

## DS 8 : Electromagnétisme

(Calculatrices INTERDITES)

### PROBLÈME 1

#### Transmission d'énergie électrique sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XX<sup>e</sup> siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines (voir figure 1) : de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes).



FIGURE 1 – Quelques applications de la transmission d'énergie sans fil, de gauche à droite : recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf<sup>®</sup>, pacemaker.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche (voir figure 2) et le rayonnement en champ lointain (voir figure 3). Les caractéristiques, avantages et inconvénients de ces techniques sont donnés dans le tableau ci-après. Nous développerons dans cette partie certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



FIGURE 2 – À gauche : couplage inductif non résonant en champ proche ; à droite : couplage inductif résonant en champ proche.

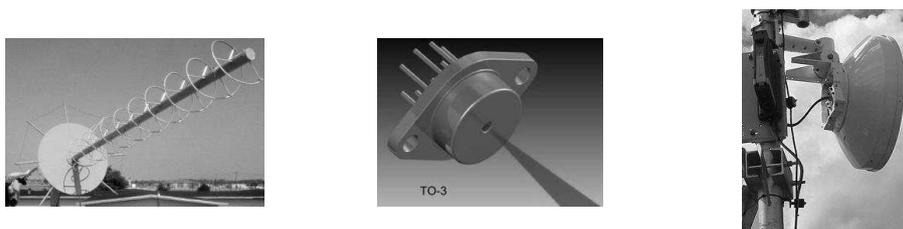


FIGURE 3 – Quelques dispositifs de rayonnement en champ lointain, de gauche à droite : antenne à forte directivité, diode laser, antenne micro-onde.

Mentionnons que le transfert de puissance sans fil par couplage résonant a été récemment mis en évidence par l'équipe de recherche dirigée par Marin Soljačić, au *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), en réalisant une transmission de puissance de 60 W avec une distance de 2 m séparant les deux bobinages, permettant d'allumer une ampoule (voir figure 2). Ces travaux performants ont donné lieu à une publication dans la revue *Science* en 2007. C'est à cette occasion que le terme « witrlicity », contraction de *Wireless Electricity*, est apparu.

	Couplage non résonant	Couplage résonant	Rayonnement
Matériel nécessaire	bobines	bobines	antenne à grande directivité
Type de champ	magnétique	magnétique	électrique
Distance de transmission	faible	faible/moyenne	moyenne/grande
Puissance transmissible	faible	moyenne	moyenne/grande
Interactions avec le milieu	faible	faible	forte
Sécurité	élevée	élevée	potentiellement dangereux

TABLE 1 – Comparaison des différentes techniques.

## COUPLAGE INDUCTIF NON RÉSONANT

### A / Étude des bobines utilisées

Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur  $\ell$  et d'axe de révolution  $Oz$ , comportant  $N$  spires circulaires jointives de rayon  $a$ , et parcourues par un courant d'intensité variable  $i(t)$ . On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables  $i(t)$ , comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

**A1.** Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique  $\vec{B}$ . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

**A2.** Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

**A3.** Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

**A4.** En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ  $\vec{B}(M)$ , ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

**A5.** En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de  $\ell$ ,  $N$  et  $i(t)$ .

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de  $N$  spires circulaires identiques, d'axe de révolution  $Oz$  et de rayon  $a$ , placées dans le plan  $z = 0$  et parcourues par un courant d'intensité  $i(t)$ . On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point  $M$  de l'axe  $Oz$ , de cote  $z > 0$ .

**A6.** Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  au point  $M$ .

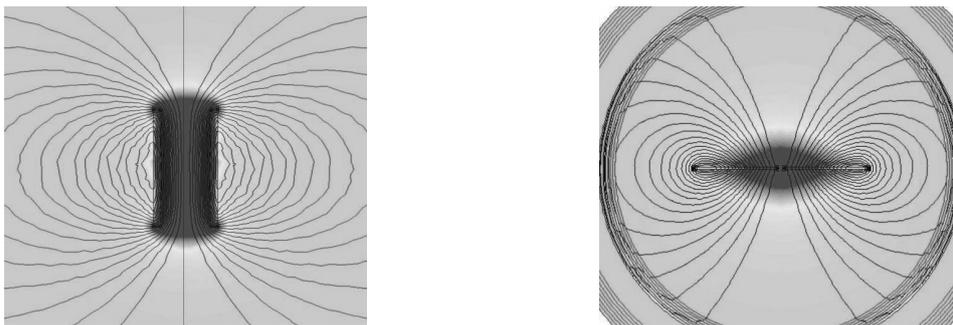
**A7.** Que dire du plan d'équation  $z = 0$  d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre  $B_z(-z)$  et  $B_z(z)$ .

