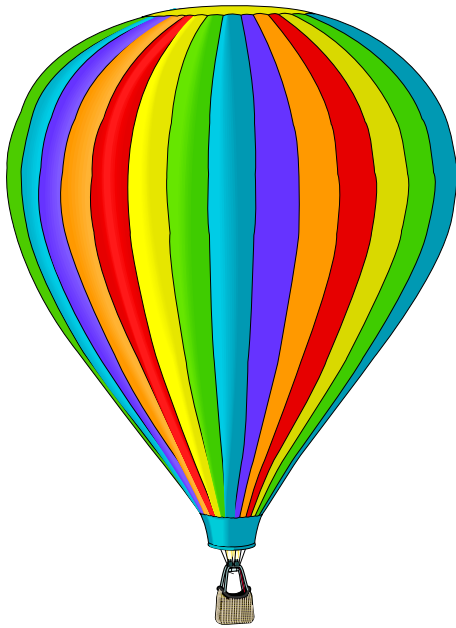


Figure 4 - La montgolfière

La pression, la masse volumique et la température de l'atmosphère à l'altitude z seront notées respectivement P_e , μ_e et T_e . La montgolfière est constituée d'une enveloppe ouverte de volume intérieur $V_o = 2000 \text{ m}^3$ et d'une nacelle (voir Fig. 4). La masse totale de l'enveloppe, de la nacelle et des passagers est notée m . On prendra $m = 500 \text{ kg}$; le volume propre de ces différents éléments est négligeable. Le volume intérieur à l'enveloppe est constant, mais la masse m_i de l'air chaud emprisonné à l'intérieur de cette enveloppe est variable. La masse de l'ensemble est donc $m + m_i$. On suppose qu'à l'intérieur de l'enveloppe, la température T_i et la pression P_i sont uniformes. L'ouverture inférieure de l'enveloppe permet de réaliser en permanence l'équilibre de pression entre l'air froid extérieur et l'air chaud intérieur. On suppose enfin que les gaz de combustion n'affectent pas la masse molaire M_e .

II.A. — Équilibre de la montgolfière

❑ 7 — Exprimer la masse m_i de l'air chaud dans l'enveloppe en fonction de P_e , V_o , M_e , et RT_i , puis en fonction de μ_e , V_o , T_e , et T_i .

❑ 8 — À l'équilibre mécanique, la poussée d'Archimède compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient. Trouver la relation qui permet alors d'exprimer m en fonction de m_i , T_e et T_i .

❑ 9 — On note z_m l'altitude où la poussée d'Archimède exercée par l'air compense le poids mg . Exprimer z_m en fonction de α , β , m , μ_o et V_o . Calculer la valeur numérique de z_m .

❑ 10 — On note T_d , la valeur minimale de la température T_i permettant le décollage de la montgolfière. Etablir la relation, très simple, liant $m/(\mu_o V_o)$ à $1 - T_o/T_d$. Calculer la valeur numérique de T_d .

□ 11 — Établir la condition d'équilibre de la montgolfière

$$P_e \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = \kappa_1 \left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_d} \right) \quad (1)$$

où κ_1 est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème. En déduire la relation, notée $[E_1]$, donnant à l'équilibre $\delta T_i/T_i$ en fonction de $\delta T_e/T_e$, $\delta P_e/P_e$ et de T_i/T_e .

□ 12 — En utilisant les grandeurs réduites $Z = \alpha z$, $Z_m = \alpha z_m$ et $\theta_i = T_i/T_o$, montrer que la condition d'équilibre de la question 8 s'écrit

$$(1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{\mu_o V_o} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i}$$

en utilisant à présent l'expression de z_m obtenue à la question 9, déduire l'expression de la fonction $Z \mapsto \theta_i(Z)$ en fonction des paramètres β et Z_m . On admet que le signe de $\theta'_i(0) = \left. \frac{d\theta_i}{dZ} \right|_{Z=0}$ est le même que celui de $\frac{\beta m}{\mu_o V_o} - 1$. Tracer rapidement l'allure de la courbe représentative de $\theta_i(Z)$ selon les valeurs de $\beta m / (\mu_o V_o)$. En considérant la phase de descente, expliquer pourquoi une montgolfière satisfaisant la condition $\beta m < \mu_o V_o$ fait courir le risque d'un écrasement au sol.

