BANQUE PT 2021
EPREUVE DE PHYSIQUE A

Temps - Fréquence

A) Aspects mécaniques

I) Ebauche de calendrier lunaire :

Q1) On s'intéresse à la distribution de masse de la Terre.

* Tous les plans contenant la droite (OM) sont plans de symétrie de la distribution de masse, or $\vec{g}$ est un vecteur polaire, donc $\vec{g}(M)$ appartient à ces plans, donc à leur intersection.

$\Rightarrow \vec{g} = g\,\vec{u_r}$

* Il y a invariance de la distribution de masse par toute rotation autour de O $\Rightarrow g(r,\not\theta,\not\varphi)$

$\Rightarrow \vec{g} = g(r)\,\vec{u_r}$.

* choix de la surface de Gauss : sphère de centre O de rayon r.
* théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}$

$$\oiint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = \underbrace{\oiint_S g(r)\,\vec{u_r}\cdot(+dS\,\vec{u_r})}_{r=c^{te}\text{ sur } S} = g(r)\oiint dS = g(r)\,4\pi r^2$$

Pour $r > R_T$ (rayon de la Terre), $M_{int} = M_T$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{-GM_T}{r^2}\,\vec{u_r}}$$

Rq : même champ que si la Terre était ponctuelle de masse M_T située en O

Q2) En supposant R_L (rayon de la lune) $\ll D_{TL}$, $\vec{g}$ sera le même en tout point de la lune, on peut considérer la lune comme une masse ponctuelle :

$$\boxed{\vec{F}_{T\to L} = m_L\,\vec{g}(D_{TL}) = \frac{-GM_T m_L}{D_{TL}^2}\,\vec{u_r}}$$

Q3) On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

* système : lune, assimilée à une masse ponctuelle en C_L
* actions extérieures : $\vec{F}_{T\to L}$
* principe fondamental de la dynamique : $m_L\,\vec{a} = \vec{F}_{T\to L}$
* $\vec{OC_L} = D_{TL}\,\vec{u_r}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{OC_L}}{dt} = D_{TL}\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ ($D_{TL} = c^{te}$, mouvement circulaire)

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -D_{TL}\,\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + D_{TL}\,\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

* on projette le PFD sur $\vec{u_\theta}$ $\Rightarrow D_{TL}\,\ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = c^{te} \Rightarrow \|\vec{v}\| = D_{TL}\,\dot{\theta} = c^{te}$

$\Rightarrow$ mouvement uniforme ($\|\vec{v}\| = c^{te}$)

* on projette le PFD sur $\vec{u_r}$ $\Rightarrow -m_L D_{TL}\,\dot{\theta}^2 = \frac{-GM_T m_L}{D_{TL}^2}$

$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{D_{TL}^3} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{D_{TL}^3}}$

$v = D_{TL}\,\dot{\theta} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{période}} = \frac{2\pi D_{TL}}{T_L}$

$\Rightarrow T_L = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{T_L = 2\pi\sqrt{\frac{D_{TL}^3}{GM_T}}}$

Q4) $\boxed{T_L^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}\,D_{TL}^3 \propto D_{TL}^3}$

$\Rightarrow$ Le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de la trajectoire elliptique (ici le rayon D_{TL} de la trajectoire circulaire).

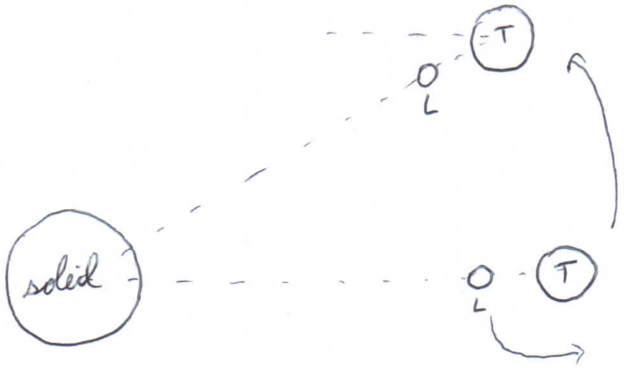
$T_L \simeq 2\times 3{,}1\sqrt{\frac{(3{,}9.10^8)^3}{6{,}7.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}}}$

$\simeq 6\sqrt{\frac{\cancel{6}.10^{1}}{6{,}7.10^{-11}\,\cancel{\times 6}}} = \sqrt{6}\ 10^6 \simeq 2{,}4.10^6$

$\simeq 2{,}4.10^6\,s \simeq \frac{2{,}4.10^6}{60\times 60\times 24}$ jours

$T_L \simeq 27$ jours

Q5)



Si la Lune est invisible la nuit, c'est qu'elle est de l'autre côté de la Terre, donc entre la Terre et le Soleil.