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point  $M$  :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

**A8.** Représenter l'allure de la fonction  $B_z(z)$ . Exprimer le champ magnétique maximal  $B_{z,\max}$ , et déterminer à quelle distance  $z_{1/2}$  de la spire le champ magnétique vaut  $B_{z,\max}/2$ , en fonction de  $a$ .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).



**FIGURE 5** – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

**A9.** Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

**A10.** Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ  $\vec{B}$ , permet de le confirmer ?

## B / Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 6.



**FIGURE 6** – À gauche : système de transmission classique (émetteur et récepteur) utilisé dans les chargeurs sans fil actuels. À droite : schéma et notations utilisées.

Une bobine émettrice « plate », de résistance électrique  $R_1$  et d'inductance propre  $L_1$ , comportant  $N_1$  spires circulaires de rayon  $a$ , est parcourue par un courant d'intensité :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

imposé par un générateur (non représenté sur la figure 6).

**B1.** Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée  $P_{\text{reçue}}$ , en fonction de  $L_1$ ,  $R_1$ , de l'intensité  $i(t)$  et de sa dérivée  $di/dt$ . En déduire la moyenne temporelle de cette puissance  $\langle P_{\text{reçue}} \rangle$  en fonction de  $R_1$  et  $I_0$ .

Considérons également une bobine réceptrice « plate », de résistance électrique  $R_2$ , d'inductance propre  $L_2$  et comportant  $N_2$  spires circulaires de rayon  $b$ , située à une distance  $d$  de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point  $M(z)$  de l'axe  $Oz$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z.$$

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

**B2.** Exprimer le flux  $\Phi$  du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de  $i(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$  et  $N_2$ .

**B3.** Le courant  $i(t)$  étant variable, il apparaît une force électromotrice (fem)  $e(t)$  aux bornes de la bobine réceptrice. Quel phénomène est ainsi mis en évidence ? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci.

**B4.** Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem  $e(t)$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$  et  $N_2$ . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

**B5.** En négligeant l'inductance propre  $L_2$  de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée  $P_{\text{généré}}$ , puis sa moyenne temporelle  $\langle P_{\text{généré}} \rangle$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  et  $R_2$ .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient :

$$\eta = \frac{\langle P_{\text{généré}} \rangle}{\langle P_{\text{reçue}} \rangle}.$$

**B6.** Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme :

$$\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$$

avec  $k$  un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de Yates.

## Problème 2 : Procédé photographique LIPPMANN

### I.A - Ondes électromagnétiques stationnaires

Le demi-espace  $x > 0$  est occupé par un métal non magnétique et parfaitement conducteur, c'est à dire de conductivité infinie. Une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement, se propage dans le vide ( $x < 0$ ) dans le sens des  $x$  croissants et arrive sous incidence normale à la surface du métal. On note  $\vec{E}_i$  le champ électrique associé à cette onde et on pose :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y.$$

I.A.1) En utilisant la relation de structure de l'onde plane progressive monochromatique dans le vide, donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_i(x, t)$  de l'onde incidente.

I.A.2) Donner, sans démonstration, les valeurs des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'intérieur du métal parfait. En utilisant la relation de passage du champ électrique  $\vec{E}$  à l'interface entre le vide et le métal, montrer l'existence d'une onde réfléchie dont on donnera les champs électrique  $\vec{E}_r(x, t)$  et magnétique  $\vec{B}_r(x, t)$ .

I.A.3) Quelle est l'expression du champ électrique total  $\vec{E}_t(x, t)$  dans le demi-espace  $x < 0$  ? Même question pour le champ magnétique  $\vec{B}_t(x, t)$ .

Interpréter physiquement cette solution : on pourra faire des tracés de l'amplitude des champs électrique et magnétique, indiquer et nommer les points caractéristiques ainsi que les distances qui les séparent.

