

Corrigé DS2

Exercice 1 : Réseau oscillateur à filtres RC en cascade

I. Circuit « 5RC »

A. Reconnaissance

1. Dans tous les montages, la rétroaction relie la sortie de l'ALI à son entrée inverseuse sans aucune rétroaction déstabilisante et aucun des potentiels d'entrée n'est directement imposé. Tous les ALI peuvent donc fonctionner en régime linéaire.
2. Premier montage : Amplificateur inverseur de gain $-\frac{R_2}{R_1}$. Suivants : 5 suiveurs de tension intercalés entre les filtres RC passe-bas du premier ordre.
3. L'amplificateur est déjà identifié. L'ensemble des 5 filtres RC suivis systématiquement d'un suiveur est assimilable à un filtre passe-bas d'ordre 5.

B. Etude du filtre

1. temps caractéristique évident $\tau = RC = 100\mu s = 0.10ms$
2. La fonction de transfert à vide d'un seul filtre RC passe-bas s'obtient aisément (diviseur de tension) :

$\frac{1}{1+jx}$. Et dans la mesure où chaque filtre est suivi par un suiveur de résistance d'entrée « infinie », le calcul de la fonction de transfert à vide de chaque module est utilisable pour obtenir : $\underline{H}(x) \equiv \frac{u_S}{u_B} = \left(\frac{1}{1+jx}\right)^5$

avec $x = RC\omega = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = 2\pi RCf = 6,28 \cdot 10^{-4} \cdot f$

C. Simulation

1. 15,3-12,7=2,6ms pour 3 périodes soit T=0,87ms
2. f = 1,15 kHz et donc x=0.722
3. Le critère de BARKHAUSEN s'écrit ici : $\underline{H}(x) \cdot \left(-\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(\frac{1}{1+jx}\right)^5 \cdot (-k) = 1$

soit la relation en module et argument (φ pour chaque filtre RC) : $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^5 \cdot \exp(5j\varphi) \cdot (-k) = 1$

qui donne donc les deux égalités : $k = (1+x^2)^{\frac{5}{2}}$ et $\varphi = \frac{\pi}{5}$ soit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. On lit une valeur $R_2=30k\Omega$ et $R_1=10k\Omega$ soit $k=3,0$. On en déduit que le gain de boucle est supérieur à l'unité pour la fréquence associée à $x=0.73$ donc le régime est légèrement divergent et le signal quasi-sinusoidal : on observe en effet des harmoniques sur la FFT. Toutes les harmoniques sont à environ -45 dB du pic fondamental soit des composantes plus de 100 fois plus petites d'où l'allure quasi-sinusoidale.
5. Dans cette nouvelle FFT, le premier harmonique n'est qu'à -25dB du fondamental donc le signal n'est vraiment plus sinusoidal (-25 dB -> 18 fois plus petit). La déformation est certainement visible. La valeur de $R_2=100k\Omega$ donne un gain trop important : régime diverge plus vite et le temps dans les phases non-linéaires augmente. On remarque d'ailleurs que la fréquence fondamentale d'oscillation (et des harmoniques) a légèrement diminué (augmentation de la période des oscillations).

II. Circuit « 4RC »

1. Des oscillations préalables sont progressivement atténuées et disparaîtront complètement.

Le calcul de BARKHAUSEN conduit à : $-k = 1 + 4jx - 6x^2 - 4jx^3 + x^4$

soit le système de deux équations :

$$\begin{cases} 4x - 4x^3 = 0 \\ 1 - 6x^2 + x^4 = -k \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 1 \\ 1 - 6 + 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le choix de $R_2 = 39 \text{ k}\Omega$ correspond donc à un k trop faible : zone de stabilité \Rightarrow disparition des oscillations

2. On choisira R_2 légèrement supérieur à $40 \text{ k}\Omega$ et la fréquence des oscillations doit correspondre à $x=1$ soit une fréquence de $1/(6,28 \cdot 10^{-4}) = 1.59 \text{ kHz}$. Quant à l'amplitude des oscillations en régime permanent, elle sera fixée par l'équation en régime non-linéaire... que nous ne connaissons pas.

