

DS 1 : Electrocinétique : filtres et dipôles simulés

PROBLEME A : Structure de RAUCH (cas particulier du PB2)

Le problème étudie des montages ayant une structure de Rauch. Ces montages, selon le choix des impédances permettent d'obtenir pratiquement tous les filtres du second ordre.

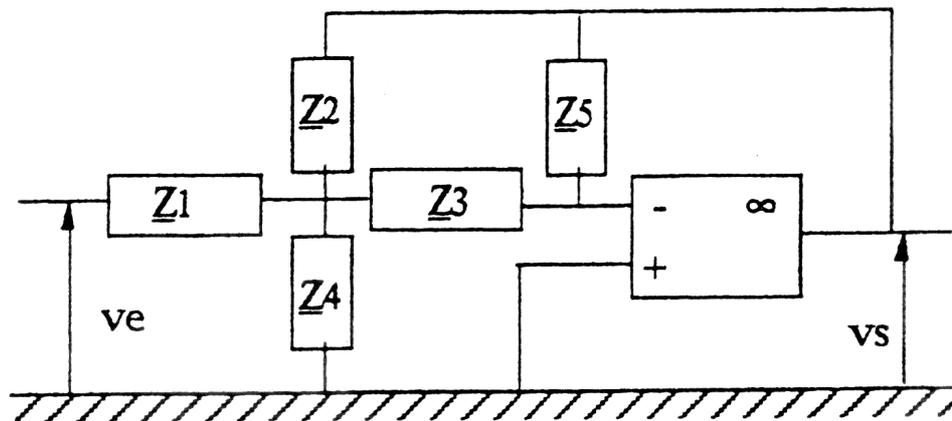
On note par \underline{V} la représentation complexe de la grandeur V .

On prendra $j^2 = -1$.

Aucune connaissance sur les filtres du second ordre n'est nécessaire pour résoudre ce problème.

Partie I : Préliminaires

On réalise le montage ci-dessous (\underline{Z}_i représentant une impédance complexe) :



- I-1 Justifier rapidement que le montage soit stable et que l'amplificateur de différence fonctionne en régime linéaire.
- I-2 Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

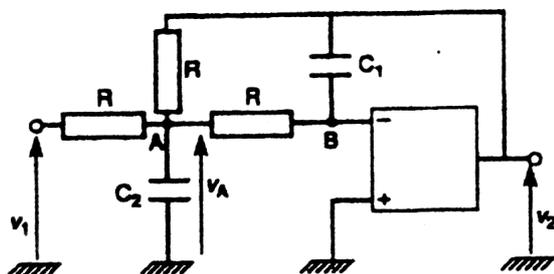
$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}$$

\underline{Y}_i représentant l'admittance complexe de l'impédance \underline{Z}_i ($\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$).

Les candidats ne trouvant pas la fonction de transfert pourront admettre le résultat et poursuivre ainsi la résolution du problème.

Partie III : Filtres passe-bas du second ordre

On réalise le circuit suivant, toujours avec une structure de Rauch.



III-1 Montrer que la fonction de transfert complexe peut se mettre sous la forme :

$$G(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{G_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On précisera les valeurs de G_0 , m et ω_0 en fonction de R , C_1 et C_2 .

III-2 On applique à l'entrée une tension constante à $t > 0$: $v_1(t) = E_0$.

Les deux condensateurs, étant déchargés à l'instant $t = 0$, déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit $v_2(t)$. Calculer $v_2(0+)$ et $v_2(\infty)$, valeurs de la tension de sortie en régime permanent.

III-3 On veut obtenir $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer la valeur qu'il faut donner à C_2 sachant que $C_1 = 10 \text{ nF}$.

On veut faire varier f_0 entre : $1 \text{ kHz} \leq f_0 \leq 4 \text{ kHz}$. Entre quelles limites doit-on choisir R ?

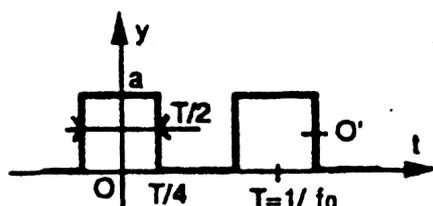
III-4 On choisit R pour obtenir un filtre de fréquence $f_0 = 2 \text{ kHz}$. Donner le diagramme de Bode asymptotique.

III-5 Le circuit peut-il être utilisé en circuit dérivateur ? en circuit intégrateur ?

