

DS (1) : Induction et électronique analogique.

Exercice (1) : (symbole inadapté pour le générateur de COURANT continu).

- 1 - FAUX : 1 courant I continu dans B_1 crée 1 champ magnétique et donc 1 flux constant dans le solénoïde B_2 . Il n'y a donc pas de fem de FARADAY et donc pas de courant induit dans B_2 .
- 2 - FAUX : Si I augmente, le champ magnétique (dirigé dans le sens gauche-droite) dans B_2 augmente et donc le flux dans ce même sens augmente créant une force électromotrice négative responsable d'un courant dont le sens de circulation serait l'opposé du sens propre sur le dessin.
[On peut également dire simplement que le courant induit dans B_2 doit créer 1 champ magnétique s'opposant à celui qui lui a donné naissance par ses variations : LENZ]
- 3 - VRAI : Lorsque l'on éloigne B_2 de B_1 le flux de champ magnétique (gauche vers droite toujours) diminue et la fem de FARADAY est alors positive créant 1 courant dans le sens indiqué.
- 4 - FAUX : Si l'est vrai qu'en début de rotation le flux diminue et donc le courant commence par partir dans le sens positif, la rotation de B_2 induira alternativement une intensité positive puis négative etc.
- 5 - FAUX : L'inductance de la bobine (auto inductance) n'est liée qu'à sa géométrie, son rayon, sa longueur et son nombre de spire - Elle n'a pas de rapport avec l'intensité du courant qui la traverse - C'est le flux de champ magnétique qui sera proportionnel à $I \Rightarrow L = \frac{\Phi_{\text{sp}}}{I}$
- 6 - VRAI : Si u_0 est une composante continue, elle est coupée.
Ensuite si $u_1' = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{\text{spire}}}{dt}$ avec le même Φ_{spire} dans le primaire et le secondaire
ou $u_2' = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{\text{spire}}}{dt}$ (pas de fuites magnétiques)
($u_2' = e_2 = + \frac{d\Phi_2}{dt}$ en l'absence de résistance des enroulements)
alors puisque $N_2 = 2N_1 \Rightarrow u_2(t) = 2u_1 \cos(\omega t)$
($u_1 = \frac{u_1(t) - u_0}{\omega(\omega t)}$)

EXERCICE (2) : Mesure d'une inductance mutuelle M .

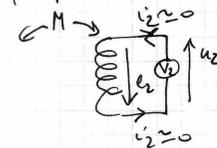
1°) Le voltmètre a une impédance interne supposée infinie ainsi aucun courant ne traverse le circuit (2).

2°) $u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$ dans le cas général (et en l'absence de résistance dans les enroulements.)

ici on aura donc :

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

(ce qui peut se développer en :



$$u_2 = -e_2 = + \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} \text{ (pas de flux propre)}$$

$$u_2 = \frac{d(M_{12}i_1)}{dt} = M_{12} \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

3°) comme $i_1(t) = i(t) = \frac{u_1(t)}{R}$

alors : $u_2(t) = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}$

S'agissant d'un modèle linéaire, si la pulsation de $e(t)$ vaut ω alors toutes les tensions et intensités instantanées sont sinusoïdales de même pulsation ω .

Si on choisit le signal $u_1(t)$ comme origine des phases, alors :

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t) \text{ et } u_2(t) = -\frac{M}{R} U_1 \omega \sin(\omega t)$$

[En vérité, les voltmètres mesurent certainement les valeurs RMS donc les tensions efficaces et non les amplitudes avec :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}} \text{ et } U_{2\text{eff}} = \frac{U_2}{\sqrt{2}} \text{ ce qui ne changera pas la relation entre } U_2 \text{ et } U_1 \text{ (valeurs-lue)}$$

soit $U_2 = \frac{M U_1 \omega}{R}$ ou $U_{2\text{eff}} = \frac{M U_{1\text{eff}} \omega}{R}$