III. Avec deux filtres en cascade, la fonction de transfert du filtre du second ordre ne peut présenter une partie imaginaire nulle : impossible d'avoir $-k = 1 + 2jx - x^2$ avec k réel ! (R et C non nuls !)

Exercice 2 : Coût du chauffage d'un appartement

1 Un thermostat est un système pouvant échanger de l'énergie par transfert thermique tout en gardant sa température constante.

2 Plusieurs exemples possibles :

- ▷ Un système de très grande dimensions, p.ex. l'atmosphère ou un lac ;
- ▷ Un système dont la température est maintenue constante par un écoulement, p.ex. un fleuve pour le refroidissement d'une centrale nucléaire ;
- ▷ Un mélange diphasé, p.ex. un bain de glace.

3 Un bilan d'énergie interne appliqué à un thermostat s'écrit

$$dU = \delta Q = C dT,$$

avec par définition $\delta Q \neq 0$ et $dT = 0$: la seule possibilité est que **le thermostat ait une capacité thermique infinie**.

4 La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

5 On raisonne sur la tranche mésoscopique d'aire A et de longueur dx schématisée figure 1.

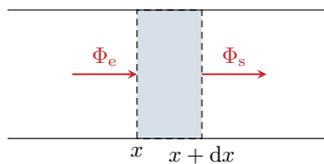


Figure 1 – Schéma du système mésoscopique.

Entre t et $t + dt$ elle reçoit de sa gauche le transfert thermique $\Phi_e dt$ et cède à sa droite le transfert thermique $\Phi_s dt$. D'après le premier principe,

$$dH = \Phi_e dt - \Phi_s dt.$$

Par définition,

$$\Phi = \iint_{\text{section}} \vec{j}(x, t) \cdot \overrightarrow{dS} = j_x A$$

si bien que

$$dH = j_x(x, t) A dt - j_x(x + dx, t) A dt = -\frac{\partial j_x}{\partial x} dx A dt$$

et d'après la loi de Fourier,

$$dH = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} A dx dt.$$

Par ailleurs, d'après la loi de Joule

$$dH = \underbrace{\rho dx}_{\text{masse}} C_m [T(x, t + dt) - T(x, t)] \simeq \rho A dx C_m \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

En identifiant, on en déduit

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} A dx dt = \rho A dx C_m \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{\lambda}{\rho C_m} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

ce qui est bien de la forme demandée avec

$$D = \frac{\lambda}{\rho C_m}.$$

Le mot « chaleur massique » est hors programme, et si le sujet suivait ledit programme la capacité thermique massique serait notée c (notation C_m réservée aux grandeurs molaires).

6 L'équation aux dimensions s'écrit

$$\frac{\Theta}{T} = [D] \frac{\Theta}{L} \quad \text{d'où} \quad [D] = L^2 T^{-1}.$$

Attention à ne pas confondre les notations des dimensions. Même si c'est un peu moins élégant, je suis presque d'avis qu'il vaut mieux utiliser directement les unités dans un cas pareil.

7a Par homogénéité, sachant que $[\tau] = T$

$$T = \frac{L^a}{L^{2b} T^{-b}}.$$

Par identification des dimensions,

$$\begin{cases} 1 = b \\ 0 = a - 2b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{L^2}{D}.$$

7b \triangleright On peut constater que le temps nécessaire pour que la diffusion agisse n'est pas proportionnel à la distance, contrairement à la propagation d'une onde.

\triangleright À partir de l'expression de D , on peut constater que le temps caractéristique est d'autant plus court que λ est grand, c'est-à-dire que le milieu est un bon conducteur thermique, ce qui est raisonnable.

\triangleright Au contraire, ce temps est d'autant plus long que ρC_m est grand, c'est-à-dire que le milieu a une grande inertie thermique.

7c Numériquement,

$$\tau = \frac{L^2}{D_{\text{cuivre}}} = 1^2 \times 8330 \quad \text{soit} \quad \tau = 8330 \text{ s} = 2\text{h}20.$$

C'est une longue durée alors que la barre est de dimension relativement modeste : la conduction thermique est un phénomène lent.