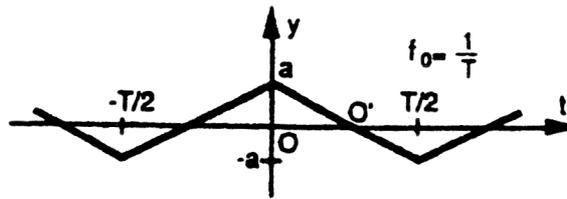
III-6 On envoie à l'entrée, un signal de fréquence $f_0 = 1,5 \text{ kHz}$.

(a) Le signal est donné par $v_1(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$. Donner sans calcul, le signal v_2 observé en sortie. (On représentera sur la copie le signal observé sur un oscilloscope).

(b) Même question mais le signal est un créneau régulier représenté ci-dessous :



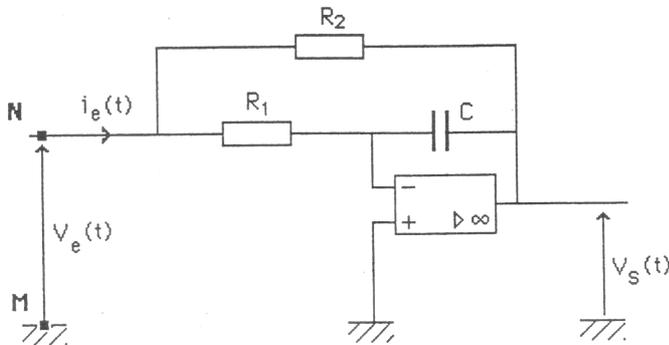
- (c) Même question mais le signal d'entrée est maintenant une dent de scie à flancs symétriques (représentés ci-dessous) :



III-7 Quel est l'avantage de ce filtre par rapport à un filtre passif du premier ordre ?

EXERCICE B : Simulation d'une auto-inductance

Le circuit suivant est destiné à simuler une bobine d'inductance pure L en parallèle avec une résistance pure r



1- Exprimer littéralement L et r en fonction des caractéristiques des dipôles passifs utilisés.

2- Applications numériques avec $R_1=2\text{k}\Omega$, $R_2=1\text{k}\Omega$ et $C=15\mu\text{F}$.

3- Comparer L à l'ordre de grandeur des inductances usuelles et commenter.

4- S'agit-il d'une bonne approximation d'une inductance idéale pour une tension d'entrée sinusoïdale de 1kHz ? Que vaut la puissance moyenne consommée si la tension efficace d'entrée est sinusoïdale d'amplitude 5V ?

5- On alimente ce circuit avec une tension carrée symétrique (+5V/-5V) de fréquence 1kHz. Quelle est la forme de la tension de sortie $V_s(t)$? Quel ordre de grandeur entre cette tension de sortie et la tension d'entrée ?

PROBLEME C : Etude d'un détecteur de métal

La bobine précédente (b) est placée à proximité d'une pièce métallique conductrice, de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$, avec $\mu_r > 1$. Elle peut être rapprochée ou éloignée de la pièce. La bobine, alimentée par une tension $u(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$ est parcourue par un courant variable $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$. On se place dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires. Pour une position et une pulsation données, U_{eff} , I_{eff} et φ sont fixés.

On adopte comme modèle équivalent de la bobine en présence de la pièce : une bobine d'inductance propre L et de résistance R . L et R dépendent de la position de la bobine par rapport à la pièce.

B4. Donner les expressions de L et de R en fonction de U_{eff} , I_{eff} , ω et φ .

On considère maintenant le circuit résonnant constitué de la bobine (b) en série avec un condensateur de capacité C_0 et un interrupteur K . Le modèle électrique est alors un circuit RLC (Figure 4). A $t=0$ le condensateur est initialement chargé la tension à ses bornes vaut $v_c(0) = U_0$, ($U_0 < 0$) et on ferme l'interrupteur. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ et $m = \frac{R}{2L\omega_0}$. Le facteur de qualité du circuit vaut $Q = \frac{1}{2m}$.

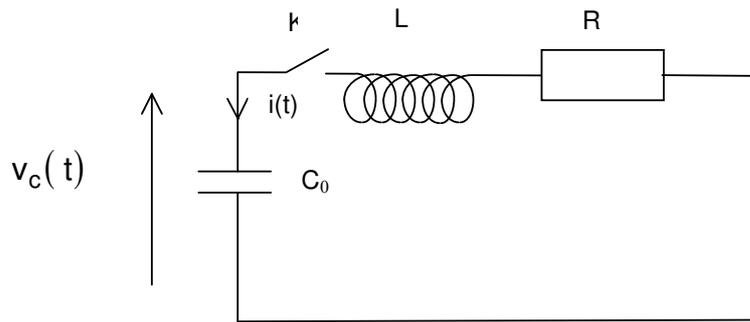


Figure 4

B5. Etablir les équations différentielles auxquelles satisfont $i(t)$ et $v_c(t)$.