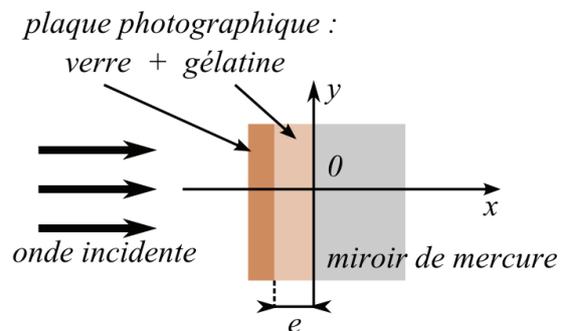
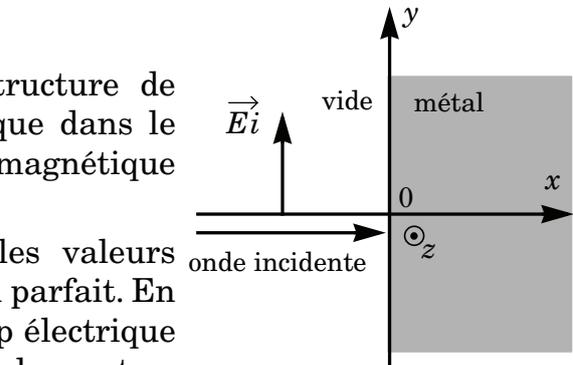
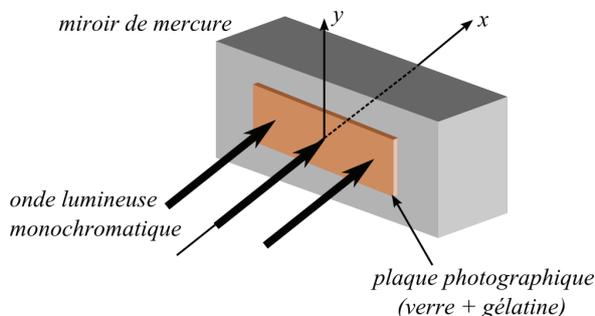
I.A.4) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting associé à cette onde. Quelle est sa valeur moyenne temporelle ? Interpréter physiquement.

I.A.5) On se place entre deux plans nodaux successifs pour le champ électrique ( $\vec{E}$  est nul en tout point de ces plans). Que peut-on dire du vecteur de Poynting dans ces plans ? Calculer l'énergie électrique  $U_{em,E}$  et l'énergie magnétique  $U_{em,B}$  emmagasinées dans un volume situé entre ces deux plans et de section  $S$  rectangulaire ( $l_y, l_z$ ). Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

*Les résultats de la question I.A.3 sont à la base de la photographie Lippmann.*

### I.B - Enregistrement et développement d'une photographie Lippmann monochromatique (1891)

*Principe de la photographie Lippmann monochromatique : on envoie une onde lumineuse monochromatique (longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide) sous incidence normale, sur une plaque photosensible. Cette plaque est constituée d'une émulsion de gélatine épaisse (épaisseur  $e$  égale à une cinquantaine de  $\mu\text{m}$ ), à grains fins d'halogénure d'argent et transparente. Le dos de l'émulsion est mis en contact avec un miroir de mercure.*



Le principe des émulsions photographiques d'halogénures est la réactivité des halogénures d'argent lors d'une insolation puis la mise en œuvre d'un traitement chimique. Les zones non insolées sont, elles, insensibles à ce traitement. Les variations d'indice obtenues sont toujours très faibles. On notera  $n_0$  l'indice optique moyen de la plaque photosensible après traitement et on prendra  $n_{air} = 1$  pour l'indice optique de l'air.

**Dans tout le problème**, bien que la lame de verre soit représentée sur les schémas, on supposera qu'elle n'est pas présente et on note  $e$  l'épaisseur de la gélatine.

### I.B.1) Premier modèle

On admet que le champ électrique au sein de la plaque photosensible est donné par :

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx) \vec{e}_y \quad \text{avec } E_0 \text{ réel et } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

- Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $\lambda_0$  et  $n_0$ . L'émulsion est supposée « épaisse » par rapport à quelle autre grandeur ? Quelle en est la conséquence ?
- Soit  $n(x)$  l'indice de la couche photosensible après développement. On suppose qu'après un traitement chimique adapté, on obtient dans le milieu une variation de l'indice proportionnelle à l'éclairement. On écrit donc  $n(x) = n_0 + \delta n(x)$  avec  $\delta n(x) = \alpha \cdot \langle E^2(x, t) \rangle$ . Quelle est la dimension de  $\alpha$  ? Démontrer que l'on a  $\delta n(x) = \beta \sin^2(kx)$ . Exprimer  $\beta$  en fonction des données.
- Tracer l'indice  $n(x)$  dans l'émulsion en fonction de  $x$ . Définir et déterminer le pas  $\Lambda$  d'un tel enregistrement que l'on appelle aujourd'hui « miroir de Bragg ».