8 En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et ainsi

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad T(x) = Ax + B.$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} T(0) \underset{\text{CL}}{=} T_1 \underset{\text{sol}}{=} B \\ T(L) \underset{\text{CL}}{=} T_2 \underset{\text{sol}}{=} AL + B \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{L} \\ B = T_1 \end{cases}$$

Finalement,

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

La courbe demandée est simplement une droite, mais l'énoncé ne dit rien qui permette de connaître le sens de la pente.

9a Comme indiqué question 5,

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx} A = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A.$$

Le flux étant orienté selon $+\vec{e}_x$, la convention récepteur impose d'écrire la différence de température $T_1 - T_2$ d'où

$$\Phi = \frac{\lambda A}{L} (T_1 - T_2) \quad \text{soit} \quad T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda A} \Phi.$$

9b Par identification

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda A}.$$

9c La conductance thermique s'exprime en $\mathbf{W \cdot K^{-1}}$. Elle quantifie la puissance qui traverse le mur par kelvin de différence de température, c'est-à-dire qu'elle **quantifie l'importance des transferts thermiques** au travers du mur.

Attention à ne pas confondre : une résistance thermique (et donc une conductance thermique) n'est pas une caractéristique d'un matériau, mais une caractéristique d'un système tout entier, ici le mur. En effet, elles dépendent non seulement du matériau (via λ), mais aussi de la géométrie du système (via L et A).

10 On constate sur le document 2 qu'interposer des couches d'air à l'intérieur des matériaux diminue assez nettement la conductance thermique surfacique (simple vs. double vitrage, mur plein vs. mur creux). On constate également que l'épaisseur ne fait pas tout en ce qui concerne l'isolation, les propriétés intrinsèques du matériau jouent aussi (polystyrène vs. mur).

On constate sur le document 3 que l'air sec est un isolant aussi performant que la laine de verre (tant qu'il n'y a pas de convection!), ce qui explique pourquoi les performances des murs creux et du double vitrage. On peut aussi comprendre à la lecture de ce document pourquoi on ne fait pas de murs en cuivre :)

Mon inspiration s'arrête ici ...

11 Un double vitrage est composé de deux couches de verre qui encadrent une couche d'air, voir figure 2. Les trois résistances thermiques sont associées en série, donc leur résistance s'ajoutent. La couche d'air est un très bon isolant thermique ($\lambda_{\text{air}} \simeq \lambda_{\text{laine verre}}$), donc de forte résistance thermique, ce qui permet de considérablement augmenter la résistance thermique de l'ensemble : ce gain correspond à une division par 2 de la conductance thermique surfacique.

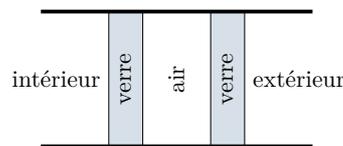


Figure 2 – Schéma d'un double vitrage.

12 La résistance thermique d'une paroi de surface $S = 1 \text{ m}^2$ est donnée par $R = 1/U_w S$, donc

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = U_w S \Delta T = 10 U_w \text{ (en W)}.$$

L'énergie consommée s'en déduit

$$E = \Phi \Delta t = 40 U_w \text{ (en kWh)},$$

et enfin le coût à partir du prix p d'un kWh,

$$\text{coût} = E \times p = 6 U_w \text{ (en euros)}$$

| | Φ (W) | Énergie annuelle (kWh) | Coût annuel (euros) |
|----------------|------------|------------------------|---------------------|
| Simple vitrage | 60 | 240 | 36 |
| Double vitrage | 30 | 120 | 18 |

13 La démarche est identique concernant le mur non isolé. Pour le mur isolé, il faut calculer le coefficient de performance. Les matériaux sont montés en série donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{mur}} + R_{\text{PS}} = \left(\frac{1}{U_{w,\text{mur}}} + \frac{1}{U_{w,\text{PS}}} \right) \frac{1}{S}$$

On en déduit

$$U_{w,\text{tot}} = \frac{U_{w,\text{mur}} U_{w,\text{PS}}}{U_{w,\text{mur}} + U_{w,\text{PS}}} = 2,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

| | Φ (W) | Énergie annuelle (kWh) | Coût annuel (euros) |
|---------------|------------|------------------------|---------------------|
| Mur non isolé | 20 | 80 | 12 |
| Mur isolé | 4 | 16 | 2,4 |

L'économie réalisée est donc d'environ 10 € par m^2 ... sans parler du bilan carbone.