□ 13 — Calculer la valeur numérique $V_{\max}$ du volume de l'enveloppe permettant de satisfaire la condition $\theta'_i(0) > 0$. Pour une valeur $T_{\max} = 373$ K de la température maximale acceptable pour une montgolfière, calculer la valeur minimale $V_{\min}$ du volume de l'enveloppe qui permet le décollage. Calculer les valeurs de z_m associées à $V_{\min}$ et $V_{\max}$.

Exercice 3 : Energie hydroélectrique maximale récupérable.

L'hydroélectricité consiste à convertir l'énergie potentielle de pesanteur d'une masse d'eau, en énergie cinétique en la mettant en mouvement. Puis en faisant passer l'écoulement d'eau produit à travers une turbine couplée à un alternateur, l'énergie cinétique de l'écoulement est convertie en énergie électrique.

3.1 Potentiel hydroélectrique

16 Considérons un tel écoulement de débit volumique Q , provenant d'un réservoir situé à une hauteur H par rapport à la turbine. Exprimer la puissance P_{hydro} correspondant au débit d'énergie cinétique à travers la turbine, causé par la diminution d'énergie potentielle, en fonction de Q , H , de la masse volumique de l'eau ρ_{eau} et de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre g . Que représente cette puissance dans le contexte de la production d'électricité et quels sont les paramètres à optimiser ?

3.2 Équilibre hydrostatique d'un barrage dit « poids »

Pour réguler, contrôler l'écoulement, puis le canaliser vers la turbine, il est en général nécessaire d'utiliser une retenue d'eau, en construisant un barrage.

On modélise un barrage dit « poids » comme un prisme de longueur L et de section triangulaire rectangle isocèle de côté H (voir Fig. 3). Les dimensions H et L sont de l'ordre de 100 m. Le barrage est constitué d'un mélange béton-granulats de masse volumique homogène ρ_m . On suppose que la retenue d'eau ainsi créée est complètement remplie. On note P_0 la pression atmosphérique, dont on néglige la variation avec l'altitude z . La référence $z = 0$ correspond au fond horizontal de la retenue d'eau. La hauteur d'eau dans le barrage est notée h et est égale à H dans cette partie.

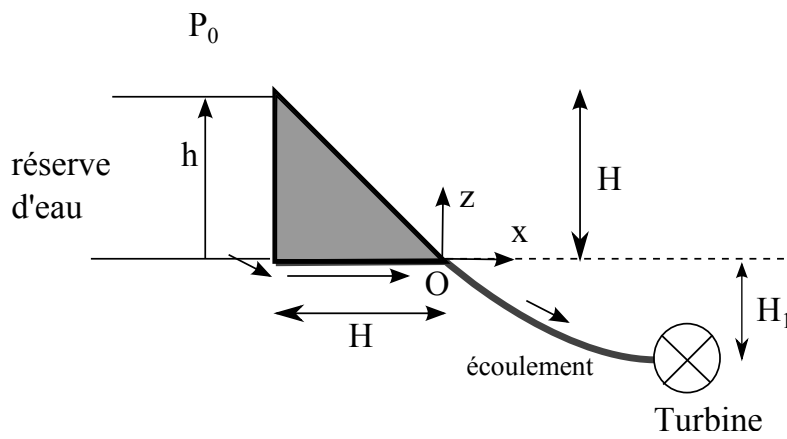


FIGURE 3 – Schéma de principe du barrage.

17 Donner l'expression de la pression hydrostatique dans l'eau en fonction de l'altitude z , de la masse volumique de l'eau ρ_{eau} (considérée constante) et de l'accélération de la pesanteur g . Pourquoi les variations de pression hydrostatique sont-elles négligées dans l'atmosphère mais pas dans l'eau ?