## Problème 3 : Microphone électrostatique

### Première partie : Etude d'un condensateur

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique  $\sigma$ . Ce plan correspond au plan (Oxy) d'un système de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz) classique muni d'une base orthonormée ( $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ). La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On se place tout d'abord dans le cas de l'électrostatique ( $\sigma = \text{constante}$ ).

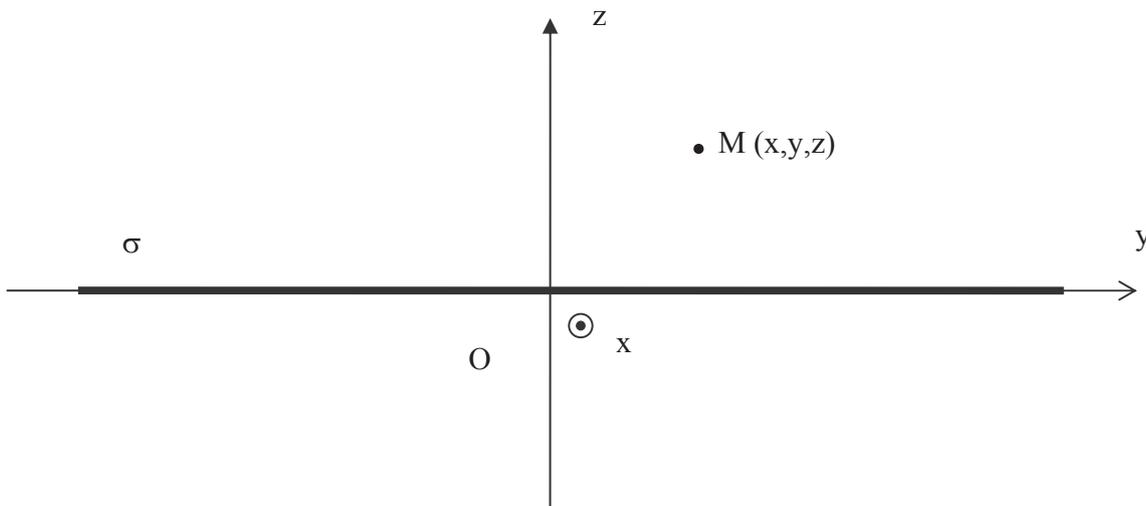


Figure 1 : Plan infini uniformément chargé.

- I.1. Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé en M par le plan uniformément chargé est perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. On écrira donc  $\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_z$ . Justifier le fait que le champ électrique  $\vec{E}(M)$  ne peut pas dépendre des coordonnées x et y du point M, soit  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ . Montrer par des considérations de symétrie que la fonction E(z) est impaire.
- I.2. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ est uniforme au dessus et en dessous du plan. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, déterminer la valeur du champ électrique en fonction de  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$  (constante diélectrique du vide) et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi qu'on précisera (on distinguera les deux cas :  $z > 0$  et  $z < 0$ ). Une démonstration très précise est attendue.
- I.3. Toujours par des considérations de symétrie, déterminer la valeur E(0) du champ électrique dans le plan uniformément chargé.
- I.4. Déterminer le potentiel électrique V(z) en tout point de l'espace en fonction de  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$  et z (on prendra le potentiel nul en  $z = 0$ ). On distinguera toujours les deux cas :  $z > 0$  et  $z < 0$ . On supposera la continuité du potentiel en  $z = 0$ .
- I.5. Tracer l'allure des courbes E(z) et V(z) en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e. Le plan supérieur est situé dans le plan  $z = +\frac{e}{2}$  et le plan inférieur dans le plan  $z = -\frac{e}{2}$ . Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée (donc négative) -  $\sigma$ .