14a Les fenêtres orientées au sud reçoivent **davantage d'ensoleillement**, et permettent donc de chauffer l'appartement par rayonnement. Les fenêtres au nord ne bénéficiant pas de cet ensoleillement, on les fait petites pour limiter les pertes thermiques. Ce qui est un avantage en hiver devient un inconvénient en été par forte chaleur : les arbres à feuille caduques permettent d'**ombrager l'appartement en été** mais pas en hiver.

14b Schématiquement, l'effet des volets s'apparente à une résistance thermique supplémentaire montée en parallèle des murs et fenêtres. L'isolation est d'autant meilleure que le matériau est mauvais conducteur : il vaut donc mieux des **volets en bois** plutôt qu'en métal.

15 Le volume d'air est

$$V = 100 \times 2,5 = 250 \text{ m}^3$$

ce qui correspond à une masse

$$m = \rho V = 300 \text{ kg}.$$

16a Par définition,

$$C = mC_{p,m} = 300 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

16b On raisonne sur l'air de l'appartement pendant une transformation isobare de durée Δt .

Bilan d'enthalpie :

$$\Delta H \underset{\text{1er P}}{=} \mathcal{P} \Delta t \underset{\text{Joule}}{=} C \Delta T \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \frac{C \Delta T}{\mathcal{P}} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}.$$

16c Quiconque est déjà rentré de vacances en plein hiver sait que ce résultat n'est pas crédible! La capacité thermique de l'appartement inclut aussi celle des murs et du mobilier qui sont nettement supérieures à celles de l'air car il s'agit de solides. Les pertes thermiques sont évidemment à prendre en compte également, mais ce n'est pas le facteur principal.

17a Pour une fenêtre simple vitrage,

$$G_{sv} = U_{w,sv} S = 15 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Pour une fenêtre double vitrage,

$$G_{dv} = U_{w,dv} S = 7,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

17b Les quatre fenêtres sont soumises à la même différence de température entre leurs deux faces : elles sont donc **montées en parallèle**.

17c Les conductances se somment en parallèle, donc $G_{\text{tot}} = 4G_{\text{fen}}$ soit

$$G_{\text{tot},sv} = 60 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad G_{\text{tot},dv} = 30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Lorsque $\Delta T = 10 \text{ K}$,

$$\Phi_{sv} = G_{\text{tot},sv} \Delta T = 600 \text{ W} \quad \text{et} \quad \Phi_{dv} = G_{\text{tot},dv} \Delta T = 300 \text{ W}.$$

17d La puissance thermique totale perdue vaut 5Φ , ce qui nécessite donc des convecteurs de puissance

$$\mathcal{P}_{0,sv} = 3 \text{ kW} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{0,dv} = 1,5 \text{ kW}.$$

Pour comparer, il faut convertir cette puissance en énergie annuelle consommée par m^2 d'appartement,

$$E_{sv} = \frac{\mathcal{P}_{0,sv} \times \Delta t}{S_{\text{appt}}} = \frac{3 \times 4000}{100} = 120 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$$

et

$$E_{dv} = \frac{\mathcal{P}_{0,dv} \times \Delta t}{S_{\text{appt}}} = \frac{1,5 \times 4000}{100} = 60 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$$

EXERCICE (3) : Modèle simplifié d'Z Gyser.