(l'amplitude ou la valeur efficace est toujours positive !)

$$u_2(t) = -\frac{M U_1 \omega}{R} \sin(\omega t) = \frac{M U_1 \omega}{R} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

4°) A.N.

$$M = \frac{R U_2}{\omega U_1} = \frac{100 \times 5}{\omega \cdot 10^4 \times 3} = 1,33 \text{ mH}$$

5°) a) on a toujours la relation $u_2(t) = M \frac{di_1}{dt}$ ($i_1(t) = i(t)$)
 et la loi des mailles sur le circuit primaire donne:

$$e(t) = R i(t) + u_{B_1}(t) \quad \text{avec} \quad u_{B_1}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

mal puisque $i_2(t)$ négligeable.

soit: $e(t) = R i + L_1 \frac{di}{dt}$

et donc pour faire apparaître $u_2(t)$:

$$\left| \frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L_1 \frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{R}{M} u_2(t) + \frac{L_1}{M} \frac{du_2}{dt} \right|$$

b) $e(t)$ est triangulaire. (puisque en vote ① cette fois)
 $u_2(t)$ est sensiblement crêteau (avec 1 forme de "charge" rapide en début de crêteau).

→ la dérivée d'un signal triangulaire ($\frac{de}{dt}$) est donc 1 signal crêteau (en $V.s^{-1}$) d'amplitude mesurée ici: $\frac{10}{5 \cdot 10^{-3}}$
 soit $2000 V.s^{-1}$ (ou $2V/\mu s$) (pendant la demi-période positive du crêteau).

→ La solution exacte de l'équation différentielle:

$$\frac{L}{M} \frac{du_2}{dt} + \frac{R}{M} u_2(t) = \frac{de}{dt} \rightarrow \text{crêteau précédemment décrit.}$$

est donc typiquement 1 solution du type:

$$u_2(t) = K + K' e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

temps caractéristique de l'équation différentielle.

Un calcul rapide donne l'estimation: $\tau = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{100} = 0,2 \text{ ms} = 0,0002 \text{ s}$

C'est en effet ce que l'on observe approximativement sur les simulations numériques. (compté devant la demi-période).

Le signal $u_2(t)$ a donc largement le temps d'atteindre la valeur

$u_2(\infty)$ visé(e):

$$\frac{R u_2(\infty)}{M} = \text{amplitude} = 2000 V.s^{-1} \quad \text{(pour le triangulaire ascendant)}$$

$$\text{D'où: } M \approx \frac{100 \times u_2(\infty)}{2000} = \frac{u_2(\infty)}{20} \approx \frac{2,6 \cdot 10^{-2}}{20}$$

$$M \approx 1,3 \text{ mH.}$$

c) L'allure de $u_2(t)$ a été décrit dans la réponse précédente.

Expérimentalement:

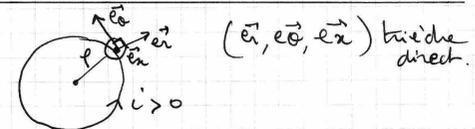
① - Le GBF n'est pas 1 générateur de tension idéal donc sa résistance de sortie de 50Ω (typiquement) induit 1 signal $e_{GBF}(t)$ légèrement déformé par l'évolution de $i(t)$ puisque: $e_{GBF} = e(t) - r_s i(t)$

et 50Ω n'est pas du tout négligeable devant 200Ω ou devant $L\omega = 20 \cdot 10^{-3} \times \frac{2\pi}{10 \cdot 10^{-3}} = 4\pi = 12,5 \Omega$!

② - La tension $u_2(t)$ évolue de façon "sensiblement" crêteau de -26 mV à $+26 \text{ mV}$: c'est une valeur particulièrement faible: risque de superposition de "bruit" presque du même ordre de grandeur.