B6. Les résoudre lorsque $m < 1$.

Un enregistrement du courant pendant la décharge du condensateur est donné à la figure 5 ci-dessous.

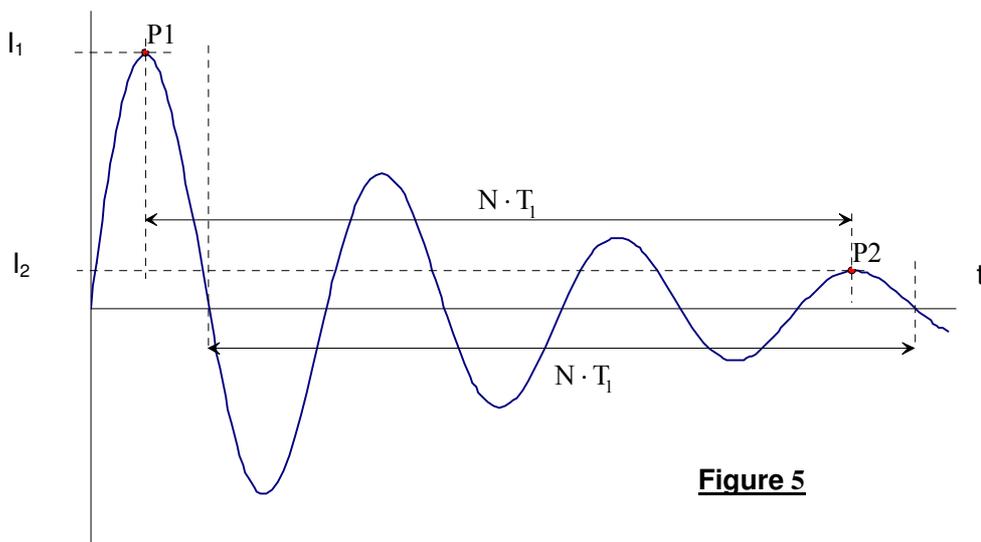


Figure 5

B7. Montrer comment la connaissance du rapport des amplitudes I_1 et I_2 et de la durée NT_1 (voir figure 5 ci-dessus) permet de trouver les valeurs de ω_0 et de m , puis de L et R .

Application numérique : $C_0 = 22\text{nF}$, $N = 3$, $T_1 = 0,4\text{ ms}$. En utilisant le graphe de la figure 5, déterminer ω_0 , m , L et R .

Le circuit oscillant de la partie précédente est utilisé dans le montage électronique de la figure 6 où figure un amplificateur opérationnel idéal, fonctionnant en régime linéaire, et trois résistances, dont une réglable (R_3).

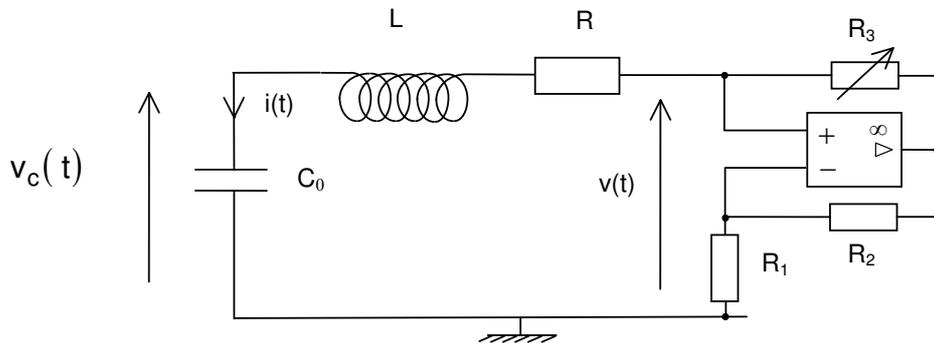


Figure 6

A1. Etablir la relation entre $i(t)$, $v(t)$, R_1 , R_2 et R_3 .

A2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$, $m = \frac{R}{2L\omega_0}$ et

$$m' = \frac{R_3 R_1}{2R_2 L \omega_0}.$$

A3. Etudier qualitativement le fonctionnement du montage lorsque $m' < m$ et lorsque $m' > m$. Que se passe-t-il théoriquement si $m' = m$? Cette condition est-elle réalisable? Quel est le rôle de la résistance réglable R_3 ?

Application numérique : $C_0 = 22 \text{ nF}$, $L = 20 \text{ mH}$. A quelle fréquence peut fonctionner cet oscillateur ?