(E1) Dans le cas général d'un corps pur, la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide est positive :

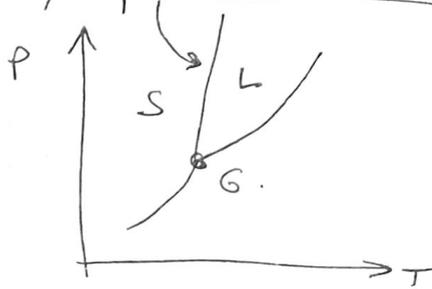
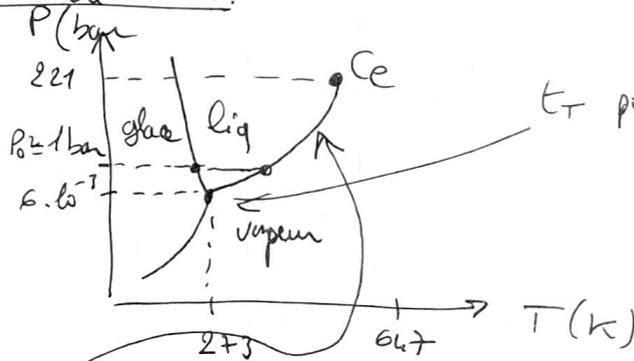


Diagramme de l'eau :



T_T point triple : coexistence à l'équilibre des 3 phases eau-glace-liquide-vapeur

C_e : point critique au-delà de ce point il n'y a plus de discontinuité de v ($v_{vap}(C_e) = v_{liq}(C_e)$) (même volume par exemple)

courbe d'ébullition (ou vaporisation).

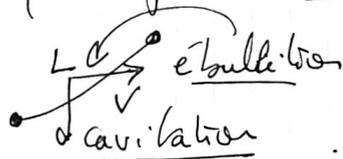
Plus de discontinuité de h non plus : $h_{vap}(C_e) = h_{liq}(C_e)$.
 \Rightarrow la "chaleur latente" du changement d'état devient nulle.

(E2)

Le phénomène d'ébullition consiste à passer la courbe d'éq-liquide-vapeur en cherchant à augmenter la température par chauffage du liquide (ce que l'on traduit parfois par une traversée horizontale de la courbe).

Le phénomène de cavitation consiste à faire apparaître des bulles dans l'eau par dépression (diminution de p) à $T = C_e$ ce que l'on traduit par une traversée verticale descendante de la courbe d'équilibre liquide-vapeur. La représentation en diagramme P, T est totalement inadéquate à part si l'on s'intéresse à ce qui se passe avant et après les phénomènes sus-nommés :

ex: au forage de la hélice de bateau



(E3)

$T_0 = 100^\circ C$ et $T_1 = 0^\circ C$ par définition m de l'échelle celsius.

La pression de vaporisation est plus basse en altitude donc la température d'ébullition (et donc de l'eau des patates) est inférieure.

(E4) Par définition: $l_{eb}(T) \equiv h_{vap}(T) - h_{liq}(T)$
 et la pression de vapeur saturante est la pression d'équilibre
liquide-vapeur à T.

$$l_{eb}(T) = T(v_{vap}(T) - v_{e}(T)) \left(\frac{dP_{sat}(T)}{dT} \right)_T$$

Mass volumique de l'eau liquide environ 1000x supérieure
 à la mass volumique de l'eau sous forme vapeur (tant que l'on
 se place très loin du pt critique)

Ainsi: $v_{vap}(T) \gg v_e(T)$

$$\Rightarrow l_{eb}(T) \approx T v_{vap}(T) \left(\frac{dP_{sat}}{dT} \right)_T$$

(E5) $l_{eb}(\star) = Cte.$

+ Modèle du gaz parfait: $v_{vap}(T) = \frac{r_{H_2O} T}{P_{sat}(T)}$ avec $r_{H_2O} = \frac{R}{M_{H_2O}}$.
 (forme équivalente à celle concernant
 1 quantité de matière de n mol: $PV = nRT$).

Ainsi: $l_{eb} = Cte = \frac{r_{H_2O} T^2}{P_{sat}(T)} \left(\frac{dP_{sat}}{dT} \right)$

qui donne par séparation des variables P_{sat} et T :

$$\frac{dP_{sat}}{P_{sat}} = \frac{l_{eb} dT}{r_{H_2O} T^2}$$

dont les primitives sont: $\ln(P_{sat}) = -\frac{l_{eb}}{r_{H_2O} \times T} + Cte.$

ou encore par intégration de (P_0, T_0) à (P_{sat}, T) :

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = -\frac{l_{eb}}{r_{H_2O}} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

soit par correspondance avec les constantes A et B proposés:

$$\left[A = \frac{l_{eb}}{r_{H_2O} T_0} = \frac{M_{H_2O} l_{eb}}{R T_0} \right] \text{ et } \left[B = \frac{l_{eb} M_{H_2O}}{R} \right]$$

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = 13,7 - \frac{5120}{T} \text{ avec } T \text{ en K.}$$

(H) Evolution de la température dans la chambre.