18 Exprimer la résultante des forces de pression hydrostatique s'exerçant sur le barrage due à l'eau sur la face amont $\vec{F}_{eau}$, puis celle des forces de pression due à l'air sur la face aval $\vec{F}_{air}$. En déduire l'expression de la force horizontale qui tend à faire céder le barrage.

19 Dans un barrage « poids », la force horizontale est compensée par une force de frottement solide entre le barrage et le sol. Cette force est dirigée selon $\vec{e}_x$ et sa norme est modélisée simplement par $\|\vec{F}_{frottement}\| \leq \mu \|\vec{R}\|$, avec μ un coefficient de frottement et $\vec{R}$, la force de réaction normale du sol sur le barrage. Écrire l'équilibre des forces s'exerçant sur le barrage verticalement et horizontalement. En utilisant $\|\vec{F}_{frottement}\| \leq \mu \|\vec{R}\|$, en déduire la condition de stabilité du barrage sous forme d'une inégalité. Sachant que μ est de l'ordre de $1/2$, la situation paraît-elle réaliste ?

20 Les barrages dits « poids » sont un type de barrage de conception particulièrement simple. Les barrages « voûtes » constituent un autre type, où la vallée contenant la rivière est barrée par un mur de béton courbé. Sans faire de calculs, proposer des arguments expliquant leur intérêt par rapport aux barrages « poids ».

3.3 Écoulement à la sortie du barrage

On cherche à déterminer la vitesse V de l'eau entrant dans la turbine. La retenue du barrage est remplie avec une hauteur d'eau $h(t)$ variant au cours du temps t , dont la valeur initiale à $t = 0$ vaut H . La turbine est reliée par une canalisation au fond du barrage et se trouve plus bas à une altitude $z = -H_1$ (voir Fig. 3). La turbine est à l'air libre et la pression au niveau de la turbine est égale à la pression atmosphérique P_0 . La section de la turbine S vaut 1 m^2 , la surface de la retenue d'eau $S_{re} = 10000 \text{ m}^2$. On suppose que le débit volumique d'eau Q_e entrant dans la retenue d'eau est négligeable devant le débit de vidange du barrage. De plus quel que soit la valeur de la hauteur d'eau $h(t)$, l'aire de la surface libre de l'eau contenue dans la retenue, reste constante et égale à S_{re} . La masse volumique de l'eau ρ_{eau} est considérée constante.

21 En tenant compte de cette dernière hypothèse, exprimer en utilisant la conservation du débit volumique, la variation de la hauteur d'eau dans le barrage $\frac{dh}{dt}$ en fonction de V , S_{re} et S . Comment se comparent $\frac{dh}{dt}$ et V ?

22 Donner la relation de Bernoulli. Quelles sont les hypothèses de validité ? Appliquer cette relation au cas du barrage en considérant un point A à la surface de l'eau dans la retenue puis un point B au niveau de la turbine. On justifiera au passage, sans faire de calcul, que les hypothèses de validité sont vérifiées. Évaluer la vitesse de l'eau au point A en utilisant la question **21**. Simplifier alors l'égalité obtenue précédemment. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2g(h + H_1)} \quad (5)$$

23 On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation différentielle obtenue. On introduit la nouvelle variable $\psi(t) = h(t) + H_1$. Réécrire l'équation (5) en fonction de ψ en introduisant la constante $K = \frac{S\sqrt{2g}}{S_{re}}$. Montrer que l'équation obtenue est équivalente à :

$$\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} = -K dt \quad (6)$$

Intégrer les deux membres de l'égalité entre l'instant initial ($t = 0$ et $\psi = H + H_1$) et un instant quelconque ($t = t^*$ et $\psi = \psi^*$). En déduire l'expression de h en fonction de t , puis celle de V en fonction de t . Quel peut être l'intérêt de placer la turbine à un niveau plus bas que le barrage ? Par la suite, on adoptera les valeurs numériques suivantes pour simplifier les calculs, $H = 100$ m et $H_1 = 0$ m.