A4. La tolérance sur la valeur de la capacité du condensateur est donnée à 5%. Quel écart relatif de fréquence pourra en découler ?

On réalise deux oscillateurs sinusoïdaux du type étudié au A ci-dessus, avec deux bobines b_1 et b_2 de mêmes dimensions. Les deux bobines sont placées côte à côte dans la tête de détection de l'appareil mais leur couplage magnétique reste négligeable (l'inductance mutuelle entre les deux bobines est négligée). La tête de détection est sensiblement plane, et parallèle au sol. Les oscillateurs sont appelés osc_1 et osc_2 , leurs sorties respectives sont les tensions v_{c1} et v_{c2} aux bornes des condensateurs ; on supposera que ces deux tensions sont de même amplitude, notées V_0 , de l'ordre du volt, et on notera f_1 et f_2 leurs fréquences respectives.

En l'absence de pièce métallique et loin du sol, les fréquences d'oscillations sont f_{10} et f_{20} (f_{20} est supposée supérieure à f_{10}).

Le montage complet du détecteur est donné à la figure 7. Un multiplieur donne en sortie le signal $V_A = A \cdot v_{c1} \cdot v_{c2}$, il est suivi par un filtre passe-bande de fréquence centrale $f'_0 = f_{20} - f_{10}$, de gain G et de facteur de qualité Q' , et d'un convertisseur fréquence – tension. L'élément final de la chaîne est un voltmètre numérique qui reçoit du convertisseur fréquence-tension une tension égale à $B \cdot (f - f'_0)$, lorsque celui-ci reçoit un signal périodique de fréquence f .

Le montage fonctionne correctement si f'_0 est de l'ordre de grandeur de 100 Hz.

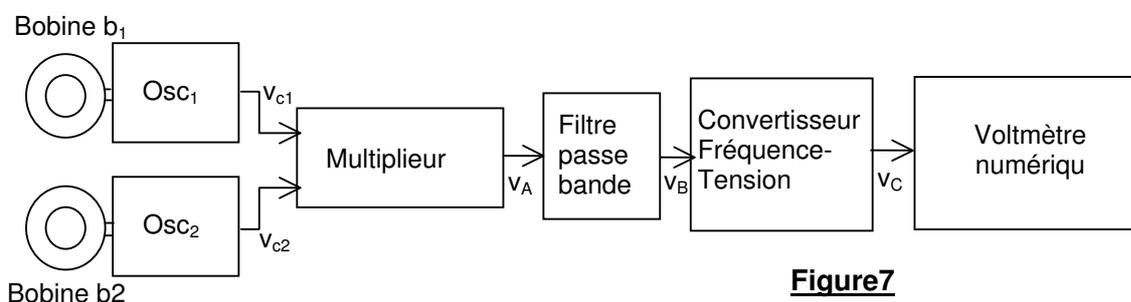


Figure7

B1. Quelles sont les unités des coefficients A (pour le multiplieur) et B (pour le convertisseur fréquence-tension) ?

B2. Quel est le rôle du multiplieur suivi du filtre passe bande ? Sachant que $Q' = 20$ et que f_{10} et f_{20} sont de l'ordre de 8 kHz, montrer, avec précisions quantitatives, que le signal à l'entrée du convertisseur fréquence-tension est assimilable à une tension sinusoïdale, dès lors que l'écart entre f_{10} et f_{20} est situé dans la bande passante du filtre.

B3. Pourquoi les deux fréquences f_{10} et f_{20} ont-elles peu de chance d'être identiques ? Comment peut-on ajuster l'écart entre ces deux fréquences ?

La présence du sol modifie les lignes de champ des bobines b_1 et b_2 . Il s'ensuit une variation de fréquence Δf -sensiblement identique sur chaque oscillateur- qui n'a pas d'influence sur la sortie du montage.

B4. Expliquer cette absence d'influence.

On suppose que la présence d'un objet métallique plus proche de la bobine b_1 que de la bobine b_2 induit une diminution de fréquence $\Delta'f$ sur f_1 , alors que f_2 reste quasi-constante..

Application numérique : $f_{10} = 7516$ Hz ; $f_{20} = 7653$ Hz ; $\Delta'f = 5$ Hz ; $A = 0,1$ SI ; $B = 0,6$ SI ; $G = 12$.

Calculer la tension à l'entrée du voltmètre numérique suite à la détection de l'objet métallique.

B5. Expliquer en détails ce qu'observe l'utilisateur de ce détecteur de métaux lorsque la tête de détection se déplace de part et d'autre de l'objet métallique.