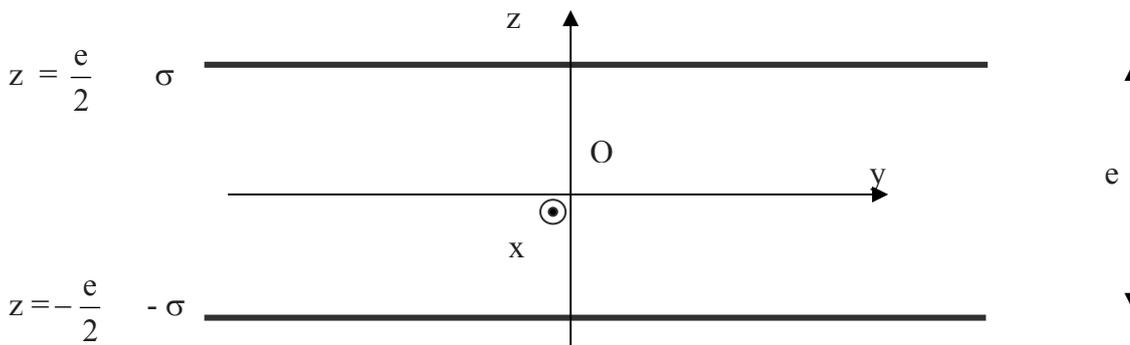


Figure 2 : Condensateur plan infini.

- I.6. Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de  $\sigma$ ,  $\epsilon_0$  et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.
- I.7. Calculer l'expression du potentiel électrostatique V(z) pour  $z \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$  en fonction de  $\sigma$ , z et  $\epsilon_0$ . On prendra toujours le potentiel nul en  $z = 0$ . Calculer la différence de potentiel U entre les deux plans infinis en fonction de  $\sigma$ , e et  $\epsilon_0$ . Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e.
- I.8. Application numérique : les condensateurs des microphones électrostatiques pour la prise de son, sont soumis à des tensions de l'ordre de quelques dizaines de volts et les armatures sont séparées de quelques dizaines de micromètres. Donner l'ordre de grandeur du champ électrique régnant dans ces condensateurs. Quel problème pratique pose un champ électrique trop grand ?

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques  $S$ . On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale  $+Q$  et l'armature inférieure la charge totale  $-Q$ .

- I.9. Après avoir exprimé  $\sigma$  en fonction de  $Q$  et  $S$ , en déduire la différence de potentiel  $U$  entre les deux armatures en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $e$  et  $S$ . Définir et exprimer la capacité  $C$  du condensateur formé en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $e$  et  $S$ . Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique pour lequel on prendra :  $S \approx 1 \text{ cm}^2$ ,  $e \approx 10^{-5} \text{ m}$  et  $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ SI}$ .
- I.10. Déterminer la densité volumique  $w_e$  d'énergie électrique dans le condensateur en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $Q$  et  $S$ .

On suppose maintenant que  $\sigma$  et  $Q$  dépendent du temps. On admet que cette dépendance est suffisamment lente pour que l'expression du champ électrique déterminée précédemment reste valable.

- I.11. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, qu'il doit nécessairement y avoir un champ magnétique entre les plaques du condensateur.
- I.12. En supposant que les armatures sont des disques, on peut montrer que le champ magnétique est nul au centre  $O$  du condensateur et orthoradial ailleurs. On rappelle qu'orthoradial signifie dirigé suivant le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  des coordonnées cylindriques de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ . On écrit donc (en coordonnées polaires)  $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$ . Intégrer l'équation de Maxwell-Ampère sur un disque de rayon  $r$  perpendiculaire à l'axe  $Oz$  et montrer que  $B(r, z) = -\frac{\mu_0 r}{2S} \frac{dQ}{dt}$  où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. On rappelle que  $\iint_{(S)} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$  où  $(S)$  représente une surface de contour  $(C)$ .
- I.13. En déduire la densité volumique  $w_m$  d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de  $\mu_0$ ,  $Q$ ,  $r$  et  $S$ .
- I.14. On suppose que la charge  $Q$  varie de façon sinusoïdale avec une pulsation  $\omega$ . A quelle condition reliant  $\omega$ ,  $c$  (célérité de la lumière) et  $S$ , les effets magnétiques sont-ils négligeables devant les effets électriques dans le condensateur ( $w_m \ll w_e$ ) ?
- I.15. Application numérique : donner l'ordre de grandeur de la plage de fréquence pour laquelle on peut négliger les effets magnétiques devant les effets électriques pour la valeur de  $S$  donnée précédemment. Dans les microphones électrostatiques ( $S \approx 1 \text{ cm}^2$ ), les fréquences maximales sont de quelques dizaines de milliers de Hertz. Pourquoi ? Les effets magnétiques sont-ils alors négligeables ?
- I.16. Donner la relation liant la capacité  $C$  d'un condensateur avec le courant  $i$  qui le traverse et la tension  $u$  à ses bornes. On se placera dans la convention récepteur que l'on définira par un schéma. Montrer que la puissance électrique mise en jeu dans un condensateur peut alors se mettre sous la forme :