24 Exprimer le temps T_H nécessaire pour vider complètement le barrage, puis faire de même pour le temps $T_{H/2}$ correspondant à une diminution de la hauteur initiale de moitié. Donner l'ordre de grandeur numérique de T_H et sachant que $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,3$, évaluer le rapport $\frac{T_{H/2}}{T_H}$.

25 En utilisant l'expression de P_{hydro} établie dans la partie 3.1, exprimer la puissance disponible pour la turbine en fonction du temps t .

Application numérique : Quel est l'ordre de grandeur numérique de la puissance disponible au début de la vidange ?

26 En déduire l'énergie hydrodynamique $E_{hydro}(T)$ récupérable par la turbine correspondant à une vidange entre $t = 0$ et $t = T$. Ensuite exprimer E_{hydro} pour $T = T_H$ et pour $T_{H/2}$. Évaluer le rapport $\frac{E_{hydro}(T_{H/2})}{E_{hydro}(T_H)}$ et commenter par rapport à la valeur du rapport $\frac{T_{H/2}}{T_H}$. Pourquoi, lors d'une exploitation commerciale du barrage, est-il intéressant de ne vider la retenue que de la moitié de la hauteur maximale ?

Exercice 4 : Ecoulement sanguin (Poiseuille)



Fig 12

C-I) Ecoulement dans un tuyau (fig13).

- Un liquide visqueux newtonien incompressible (masse volumique ρ , viscosité dynamique η) s'écoule dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L .
- Le régime d'écoulement est laminaire et stationnaire avec un débit volumique D_v .
- La vitesse en un point situé à la distance r de l'axe du tuyau, de symétrie axiale, obéit à la loi : $\vec{V}(r) = B \left[1 - \left\{ \frac{r}{R} \right\}^2 \right] \cdot \vec{u}_z$
- Le nombre de Reynolds s'écrit $Re = \frac{2V_m \rho R}{\eta}$, V_m étant la vitesse moyenne du fluide dans une section droite du tuyau.

Fig 13

Les données sont : ρ , η , R , L et le débit volumique (ou débit en volume) D_v .

C-I-1) Expliciter le coefficient B en fonction des données.

C-I-2) Le module de la force F tangentielle exercée par le fluide, à cause de sa viscosité, sur la paroi interne du tuyau, est : $F = 8\eta \frac{L}{R^2} D_v$.

- Démontrer cette relation en précisant clairement le raisonnement.
- Préciser sur un schéma le sens de cette force.

C-I-3) Le maintien du mouvement stationnaire du fluide nécessite une différence entre la pression à l'entrée de tuyau (P_e) et la sortie (P_s) : $P_e - P_s = F / \pi R^2$. Justifier *qualitativement* cette relation.

C-I-4) En déduire l'expression $P_e - P_s = R_h \cdot D_v$ et expliciter la résistance à l'écoulement R_h en fonction des données.

C-II) Perte de charge.

C-II-1) En dynamique des fluides, on appelle charge la quantité $\mathcal{E} = P + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2}$.

- Quelle est l'unité de $\mathcal{E}$ dans le système international ?
- Rappeler l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait.

C-II-2) Pour tenir compte de la dissipation d'énergie, on modifie la relation de Bernoulli en introduisant un terme de perte de charge.

La formule de Darcy donne la forme des pertes de charges régulières :

$$P_e = f \cdot \frac{L}{2R} \cdot \frac{\rho V_m^2}{2}, \quad P_e \text{ ayant la même unité que } \mathcal{E}.$$

- Faire une analyse dimensionnelle de coefficient f .
- A quoi correspondent les pertes de charges régulières ?
- Donner 2 exemples d'autres types de pertes de charges.

C-II-5) Application à la circulation sanguine.

Le sang est un liquide incompressible visqueux circulant dans le corps à travers un réseau d'artères, artérioles, capillaires, veinules, veines (figure 15).

