DS 8 : Electromagnétisme

(4 heures sans calculette)

PREMIERE PARTIE

Champ E créé par une couche cylindrique

On considère une distribution volumique uniforme de charges électriques, de densité volumique ρ_o constante, dans une couche cylindrique limitée par les rayons interne R_1 et externe R_2 et de hauteur d (fig 2).

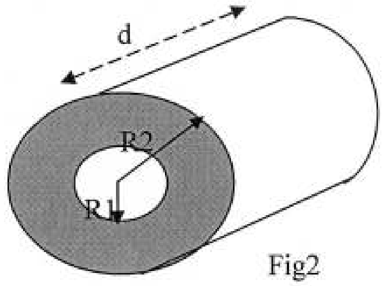


Fig2

I- relations de MAXWELL.

I-1°) Rappeler les équations locales de Maxwell valides pour cette distribution statique de charges.

I-2°) Une de ces équations permet d'aboutir au théorème de Gauss.

a- Enoncer complètement et précisément le théorème de Gauss.

b- Indiquer comment on passe de cette équation locale au théorème de Gauss.

II- champ électrostatique $\vec{E}$

On s'intéresse au champ électrique créé par le cylindre chargé, en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z ; l'axe Oz est l'axe de symétrie de révolution du cylindre.

II-1°) Sur un schéma, faire apparaître les coordonnées r, θ, z et les vecteurs unitaires associés.

II-2°) Dans toutes la suite, on envisage que le module du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel V (M) ne sont fonction que de r.
Quelles sont les hypothèses permettant de valider cette approximation ?

II-3°) A partir du théorème de Gauss, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de la couche cylindrique.

III- potentiel électrique V.

III-1°) A partir d'une relation liant $\vec{E}$ et V, donner l'expression du potentiel V(r) en tout point de la couche (on posera V (R_2) = Va , Va étant un potentiel de référence donné).

III-2°) On envisage le cas particulier où R_1=0 et ρ_o >0.

a- exprimer V(r) dans ce cas.

b- Donner l'expression littérale de V(r=0).

c- Représenter graphiquement V en fonction de r .

IV- équation de Poisson.

Démontrer l'équation: $\Delta V = -\dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}$, ΔV étant le laplacien de la fonction V ;

DEUXIÈME PARTIE
Cable coaxial

Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l, l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : $R_1 = 0{,}25$ mm, $R_2 = 1{,}25$ mm et $l = 100$ m.

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1, le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l. Vu que $l >> R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

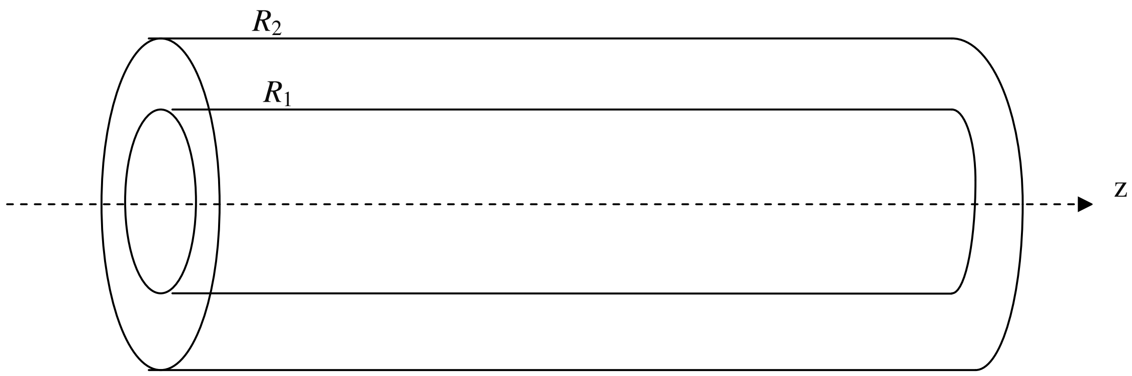


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0, le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\vec{j}_{s_1} = \dfrac{I_0}{2\pi R_1}\vec{u}_z$. On note : $\vec{j}_{s_2}$ la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

6) Préciser l'expression et l'unité de $\vec{j}_{s_2}$.

7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique $\vec{B}$. Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

8) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction I_0, r et μ_0.

9) On note : $w_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$, la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0, μ_0, R_1, R_2 et l.

10) On rappelle que $W_m = \dfrac{L_l I_0^2}{2}$. Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l, en fonction de μ_0, R_1, R_2 et de l.

11) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0, R_1, R_2.
Déterminer la valeur numérique de L.

II] Onde électromagnétique et impédance du câble coaxial :

A] Détermination de l'onde électromagnétique :

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des z. Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique : $\vec{E}(r,z,t) = \dfrac{\alpha}{r}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_r$ où α est une constante positive.

On lui associe le champ électrique complexe : $\underline{\vec{E}}(r,z,t) = \dfrac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_r$.

On a : $\vec{E}(r,z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}(r,z,t))$ où Re signifie partie réelle.

De même, il existe un champ magnétique $\vec{B}(r,z,t)$ auquel on associe le champ complexe : $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$, avec $\vec{B}(r,z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}(r,z,t))$.

12) L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.

13) On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\underline{\vec{E}}(r,z,t)$ en fonction de E_0, r, z, k, ω, t et R_1.

14) Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles.

15) A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω. Le milieu est-il dispersif ?

16) Déterminer en fonction de E_0, r, t, ω, k et R_1, l'expression du champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

B] Puissance transportée :

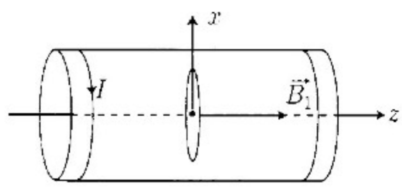
17) On désigne par $\vec{\pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\vec{\pi}$ en fonction de E_0, R_1, r, k, ω, z, t et μ_0.

18) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P, par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0.
Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.

TROISIÈME PARTIE
Spire en rotation dans un solénoïde

Induction

Une bobine plate de N spires, de section S, de résistance R et d'inductance négligeable est placée à l'intérieur d'un solénoïde idéal comportant n spires par unité de longueur, parcouru par un courant I constant.
Un opérateur fait tourner la bobine à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe parallèle à (Ox), portant le diamètre de la bobine et perpendiculaire à l'axe (Oz) du solénoïde.



1. Décrire qualitativement ce qui se passe dans la bobine.
2. Exprimer le courant induit dans la bobine.
3. Exprimer les actions mécaniques du solénoïde sur la bobine.

QUATRIÈME PARTIE
Effet de peau dans un métal

On considère une plaque métallique conductrice, de grandes dimensions considérées comme infinies suivant Ox et Oz, de conductivité γ, *de perméabilité* μ_0 *et de permittivité* ε_0, *occupant tout le demi-espace* $y < 0$ *, comme le montre la figure 1 ci-dessous .*

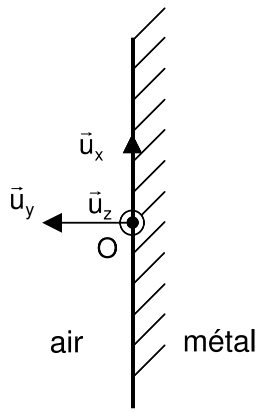


Figure 1

On envoie une OPPH (onde plane progressive harmonique) incidente, de polarisation rectiligne, notée $(\vec{E_i},\vec{B_i})$ *sur cette plaque métallique, le vecteur d'onde de l'onde incidente étant* $\vec{k_i} = -k \cdot \vec{u_y}$ (k > 0). *Le champ électrique associé à l'onde incidente a pour expression :*

$\vec{E_i} = E_0 \cos(\omega t + ky)\vec{u_x}$. *Le trièdre trirectangle Oxyz est direct, l'axe Oy est orienté vers la gauche.*

Données numériques :

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F.m^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$; $c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$.

A / REFLEXION SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

Dans toute cette partie A, la conductivité γ est supposée infinie ; le métal est alors considéré comme un conducteur parfait.

A1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charges et en l'absence de courants.

A2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide. Comment s'appelle ce type d'équation ? Quelle relation existe entre la vitesse de propagation c et les constantes ε_0 *et* μ_0 ?

A3. Traduire le fait que le champ $\overrightarrow{E_i}$ satisfait à cette équation aux dérivées partielles : quelle relation lie ω, k et c ?

A4. Quelle est l'expression du champ magnétique incident $\overrightarrow{B_i}$? Préciser son amplitude B_0. Quelle équation de propagation vérifie le champ $\overrightarrow{B_i}$?

On cherche une onde réfléchie sous la forme d'une OPPH, de polarisation rectiligne, notée ($\overrightarrow{E_r}$,$\overrightarrow{B_r}$) et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_r}$. En surface du métal (y=0) règnent une densité surfacique de charges σ et un courant surfacique $\overrightarrow{j_s}$, uniformes et non permanents.