EXERCICE ③: Impédance "mécanique" d'un Haut Parleur.

$$\vec{B} = B \vec{e}_r$$



Bobine assimilable à (R, L) .

1°) Suprême: bobine + membranes

Ref: tenette suppose galiléen.

Forces subies: $\left(\begin{array}{l} \vec{P} \text{ pesanteur} \\ \vec{R} \text{ réaction du support} \end{array} \right)$ tels que $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.

$\vec{F}_{\text{laplace}} = \vec{F}_L$: Résultant des actions de Laplace sur le système.

$\vec{F} = -f \vec{v}$: force de frottement fluide (visqueuse)

$\vec{F}_2 = -kx \vec{e}_r$: force de rappel du ressort. (due à l'air autour de la membrane).

Il subsiste donc dans le PFD:

$$m \frac{d^2 \vec{e}_z}{dt^2} = \vec{F}_{\text{laplace}} + \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ressort}}$$

$$= \vec{F}_{\text{laplace}} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{ressort}}$$

masse du système (bobine + membrane)
 (inertie à la translation)

La force de Laplace s'exerce sur le bobinage de N spires placés dans le champ magnétique radial \vec{B} et parcouru par I courant d'intensité $i(t)$

s'écrit par définition:
$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} d\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} i(t) \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

avec $d\vec{l} = \rho d\theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_r$
rayon d'1 spire.

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} i(t) \cdot \rho d\theta \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_r = -l i(t) B \vec{e}_z \int_0^{2\pi} d\theta$$

ainsi:
$$\vec{F}_L = -B \underbrace{(2\pi N \rho)}_{\text{longueur de fil bobine}} i(t) \vec{e}_z$$

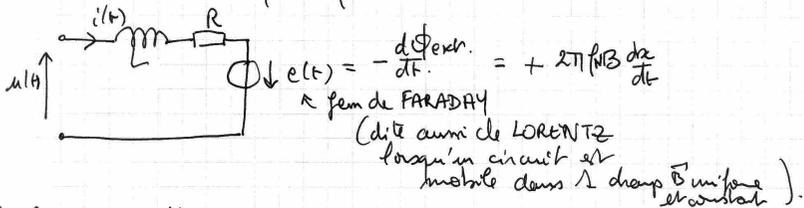
Soit en projetant le PFD sur \vec{e}_z :

$$m \ddot{x} = -B 2\pi N \rho i(t) - kx - f \dot{x} \quad (\text{eq "Méca"})$$

ou bien:
$$m \ddot{x} + f \dot{x} + kx = -B 2\pi N \rho i(t).$$

On remarque que cette équation n'est pas "purement mécanique".

2°) Le modèle électrique équivalent à notre situation est:



$e(t) = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = +2\pi N \rho B \frac{dx}{dt}$
 fem de FARADAY
 (dit aussi de LORENTZ lorsqu'un circuit est mobile dans 1 champ B uniforme et constant).

La loi des mailles conduit alors à l'égalité:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri - e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt}$$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri - (2\pi N \rho) B \dot{x} \quad (\text{eq "Elec"})$$

3°) Tous les grandeurs physiques sont des fonctions harmoniques du temps

donc $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi_x) \Leftrightarrow \underline{x} = X_0 e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}$

$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \Leftrightarrow \underline{i} = I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$
amplitude complexe.

(choisissons i comme origine des phases $\Rightarrow \underline{\varphi}_i = 0$)

L'ensemble des deux équations différentielles peut donc s'écrire:

⊕ eq "Méca" complexe:

$$\textcircled{1} \quad -m X_0 \omega^2 + f j \omega X_0 + k X_0 = -B 2\pi N \rho I_0 e^{-j\varphi_x}$$