$$P = \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)}{dt}.$$

- I.17. En déduire l'énergie électrique totale emmagasinée dans un condensateur en fonction de  $C$  et  $u$ . Exprimer alors cette énergie en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $e$  et  $S$ . Retrouver alors le résultat de la question I.10.
- I.18. On suppose maintenant qu'un opérateur extérieur exerce perpendiculairement à l'armature supérieure une force  $F$ , permettant de faire passer l'épaisseur de  $e$  à  $(e + de)$  à charge constante et sans communiquer d'énergie cinétique. Déterminer la variation d'énergie électrostatique contenue dans le condensateur. On donnera le résultat en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $S$  et  $de$ . En admettant que cette variation d'énergie est égale au travail fourni par l'opérateur extérieur pour faire passer l'épaisseur de  $e$  à  $(e + de)$ , en déduire la norme  $F$  de la force exercée par l'opérateur en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$  et  $S$ . En déduire la norme  $F_a$  de la force exercée par une armature sur l'autre en fonction des mêmes paramètres. On placera clairement cette force sur un dessin.
- I.19. On se propose de retrouver ce dernier résultat par un calcul à partir du champ électrique. Quel est le champ électrique  $\vec{E}_i$  créé par l'armature inférieure sur l'armature supérieure ? On exprimera le résultat en fonction de  $Q$ ,  $S$  et  $\epsilon_0$  et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. En déduire la force  $\vec{F}_a$  exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure en fonction des mêmes paramètres. Comparer avec le résultat obtenu dans la question précédente.

### Deuxième partie : Microphone électrostatique

Cette partie peut être traitée indépendamment de la première si on admet que la capacité d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface  $S$  et sont séparées par une distance  $e$ , est donnée par la formule  $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$  et que la force exercée par une armature sur l'autre est une force attractive qui vaut en norme  $F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$ .

On peut utiliser un condensateur plan comme microphone (voir figure 3 ci-après). En effet, un son étant une onde de pression, supposons que cette onde de pression arrive sur l'armature gauche du condensateur et provoque un déplacement  $y$  de cette armature par rapport à la position dite au repos du condensateur. La distance entre les deux armatures se trouvera modifiée et par voie de conséquence sa capacité. On pourra donc transformer un signal acoustique en un signal électrique en utilisant la variation de la capacité. On supposera que la face gauche de l'armature gauche est soumise à une pression totale  $P_T = P_a + p(t)$ ,  $P_a$  représentant la pression atmosphérique et  $p(t)$  la surpression acoustique due au son ( $p(t)$  positif ou négatif). La face droite de l'armature gauche est soumise à la pression atmosphérique  $P_a$ . Sous l'effet de la surpression  $p(t)$ , l'armature se déplace de  $y(t)$  ( $y$  positif vers la droite et négatif vers la gauche). En l'absence de surpression acoustique, les deux armatures sont séparées de  $e$  (comme dans la première partie), l'armature gauche étant dans un plan vertical passant par l'origine  $O$  de l'axe  $Oy$ .

Chacune des armatures a une surface  $S$  comme dans la première partie. L'armature gauche porte une charge  $+Q(t)$  et l'armature droite  $-Q(t)$ .

L'armature gauche est rappelée vers sa position d'équilibre  $y = 0$  par une force élastique de rappel de type ressort, proportionnelle à l'écart  $y$  avec une constante de raideur  $k$ , soit en projection sur l'axe  $Oy$  :  $F_r = -k y$ . Le dispositif exerçant cette force n'est pas représenté sur la figure.

Les divers frottements dans l'air introduisent une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse  $\frac{dy}{dt}$  de la forme (toujours en projection sur l'axe Oy) :  $F_f = -a \frac{dy}{dt}$  (a constante positive).

Si le condensateur est polarisé par une tension  $V_0$ , toute variation de la capacité entraînera l'apparition d'un courant électrique, ce qui modifiera la charge Q de l'armature.