On voit bien qu'entre 2 lunaisons (29,53 j), la Lune a fait un peu plus d'un tour autour de la Terre.

Q6) 29,53 j n'est pas entier !

⇒ les mois font 29 ou 30 jours (en gros un mois sur 2 à 29 j, un mois sur 2 à 30 j, et un "rattrapage" de temps en temps).

nombre de jours dans l'année = 29,53 × 12 ← 12 mois

= 354 jours

≠ 365 ou 366 jours dans le calendrier grégorien

⇒ il y aura un décalage

⇒ le nouvel an ne tombe pas chaque année sur le même jour du calendrier grégorien.

D'après Wikipedia (!), la plupart des calendriers lunaires sont en fait luni-solaires (calendriers hébraïque, samaritain, chinois, tibétain, hindou). Le seul calendrier purement lunaire utilisé à grande échelle de nos jours est le calendrier hégirien (ou calendrier islamique).

QUATRIÈME PROBLÈME : Positions des télescopes spatiaux

1°/ HUBBLE

1.1] Si on se limite à l'interaction terrestre, nous sommes dans la situation d'1 problème à 2 corps en interaction Newtonienne dans 1 référentiel géocentrique (approché galiléen !). Dans ce cas la trajectoire est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole) dont le centre de la terre occupe un des foyers. Sachant que l'on souhaite que la trajectoire reste liée (à la terre), il s'agit d'1 trajectoire elliptique (comme celles des planètes autour du soleil dans l'approximation à 2 corps dans 1 référentiel héliocentrique galiléen)

1.2] En notant $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle, l'interaction entre le télescope Hubble et la terre s'écrit :

$$\underbrace{\vec{F}_{T/H}}_{\text{subie par Hubble de la part de la terre}} = -\mathcal{G}\frac{M_T\, \overbrace{m}^{\text{masse de Hubble}}}{r^2}\vec{e_r}$$ avec $\vec{e_r}$ dirigé de la terre vers le télescope.

Et la deuxième loi de Newton (ou TRD appliqué à 1 pt matériel) s'écrit : $\cancel{m}\vec{a} = -\frac{\mathcal{G}M_T\cancel{m}}{r^2}\vec{e_r}$

l'accélération est donc purement radiale et si le mvt est circulaire alors : $\vec{v}_{/R_{géo}} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ avec $r = C^{te}$

donc $\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{/R_{géo}} = r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \vec{0}$ (car $\vec{a}$ radiale)

soit : $\vec{a} = r\dot{\theta}^2(-\vec{e_r}) = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$ (accélération centripète).

Ainsi : $-r\dot{\theta}^2\vec{e_r} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{r^2}\vec{e_r}$ (1) et $\ddot{\theta} = 0$ (2)

(l'égalité (2) : $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r\dot{\theta} = v = C^{te}$ (avec $r = C^{te}$).

le mouvement est donc obligatoirement uniforme s'il est circulaire.

1.3) L'égalité (1) donnera la valeur de cette vitesse v constante.

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G} M_T}{r^2} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R_T + h}}$$ avec h l'altitude constante du Hubble

<u>Remarque</u> : L'énoncé impose de passer par la seconde loi de Newton alors que le passage par l'énergie potentielle Newtonienne donnerait 1 résultat <u>scalaire</u> immédiat :

$$E_p = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{r} + C^{te}. \quad \left(\text{on choisit } E_p = 0 \text{ pour } r \to \infty \Rightarrow C^{te} = 0\right)$$

donc la conservation de l'énergie mécanique totale donnerait :

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{\mathcal{G} M_T m}{r}\right) = E_m = C^{te}.$$

donc si $r = C^{te} \Rightarrow v = C^{te}$.

1.4) S'agissant d'1 mouvement circulaire uniforme, on obtient la période par le périmètre de la trajectoire circulaire :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \times \sqrt{\frac{r}{\mathcal{G} M_T}}$$

ou encore : $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathcal{G} M_T}} (R_T + h)^{3/2}}$$

(la question se limitait en fait à écrire : $T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$!).

1.5) <u>Troisième loi de Kepler</u> : Toutes les planètes décrivent des ellipses autour du soleil (foyer) vérifiant $\frac{T^2}{a^3} = C^{te}$ avec T la période et a le demi-grand axe de l'ellipse.