⊕ eq "Elec" complexe:

$$\textcircled{2} \quad U_0 e^{j\varphi_u} = jL\omega I_0 + R I_0 - 2\pi N \rho B j \omega X_0 e^{j\varphi_x}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow X_0 e^{j\varphi_x} = \frac{-B 2\pi N \rho I_0}{-m\omega^2 + j\omega f + k}$$

or donc $\textcircled{2} \Rightarrow U_0 e^{j\varphi_u} = jL\omega I_0 + R I_0 + \frac{j(2\pi N \rho B)^2 \omega I_0}{(k - m\omega^2) + j\omega f}$

Par définition: $\underline{z} \equiv \frac{U}{I} = \frac{U_0 e^{j\varphi_u}}{I_0}$

d'où:

$$\underline{z} = jL\omega + R + \frac{j(2\pi N \rho B)^2 \omega}{(k - m\omega^2) + j\omega f}$$

4°) L'association parallèle de caractéristiques motrices donnerait avec L_m , C_m et R_m :

$$\underline{z}_{\text{eqm}} \equiv \frac{1}{Y_{\text{eqm}}} = \frac{1}{\frac{1}{jL_m \omega} + jC_m \omega + \frac{1}{R_m}}$$

[additivité des admittances en //].

soit
$$\underline{z}_{\text{eqm}} = \frac{jL_m \omega R_m}{R_m - L_m C_m R_m \omega^2 + jL_m \omega}$$

$$\underline{z}_{\text{eqm}} = \frac{jL_m \omega}{1 - L_m C_m \omega^2 + j\frac{L_m}{R_m} \omega}$$

à comparer à

$$\underline{z}_{\text{mot}} = \frac{\frac{(2\pi N \rho B)^2}{k} x j \omega}{1 - \frac{m}{k} \omega^2 + j\omega \left(\frac{f}{k}\right)}$$

A. Etude d'un circuit électrique :

1. Le passage de la notation réelle à la notation complexe donne :

$$\underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$$

et

$$\underline{i}(t) = I\sqrt{2}e^{j(\omega t + \psi)}$$

2. On doit calculer la valeur efficace de $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ soit

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt}$$

En utilisant la relation entre la période T et la pulsation ω à savoir $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on en déduit

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \left(\frac{T}{2} + 0 \right)} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

On a donc bien la relation proposée avec

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On mesure une tension efficace à l'aide d'un multimètre en mode alternatif.

3. Les impédances complexes de la bobine, du résistor et du condensateur sont respectivement

$$\underline{Z}_L = r + jL\omega$$

$$\underline{Z}_R = R$$

et

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

4. A hautes fréquences, la pulsation ω tend vers l'infini donc le module de l'impédance complexe de la bobine tend vers l'infini, ce qui impose au courant qui la parcourt d'être nul pour que la tension à ses bornes reste finie. La bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

Pour le condensateur, le module de l'impédance tend vers 0 ainsi que la tension à ses bornes. Il se comporte comme un fil.

A basses fréquences, la pulsation tend vers 0 donc le module de l'impédance de la bobine tend vers r : on a le comportement d'une résistance.

Quant au condensateur, le module de l'impédance tend vers l'infini, ce qui impose au courant qui le parcourt d'être nul : le comportement est celui d'un interrupteur ouvert.

Enfin pour le résistor, il n'y a aucune dépendance avec la fréquence.

De cette étude, on déduit que la tension $u_c(t)$ est nulle à hautes fréquences et vaut $e(t)$ à basses fréquences puisque la nullité du courant impose l'absence de différence de potentiel.

5. Aux bornes du condensateur, la tension complexe s'écrit en appliquant la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + R_g} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + j(R + r + R_g)C\omega}$$

qu'on peut écrire sous la forme $\frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$.

Par identification, on a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$A = \underline{e}$$

Par ailleurs, on détermine Q par l'égalité $(R + r + R_g)C = \frac{1}{Q\omega_0}$ soit

$$Q = \frac{1}{R + r + R_g} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

6. En prenant le module de \underline{U}_c et en divisant par $\sqrt{2}$ pour obtenir la valeur efficace, on obtient

$$U_{ce} = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

7. En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on en déduit $U_{ce} = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$.