On suppose que lorsque les armatures sont au repos ( $y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ ),  $Q = Q_0, i = 0$ , la force exercée par l'armature droite sur l'armature gauche est compensée par un dispositif non représenté. On posera donc lorsque les armatures bougent :  $Q(t) = Q_0 + q(t)$  où  $Q_0$  est la charge statique et  $q(t)$  la charge induite par le déplacement y de l'armature. On supposera, pour les calculs, que les grandeurs  $\frac{q(t)}{Q_0}$  et  $\frac{y(t)}{e}$  sont des infiniment petits donc très inférieures à 1.

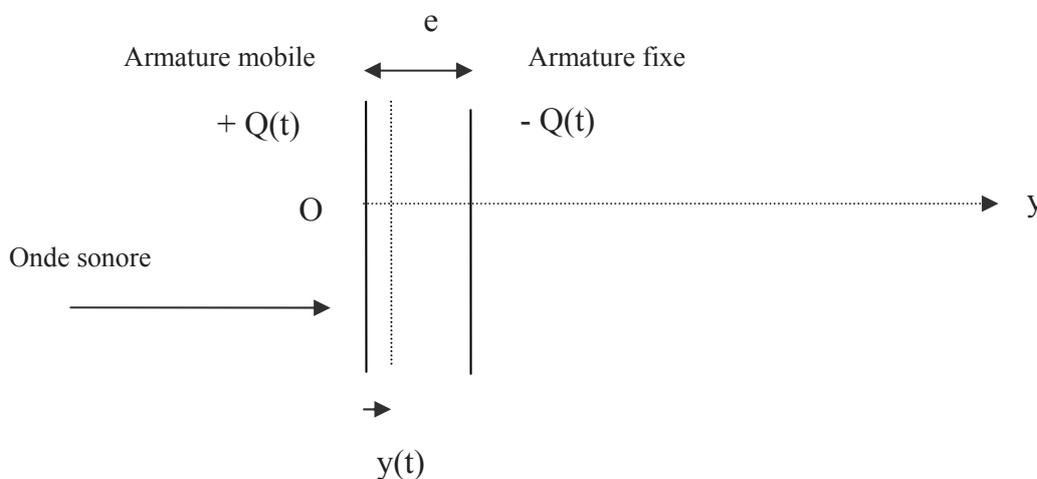


Figure 3 : Microphone électrostatique.

- I.20. Exprimer (sans approximation) la force électrique  $\vec{F}_e$  exercée par l'armature droite fixe sur l'armature gauche en mouvement ( $y$  différent de 0,  $i$  différent de 0) en fonction de  $Q_0, q, \epsilon_0, S$  et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Simplifier cette expression en supprimant le terme infiniment petit d'ordre 2 en  $q$  (développement limité au premier ordre). Il ne doit plus rester qu'un terme constant et un terme variable proportionnel à  $q$ . Exprimer alors la composante variable  $\vec{f}_e(t)$  de la force en fonction de  $q, Q_0, \epsilon_0, S$  et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Seule cette dernière composante sera utilisée dans la suite des calculs. Pourquoi ?
- I.21. Quelle est la force totale  $\vec{f}_p(t)$  subie par l'armature gauche de la part de l'air situé de part et d'autre ? On donnera le résultat en fonction de  $p(t)$  (surpression acoustique),  $S$  et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.
- I.22. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe horizontal Oy, en déduire l'équation différentielle donnant  $y(t)$  en fonction de  $m$  (masse d'une armature),  $k, a, \epsilon_0, S, Q_0, q(t)$  et  $p(t)$ . Cette équation sera par la suite notée l'équation (1).

Le condensateur est inclus dans le montage électrique suivant, dans lequel le générateur de tension est parfait, de force électromotrice  $V_0$  constante.

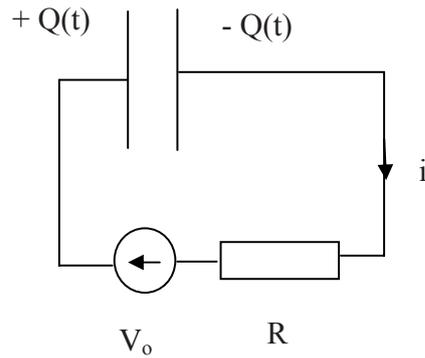


Figure 4 : Circuit électrique du microphone électrostatique.