(H1) \dot{q} en $W \cdot m^{-2}$ car il s'agit d'un flux thermique (puissance)
 par unité de surface frontiere.

H2

On peut considérer que la roche constitue 1 réservoir de chaleur assimilable à un thermostat (de capacité thermique quasi infinie) qui ne voit pas sa température varier alors qu'il échange de la chaleur avec le mélange d'eau diphasée. Il faut aussi considérer la roche comme 1 bon conducteur thermique car la quantité de chaleur est "puisée" dans la roche voisine de la cavité donc cette température au voisinage diminuerait assez rapidement si l'uniformisation de la température n'avait pas lieu rapidement dans l'ensemble de la roche (donc de bonne conductivité thermique).

H3

Considérons comme système d'étude la masse mean présente dans la cavité (initialement sous forme liquide).

Exprimons le premier principe de la thermodynamique à ce système :

$$\frac{dU}{dt} = h S_e (T_R - T)$$

↑
flux entrant.

avec $U = m_{eau} c_{eau} T + Cte.$

$$\Rightarrow m_{eau} c_{eau} \frac{dT}{dt} = h S_e (T_R - T)$$

soit en fin : $\frac{dT}{dt} + \frac{h S_e}{m_{eau} c_{eau}} T = \frac{h S_e}{m_{eau} c_{eau}} T_R.$

de solution : $T(t) - T_R = (T_E - T_R) e^{-\frac{t}{\tau_E}}$

H4

Tout ce qui a été écrit dans la question précédente n'est valable que tant que la chaleur reçue ne sert qu'à augmenter la température de l'eau liquide à $P_H = Cte$. Soit avant toute ébullition -

On peut signaler qu'il s'agit en fait également d'un bilan enthalpique

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dH}{dt} \text{ puisque } p = Cte \text{ et } v = Cte \text{ tant que l'on adopte le modèle d'un mélange indilatable.}$$

la durée t_1 est donnée par : $T(t_1) = T_{eb} = T_R + (T_E - T_R) e^{-\frac{t_1}{\tau_E}}$

ainsi : $\frac{T_E - T_R}{T_{eb} - T_R} = e^{\frac{t_1}{\tau_E}} \Rightarrow t_1 = \tau_E \ln \left(\frac{T_E - T_R}{T_{eb} - T_R} \right)$

$$t_1 = \frac{m_{eau} c_{eau}}{h S_e} \ln \left(\frac{T_E - T_R}{T_{eb} - T_R} \right)$$

H5

lors de l'ébullition à $T_{eb} = cte$, le bilan enthalpique appliqué à une masse d'eau infinitésimale ($-dmeau_{liq} > 0$)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{-dmeau_{liq} \cdot l_{eb}(T_{eb})}{dt} = h_{se} (T_R - T_{eb}) > 0$$

que l'on intègre de $meau_{liq}$ initiale = $meau$ à $meau_{liq}$ finale = 0

$$\int_{meau}^0 -dmeau_{liq} = meau = \frac{h_{se} (T_R - T_{eb})}{l_{eb}(T_{eb})} \times \int_0^{t_2} dt$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{l_{eb} \times meau}{h_{se} (T_R - T_{eb})}$$

Exercice 4 : Fusibles

B.1] $\vec{j}_H = -\lambda \vec{grad} T$ (gradient local de température $(K \cdot m^{-1})$)
densité volumique de flux thermique (W/m^2) (conductivité thermique $(W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1})$)

Cette loi propose 1 proportionnalité entre la cause du transfert (gradient de température) et le transfert de chaleur (le signe moins stipulant que la chaleur se dirige du chaud vers le froid).