Pour établir le passage par un maximum, on étudie la fonction

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

dont la dérivée est

$$f'(x) = 2x \left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2 \right)$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ ainsi que pour x tel que $2x^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$ si $2 - \frac{1}{Q^2} > 0$

soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur de x correspondante est $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. On note que la dérivée est positive pour $x > x_r$ et négative pour $0 < x < x_r$. Par conséquent, on a un minimum de f en x_r et comme la fonction inverse de la racine carrée est strictement décroissante, on en déduit que U_{ce} passe par un maximum pour

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

si

$$Q > Q_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

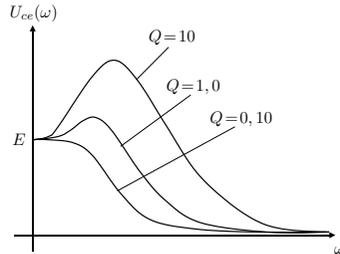
On en déduit la pulsation de résonance aux bornes du condensateur

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

8. En reportant la valeur $\omega = \omega_0$ dans l'expression de U_{ce} , on obtient

$$U_{ce}(\omega_0) = \frac{E}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = QE$$

9. On en déduit l'allure de $U_{ce}(\omega)$ pour $Q = 0, 1, 10$ et $Q = 10$:



10. L'impédance complexe du circuit est $\underline{Z} = R_g + R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$.

On peut l'écrire sous la forme

$$\underline{Z} = R_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

avec

$$R_0 = R_g + R + r$$

11. L'intensité complexe s'écrit $\underline{I} = \frac{e}{\underline{Z}} = \frac{e}{R_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}$.

12. L'intensité efficace est $I_e = \frac{E}{R_0 \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$. On en déduit $A' = \frac{E}{R_0}$ et $B = Q$.

Pour la nécessité d'une autre série de mesures, deux possibilités de réponse suivant ce qu'on suppose être la réponse attendue :

- soit on se dit que l'image du courant est donnée par la tension aux bornes du résistor et il est nécessaire d'inverser la position du condensateur et du résistor pour effectuer la mesure de la valeur efficace au multimètre (expérimentalement la bande passante usuelle des multimètres de l'ordre de quelques dizaines de kHz peut rendre la mesure difficile, il est souvent préférable d'utiliser l'oscilloscope dont la bande passante dépasse usuellement le MHz et les oscilloscopes actuels fournissent la valeur efficace dans les menus de mesure),
- soit on part du principe que l'intensité est égale à la dérivée de la tension u_c au facteur C près et il suffit alors de multiplier U_{ce} par ω pour déduire des mesures des valeurs efficaces de u_c la courbe $I_e(\omega)$.

13. Pour montrer que $I_e(\omega)$ passe par un maximum et ainsi prouver le phénomène de résonance en intensité, on peut étudier les variations de la fonction de ω définie par $I_e(\omega)$ ou celles de

$f(\omega) = 1 + Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$. Pour ce faire, on peut envisager de calculer la dérivée ou bien remarquer que pour toute valeur de ω , $f(\omega) \geq 1$ et qu'on a le cas d'égalité pour $\omega = \omega_0$. On en déduit que $f(\omega)$ passe par un minimum pour $\omega = \omega_r = \omega_0$. Comme la fonction racine carrée est strictement croissante et la fonction inverse strictement décroissante, la fonction $\frac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$ présente les variations inverses à savoir qu'elle passe par un maximum en ω_r .

Comme $I_e(\omega) = \frac{A'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{A'}{\sqrt{f(\omega)}}$, on a ainsi prouvé l'existence de la résonance en intensité pour ω_r .

Le maximum obtenu est $I_{max} = I_e(\omega_r) = A' = \frac{E}{R_0}$.