EXERCICE D : Méthodes de mesure de la conductivité électrique du cuivre

Dans cette partie, on cherche à mettre en place un protocole expérimental permettant de déterminer la conductivité électrique du cuivre et à exploiter un résultat de mesure.

Pour ce faire, on dispose d'un fil de cuivre de longueur 10,0 mètres, de section circulaire de diamètre 2,0 mm, recouvert d'une résine isolante, que l'on enroule grossièrement pour réduire l'encombrement (on néglige toute déformation due à l'enroulement). Ce fil est plongé dans un bain thermostaté, muni d'un agitateur, pour maintenir sa température au voisinage de 20°C. On commence par connecter le fil aux bornes d'un ohmmètre dont un extrait de la notice est fourni dans la table 1.

On se place sur le calibre le mieux adapté. L'ohmmètre affiche 0,1 Ω .

□ 1 — Quel calibre est le mieux adapté pour cette mesure (on justifiera ce choix) ? Quelle incertitude doit-on associer à la valeur affichée ? Commenter.

Calibres	Précision	Courant de Mesure	Résolution
500 Ω	0,3% L + 3 UR	1 mA	0,1 Ω
5 k Ω		125 μ A	1 Ω
50 k Ω		12,5 μ A	10 Ω
500 k Ω		1,25 μ A	100 Ω
5 M Ω	0,5% L + 3 UR	125 nA	1 k Ω
50 M Ω	1% L + 3 UR	30 nA	10 k Ω

TABLE 1 – Tableau extrait de la notice de l'ohmmètre utilisé.

On cherche à déterminer la résistance électrique du fil à l'aide d'un autre montage, exploitant la loi d'OHM, un générateur de courant continu pouvant délivrer quelques ampères sous quelques volts, un voltmètre et un ampèremètre, dont les notices indiquent :

Calibres	Précision	Chute de tension maximale	Résolution
50 mA DC	0,3% L + 2 UR	< 800 mV	100 μ A DC
500 mA DC	0,3% L + 3 UR	< 800 mV	100 μ A DC
10 A DC	1% L + 3 UR	< 700 mV	10 mA DC

TABLE 2 – Tableau extrait de la notice de l'ampèremètre.

Calibres	Précision	Impédance d'entrée	Résolution	
500 mV DC	0,3% L + 2 UR	11 M Ω	0,1 mV DC	
5 V DC		11 M Ω	1 mV DC	
50 V DC		10 M Ω		10 mV DC
500 V DC				100 mV DC
600 V DC				1 V DC

TABLE 3 – Tableau extrait de la notice du voltmètre.

Pour mesurer une résistance à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre, deux montages sont possibles et représentés sur la figure 1.

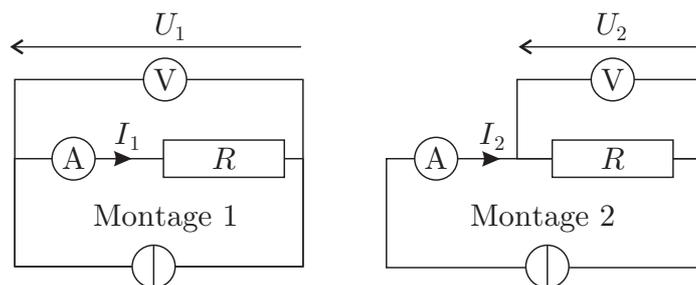


FIGURE 1 – Mesure d'une résistance

❑ 2 — En notant respectivement R_A et R_V les résistances internes de l'ampèremètre et du voltmètre, évaluer pour chacun de ces montages l'erreur systématique $\varepsilon_i = \frac{|R_i - R|}{R}$ où $R_i = \frac{U_i}{I_i}$ représente la résistance mesurée dans chacun des montages $i = 1$ ou $i = 2$. Représenter sur un même graphe les variations de cette erreur relative en fonction de R . Justifier que, dans cette expérience, seul l'un des deux montages est pertinent.

Avec le montage adapté, pour une intensité lue à l'ampèremètre de 5,23 A, le voltmètre affiche 287,5 mV (à chaque fois, on se place sur le calibre le mieux adapté).

❑ 3 — Estimer (avec un chiffre significatif) la résistance électrique du fil. Comparer (de manière chiffrée) la précision de cette seconde méthode de mesure à celle de la question 1. Comment procéder pour améliorer encore la qualité de cette seconde mesure ?

❑ 4 — Dédurre de la question précédente une estimation de la conductivité électrique du cuivre.

Résistance électrique d'un conducteur de longueur l et de section S : $R = \frac{l}{\gamma \cdot S}$ avec γ la conductivité électrique du matériau