Dans le cas du télescope spatial, la terre joue le rôle de l'unique astre attracteur du mvt à 2 corps et on obtient :

$$\boxed{\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}}$$

1.6) <u>Application numérique</u> : $$T = \frac{2 \times \pi \times (6370 + 600)^{3/2} (10^3)^{3/2}}{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}}$$

donnant : $T = 5780\,s$ = <u>1h36</u> minutes. ou <u>96</u> minutes

2) Deuxième partie : James Webb

2.1) Dans le référentiel R' tournant avec le rayon Soleil-Terre le pt L_2 est 1 pt fixe qui devrait correspondre à une position d'équilibre (position d'équilibre pour le "petit corps" dans le problème dit "des 3 corps"). On écrit alors la condition d'équilibre avec la loi de Newton corrigée par la force d'inertie centrifuge soit :

$$\vec{0} = -\frac{\mathcal{G} M_S m}{r_S^2}\vec{e_{r_S}} - \frac{\mathcal{G} M_T m}{r_T^2}\vec{e_{r_T}} + m\,\omega_T^2 r_S\,\vec{e_{r_S}}$$

qui devient pour 1 recherche sur l'axe STM (L_2)

$$\vec{0} = -\frac{\mathcal{G} M_S m}{(d+\ell)^2}\vec{e_x} - \frac{\mathcal{G} M_T m}{\ell^2}\vec{e_x} + m\frac{\mathcal{G} M_S}{d^3}(d+\ell)\vec{e_x}$$

soit l'équation scalaire :

$$0 = \frac{-M_S}{(d+\ell)^2} - \frac{M_T}{\ell^2} + \frac{M_S}{d^3}(d+\ell)$$

et en multipliant par d^2 : $M_S \times \left(\frac{d}{d+\ell}\right)^2 + M_T \times \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = M_S\left(\frac{d+\ell}{d}\right)$

2.2) $k \equiv \frac{M_T}{M_S} = \frac{6.10^{24}}{2.10^{30}} = 3.10^{-6}$

Cette définition du rapport des masses permettant de simplifier l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{d}{d+\ell}\right)^2 + k\left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{d+\ell}{d}\right).$$

2.3) En notant : $\varepsilon = \frac{\ell}{d}$

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 + \frac{k}{\varepsilon^2} = 1+\varepsilon$$

s'approxime à l'ordre 1 en ε : $(1-2\varepsilon) + \frac{k}{\varepsilon^2} \simeq 1+\varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{k}{\varepsilon^2} \simeq 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{k \simeq 3\varepsilon^3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \simeq \sqrt[3]{\frac{k}{3}} = \sqrt[3]{10^{-6}} = \underline{\underline{10^{-2}}}$$

et donc : $\ell \simeq 10^{-2} \times d \simeq \underline{1{,}5.10^6\ \text{km}}$

2.4) 1) On obtiendrait l'énergie potentielle de chacune des "forces" mises en jeu par intégration des forces puisque :

$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$ ou bien $dE_p = -\vec{F}.\vec{dr}$

(à appliquer à chacune des 3 forces)

On utiliserait alors l'expression de cette fonction scalaire (énergie potentielle) pour rechercher les positions correspondant à des extrema.

Attention : elle est a priori exprimée en fonction des variables r_S et r_T et il faudra tester des variations de dx, dy et dz.

Dans le cas d'1 équilibre <u>stable</u>, il s'agit d'1 <u>minimum</u> d'énergie potentielle et dans le cas <u>instable</u>, d'1 <u>maximum</u> local d'énergie potentielle.

(Une position peut être stable vis à vis d'une modification de y et z et instable vis à vis d'une variation sur x).

2) A partir de la position d'équilibre L2, on remarque qu'une augmentation de x diminue les forces d'attraction "négatives" de la terre et du soleil alors que la force centrifuge "positive" augmente : ainsi le télescope JWST s'éloignera d'autant + de L2 si on l'en écarte d'1 dx > 0 ⟹ INSTABLE

(On peut faire le m̂ raisonnement avec dx < 0).

2.5) <u>Choix de L2</u> :

<u>Avantages</u> :
- → position d'équilibre (fixe dans R')
- → proximité de la terre (contrairement à L_3, L_4, L_5).
- → cône d'ombre de la terre (?) vis à vis du soleil.

⟹ contrairement à SOHO qui consistait à observer le <u>soleil</u>.

(pas de pollution lumineuse ?)

(en fait le JWST disposera m̂ d'1 bouclier thermique séparant 1 face irradiée par le soleil portant de cellules photoélectriques et de la partie électronique qui <u>hélas</u> émettrait de l'<u>IR</u> ! Or c'est dans l'IR que JWST devra faire ses images !)

Inconvénient <u>principal</u> : <u>INSTABILITÉ</u>

⟹ Moteurs à ergols (N_2O_4, N_2H_4) nécessaire pour maintenir 1 trajectoire approchée autour de L2