B.2] Bilan sur une tranche de fil métallique entre x et $x+dx$.

$$(1) \frac{d(SU)}{dt} = \mu c S dx \left(\frac{dT}{dt} \right) = \phi(x) - \phi(x+dx) + \frac{SUP}{dt}$$

production d'énergie d'agitation thermique dans la tranche infinitésimale et par unité de temps.

C'est bien sûr l'effet joule qui est responsable de ce type de production. En notant dx la longueur de tranche, la résistance électrique de ce morceau infinitésimal vaut:

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S}$$

et la puissance convertie est donc: $dP = (dR) \cdot I^2$

$$\text{donc: } dP = \frac{1}{\sigma S} dx I^2$$

Quand, par Fourier: $\phi(x+dx) = jth(x+dx) \cdot S$
(uniformité de jth sur la section).

$$\Rightarrow \phi(x+dx) - \phi(x) = \left(\frac{jth(x+dx) - jth(x)}{dx} \right) \times S dx$$

donc l'équation-bilan thermique (1) donne:

$$\mu \cdot c S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial jth}{\partial x} \right) S dx + \frac{dx I^2}{\sigma S}$$

ou encore avec la loi de FOURIER:

$$\mu \cdot c S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) S dx + \frac{dx I^2}{\sigma S}$$

notamment: $\left(\mu \cdot c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{I^2}{\sigma S} \right)$

B.3] en régime stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = - \frac{I^2}{\sigma S^2 \lambda}$

que l'on peut primitiver 2x: $\frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{I^2}{\sigma S^2 \lambda} x + A$

$$T(x) = - \frac{I^2 x^2}{2 \sigma S^2 \lambda} + Ax + B$$

avec pour conditions aux limites spatiales: $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_0$ (contacts thermiques parfaits)

Ce qui implique que $B = T_0$ et que:

$$- \frac{I^2 L^2}{2 \sigma S^2 \lambda} + AL = 0 \Leftrightarrow A = + \frac{I^2 L}{2 \sigma S^2 \lambda}$$

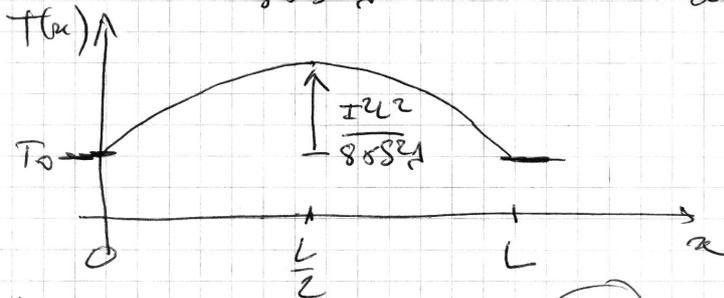
et enfin:

$$T(x) = - \frac{I^2 x^2}{2 \sigma S^2 \lambda} + \frac{I^2 L x}{2 \sigma S^2 \lambda} + T_0$$

$$T(x) = \frac{I^2}{2 \sigma S^2 \lambda} (L - x) x + T_0$$

Il s'agit d'un profil parabolique de valeur maximale

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{I^2 L^2}{8 \sigma S^2 \lambda} + T_0 \text{ et symétrique autour de } \frac{L}{2}$$



B.4] La fusion démarre donc en $\left(x = \frac{L}{2} \right)$ pour:

$$T_f = T_0 + \frac{I_{\max}^2 L^2}{8 \sigma S^2 \lambda}$$

c3) En régime stationnaire, le bilan de flux thermiques sur 1 tranche d'épaisseur dx entre x et $x+dx$ donnera cette fois (et avec toujours le terme de production Joule)

$$0 = \mu \times S dx \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dx + \frac{I^2}{\sigma S^2} S dx - h(T-T_0) \times \underbrace{\pi D dx}_{\substack{\text{surface} \\ \text{de la} \\ \text{tranche} \\ \text{latérale}}}$$

En divisant par $S dx$:

$$0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\sigma S^2} - h(T-T_0) \frac{\pi D}{(\pi D^2/4)}$$

$$0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\sigma (\frac{\pi D^2}{4})^2} - \frac{4h}{D} (T-T_0)$$