A5. Quelles sont les unités de σ et de $\overrightarrow{j_s}$? Que valent les champs électrique et magnétique dans le métal ? Quelles sont les deux relations de passage en y = 0 *?* Quelle composante du champ électrique est toujours continue à la traversée d'une surface ?

A6. Pourquoi les ondes incidentes et réfléchies ont-elles la même fréquence ? Quelle relation lie ici $\overrightarrow{k_r}$ à $\overrightarrow{k_i}$ *?* Détailler le raisonnement.

A7. Etablir l'expression du champ $\overrightarrow{E_r}$ en tout point du plan $y = 0^+$, puis en déduire celles de $\overrightarrow{E_r}$ et de $\overrightarrow{B_r}$ en tout point du ½ espace y > 0.

A8. Que vaut le champ électromagnétique total ($\overrightarrow{E_{tot}}$,$\overrightarrow{B_{tot}}$) résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ? Quelle est sa particularité ?

A9. Quelle propriété particulière possède le plan y = 0 vis-à-vis du champ électromagnétique total ? En déduire les expressions de σ et de $\overrightarrow{j_s}$. Donner une interprétation qualitative des résultats obtenus.

A10. Quelle est l'énergie volumique associée à l'onde incidente ? Même question pour l'onde réfléchie. Comparer les résultats.

A11. Quelle puissance instantanée P_i apportée par l'onde incidente traverse une surface S orthogonale à la direction de propagation? Même question pour l'onde réfléchie (P_R). Comparer ces résultats à ceux obtenus à la question A.10. Commenter.

A12. Comparer les moyennes temporelles de P_i et de P_R ; commenter physiquement.

B / Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal.

En réalité le métal de la plaque de la figure 1 a une conductivité qui n'est pas infinie ce qui permet au champ électromagnétique de pénétrer dans le métal ; il sera noté ($\overrightarrow{E_t},\overrightarrow{B_t}$). Les résultats suivants seront admis :

en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, il vient , lorsque $k\delta << 1$, avec $k = \dfrac{\omega}{c}$,

$$\overrightarrow{E_t} = \sqrt{2}\, k\delta E_0\, e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u_x} \quad et \quad \overrightarrow{B_t} = 2\frac{E_0}{c} e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z} \ .$$

Le courant surfacique est alors nul ; dans le métal règnent une densité de courant $\vec{j}$ et une densité de charge $\rho = 0$.

Donnée numérique : $\gamma = 10^7$ S.m^{-1} .

B1. Quelle est la dimension de δ ? Que représente cette grandeur ? Application numérique : représenter la courbe $\log(\delta)$ en fonction de $\log(\omega)$ pour $1\,\mathrm{rad/s} < \omega < 10^6\,\mathrm{rad/s}$.

B2. Rappeller l'expression -en fonction de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$ - de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière et, en appliquant la loi d'Ohm locale dans le métal, évaluer sa moyenne temporelle .
En déduire la puissance moyenne totale $<P_J>$ dissipée dans la portion de cylindre d'axe Oy, de section S et délimitée par les plans y = 0 et y = - L , avec $L >> \delta$.

B3. Déterminer la puissance moyenne $<P_t>$ rayonnée par l'onde transmise à la travers la section droite d'abscisse $y = 0^-$; comparer au dernier résultat de la question B2 ; commenter en détails.
Que remarquerait-on si, la pulsation étant fixée, on faisait tendre la conductivité vers l'infini ? Commenter.

B4. Ecrire la relation de passage en y = 0 pour le champ électrique, et en déduire, pour tout y > 0 , le champ $\overrightarrow{E_r}$ de l'onde électromagnétique réfléchie, puis le champ $\overrightarrow{B_r}$.

B5. Quelle est la puissance moyenne $<P_R>$ rayonnée par l'onde réfléchie à travers une surface S orthogonale à la direction de propagation ?

B6. En limitant l'analyse aux termes de degré inférieur ou égal à 1 en $k\delta$ (ne pas oublier que $k\delta << 1$), quelle relation simple obtient-on entre les puissances moyennes rayonnées $<P_i>$ (voir question A12), $<P_R>$ (voir question B5), et $<P_t>$ (voir question B3). Commenter.

ANNEXE : RELATIONS DE « PASSAGE »

(TRAVERSÉE D'UNE DISTRIBUTION SURFACIQUE DE CHARGES ET DE COURANTS)

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma(P,t)}{\varepsilon_0} . \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(P,t) \times \vec{n}_{12} \end{cases}$$