- I.23. Exprimer  $V_0$  en fonction de  $Q_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $S$  et  $e$  lorsque  $y$  et  $i$  sont nuls (microphone au repos). Exprimer, sans approximation, la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $S$ ,  $e$  et  $y(t)$  lorsque le microphone vibre.
- I.24. Quelle relation lie  $q(t)$  et  $i(t)$  ? Justifier clairement. En appliquant la loi des mailles, en déduire la relation liant  $V_0$ ,  $i(t)$ ,  $R$ ,  $Q_0$ ,  $q(t)$ ,  $\epsilon_0$ ,  $S$ ,  $e$  et  $y(t)$ .
- I.25. En partant de l'équation précédente et en négligeant le terme en  $qy$  devant les autres, montrer qu'on obtient :  $\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int i(t) dt$  où  $C_0$  représente la capacité du condensateur au repos. Cette équation est notée (2). On détaillera clairement le calcul et les simplifications faites.

On considère maintenant que  $p(t)$ ,  $y(t)$  et  $i(t)$  sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega$ . On utilisera à partir de maintenant la notation complexe avec  $j^2 = -1$ . A chaque grandeur sinusoïdale  $x(t)$ , on associera la grandeur complexe  $\overline{x(t)}$  telle que  $x(t)$  soit la partie réelle de  $\overline{x(t)}$ .

- I.26. Réécrire l'équation (1) en notation complexe et en déduire une relation liant  $\overline{y(t)}$ ,  $\overline{i(t)}$  et  $\overline{p(t)}$  et les divers paramètres. On posera  $\overline{Z_m} = a + j \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$  et on exprimera  $\overline{Z_m y(t)}$  en fonction de  $S$ ,  $\omega$ ,  $Q_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\overline{p(t)}$  et  $\overline{i(t)}$ .
- I.27. De même, réécrire l'équation (2) en notation complexe et en déduire que  $\overline{y(t)}$  et  $\overline{i(t)}$  sont reliées en notation complexe par une relation du type  $\overline{y(t)} = \overline{A} \overline{i(t)}$  où  $\overline{A}$  est une grandeur complexe qu'on exprimera en fonction de  $\overline{Z_c} = \left( R + \frac{1}{jC_0\omega} \right)$ ,  $Q_0$ ,  $S$  et  $\epsilon_0$ .
- I.28. En déduire, toujours en notation complexe, que  $\overline{p(t)}$  et  $\overline{i(t)}$  sont liées par une relation du type  $\overline{i(t)} = \overline{B} \overline{p(t)}$  avec  $\overline{B} = \frac{SE_0}{j\omega \overline{Z_c} \overline{Z_m} - \frac{E_0^2}{j\omega}}$ , où  $E_0$  est la norme du champ électrique dans

le condensateur au repos.

- I.29. On a donc fabriqué un transducteur électroacoustique ou microphone puisqu'une suppression  $p(t)$  va être transformée en courant électrique de même forme  $i(t)$ . L'amplitude du courant dépend-elle de la fréquence ? On choisira en pratique des valeurs numériques telles que  $R$  soit très supérieure à  $\frac{1}{C_0\omega}$ ,  $k$  très supérieur à  $a\omega$  et très supérieur à  $m\omega^2$  et  $kR$  très supérieur à  $\frac{E_0^2}{\omega}$ . Quel est l'intérêt d'un tel choix ?

# Données numériques et mathématiques utiles

$$\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77$$

## Relations de « passage » au travers une distribution surfacique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(P,t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(P,t) \times \vec{n}_{12} \end{array} \right. \quad \text{avec } \vec{n}_{12} \text{ vecteur unitaire normal local} \\ \text{dirigé de 1 vers 2}$$

## Trigonométrie :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

## Notation complexe pour une fonction scalaire dépendant sinusoidalement du temps :

Pour une fonction réelle  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on notera la fonction complexe  $\underline{x}(t)$  correspondante :

$$\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

où  $x(t) = \text{Re}(\underline{x})$  et  $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$  ( $\underline{X}_m$  représente l'amplitude complexe de  $\underline{x}$ ) et  $j^2 = -1$ .

On a donc  $X_m = |\underline{X}_m|$  et  $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$ .

## Formulaire

Gradient (en coordonnées cylindriques) pour un champ scalaire  $f$  :

$$\overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$