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{16I^2}{\sigma \pi^2 D^4} - \frac{4h}{D} (T-T_0)$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k^2 (T-T_0 - T_1) = 0 \right] \quad \text{avec } k = \sqrt{\frac{4h}{D\lambda}} \text{ et } k^2 \times \frac{16I^2}{\sigma \pi^2 D^4} = k^2 T_1$$

c4) Résolution: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 (T-T_0 - T_1)$

donc: $\Theta(x) \equiv T(x) - T_0 - T_1$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{et } \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = k^2 \Theta(x) \right]$$

dont les solutions sont exponentielles réelles:

$$\Theta(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

Avec les conditions aux limites spatiales $\begin{cases} \Theta(0) = -T_1 \\ \Theta(L) = -T_1 \end{cases}$ (car $T(0) = T(L) = T_0$)

$$\text{donc: } \underline{A + B = A e^{kL} + B e^{-kL} = -T_1}$$

$$A(1 - e^{kL}) = B(e^{-kL} - 1) \quad (\text{eq 1})$$

$$\text{donc } A e^{\frac{kL}{2}} \left(e^{-\frac{kL}{2}} - e^{\frac{kL}{2}} \right) = B e^{-\frac{kL}{2}} \left(e^{-\frac{kL}{2}} - e^{\frac{kL}{2}} \right)$$

$$\text{soit aussi: } A e^{\frac{kL}{2}} = B e^{-\frac{kL}{2}}$$

$$\text{soit encore: } B = A e^{kL} = -A - T_1$$

$$\Rightarrow A = \frac{-T_1}{1 + e^{kL}} \quad \text{et} \quad B = \frac{-T_1 e^{kL}}{1 + e^{kL}}$$

$$\text{d'où: } \theta(x) = \frac{-T_1}{1+e^{kL}} \times e^{kx} - \frac{T_1 e^{kL}}{1+e^{kL}} \times e^{-kx}$$

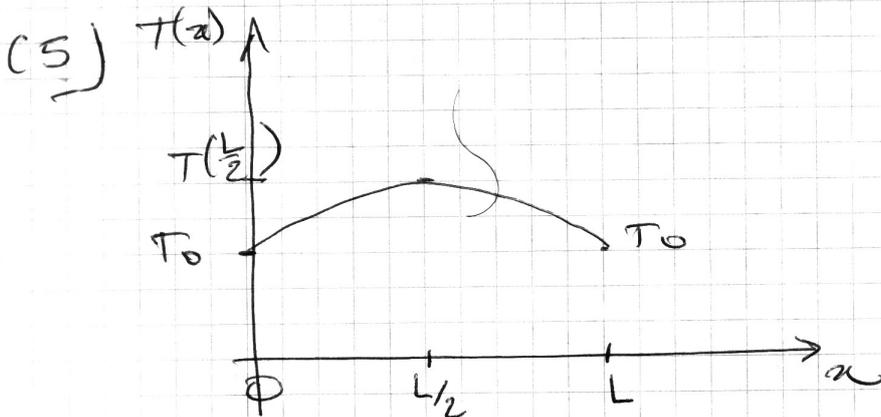
$$\theta(x) = -T_1 \left[\frac{e^{kx} e^{-kL} + e^{-kx} e^{kL}}{e^{-\frac{kL}{2}} + e^{\frac{kL}{2}}} \right]$$

$$\theta(x) = -T_1 \left[\frac{e^{k(x-\frac{L}{2})} + e^{-k(\frac{L}{2}-x)}}{e^{-\frac{kL}{2}} + e^{\frac{kL}{2}}} \right]$$

$$\theta(x) = -T_1 \frac{\text{ch}(k(x-\frac{L}{2}))}{\text{ch}(\frac{kL}{2})}$$

$$\text{d'où } T(x) = T_0 + T_1 - T_1 \frac{\text{ch}(k(x-\frac{L}{2}))}{\text{ch}(\frac{kL}{2})}$$

(Il est plus facile de rechercher directement la solution de type hyperbolique: $\theta(x) = A \text{ch}(kx) + B \text{sh}(kx)$)



(6) Il manque les transferts radiatifs (Rayonnement).