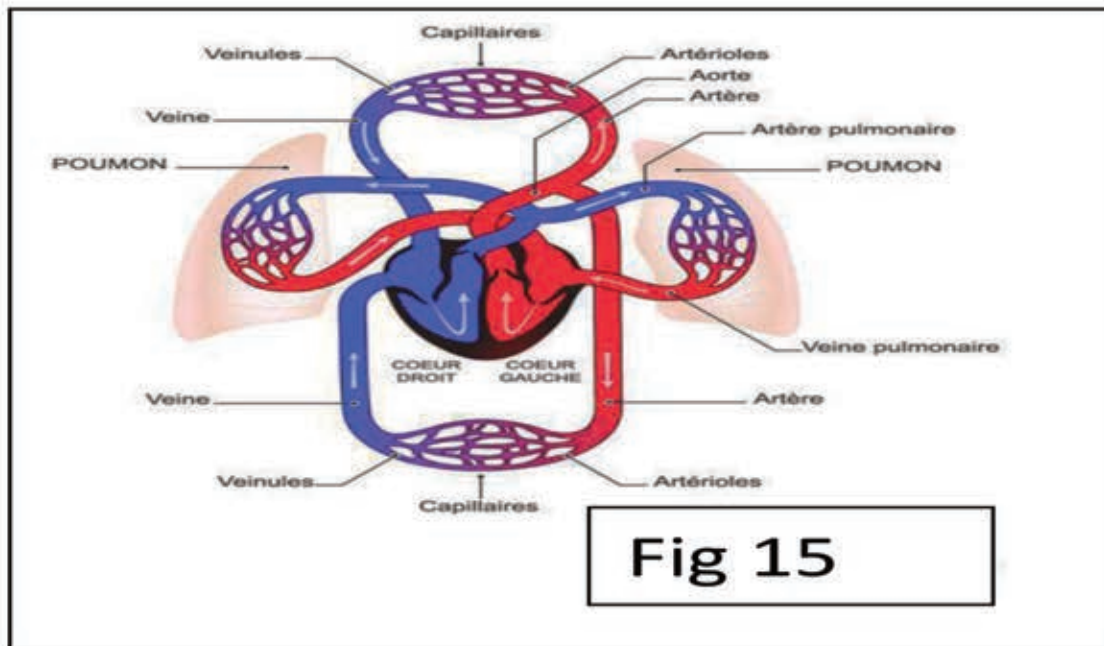


Fig 15

Les échanges biochimiques se font à travers le réseau capillaire d'un organe pour lequel on mesure (figure 16) :

En A : pression moyenne $P_A = 4,0 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ pour un débit volumique $D_{VA} = 1,8 \text{ L/min}$;

En B : $P_B = 1,6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

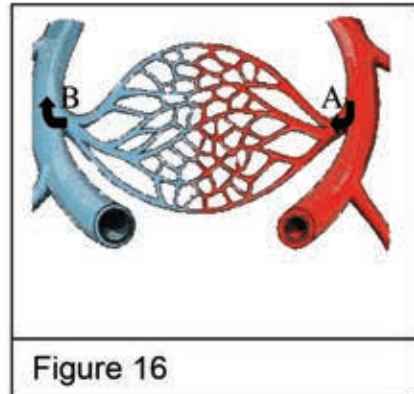


Figure 16

a- Déterminer, à partir de la relation C-I-4, la résistance totale R_{hAB} à l'écoulement entre A et B, en utilisant les unités (à préciser) du système international.

b- La figure 17 représente un modèle ramifié du réseau capillaire.

En moyenne, chaque vaisseau capillaire possède une longueur $L = 1 \text{ mm}$, un rayon $r = 3 \mu\text{m}$, une résistance à l'écoulement $R_{hcap} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ SI}$.

Evaluer littéralement le nombre N_1 de capillaires de ce modèle ramifié (sur la figure 17, chaque trait épais représente 1 capillaire) en fonction de R_{hAB} et R_{hcap} .

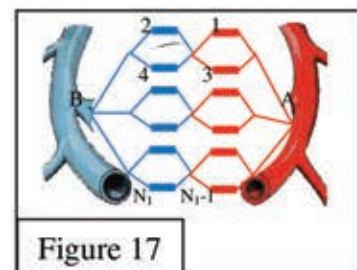


Figure 17

FIN DE L'ÉPREUVE