14. On détermine la bande passante dont la définition est rappelée dans l'énoncé en résolvant

$$\frac{A'}{1 + B^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \geq \frac{A'}{\sqrt{2}} \text{ soit}$$

$$1 + B^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \leq 2$$

qu'on peut écrire

$$(Q\omega^2 - \omega_0\omega - Q\omega_0^2)(Q\omega^2 + \omega_0\omega - Q\omega_0^2) \leq 0$$

en utilisant le fait que $B = Q$.

L'étude du signe de la première parenthèse conduit à résoudre l'équation $Q\omega^2 - \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$ pour en obtenir les racines. Son discriminant vaut $\Delta = \omega_0^2 + 4Q^2\omega_0^2 > 0$ et les racines sont $\omega_1 = \omega_0 \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} > 0$ et $\omega'_1 = \omega_0 \frac{1 - \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < 0$. La valeur prise par le trinôme pour $\omega = 0$, valeur comprise entre les deux racines du trinôme, est $-Q\omega_0^2 < 0$: le trinôme est donc négatif entre les racines soit en tenant compte du fait que les pulsations sont toujours positives pour $\omega \leq \omega_1$.

L'étude du signe de la deuxième parenthèse conduit à résoudre l'équation $Q\omega^2 + \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$ pour en obtenir les racines. Son discriminant vaut $\Delta = \omega_0^2 + 4Q^2\omega_0^2 > 0$ et les racines sont $\omega_2 = \omega_0 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} > 0$ et $\omega'_2 = \omega_0 \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < 0$. La valeur prise par le trinôme pour $\omega = 0$, valeur comprise entre les deux racines du trinôme, est $-Q\omega_0^2 < 0$: le trinôme est donc négatif entre les racines soit en tenant compte du fait que les pulsations sont toujours positives pour $\omega \leq \omega_2$.

Le produit des deux parenthèses est donc négatif entre ω_2 et ω_1 (en remarquant que $\omega_2 < \omega_1$). Par conséquent, la bande passante est donnée par

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$$

15. La courbe (1) en traits pleins correspond à U_{ce} tandis que la courbe (2) en traits pointillés mixtes donne l'évolution de l'intensité I . On peut le justifier soit par l'étude des limites à basses fréquences : l'intensité s'annule aux basses fréquences, ce qui n'est pas le cas de U_{ce} soit par la fréquence de résonance qui est plus faible pour U_{ce} que pour I d'après la question 7.

16. A basses fréquences $U_{ce} = E$ soit

$$E = 5,0 \text{ V}$$

La fréquence propre est obtenue à la résonance en intensité donc f_0 est lue au maximum de la courbe (2) soit

$$f_0 = 1,6 \text{ kHz}$$

On lit

$$I_{max} = 9,0 \text{ mA}$$

On en déduit que $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 6,4 \text{ mA}$ et les fréquences pour lesquelles on a cette valeur de l'intensité sont

$$f_1 = 2,1 \text{ kHz et } f_2 = 1,2 \text{ kHz}$$

donc une bande passante $\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{f_0}{Q}$ et un facteur de qualité

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1,8$$

17. La pulsation propre s'exprime par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 0,10 \text{ H}$$

Par ailleurs, l'expression du facteur de qualité $Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}$ conduit à $R_0 = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = 553 \Omega$. Or $R_0 = R_g + r + R$ donc

$$r = R_0 - R_g - R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - R = 23 \Omega$$

18. Le déphasage ψ s'obtient par $\psi = \text{Arg}(\underline{i}) - \text{Arg}(\underline{e}) = -\text{Arg}\underline{Z} = -\psi'$ avec $\tan \psi' = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ et $\cos \psi'$ du signe de la partie réelle de \underline{Z} soit 1 donc positif. On en déduit que $\psi' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ et $\psi' = \text{Arctan} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$ donc

$$\psi = -\text{Arctan} \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

Pour $\omega = \omega_0$, on a

$$\psi(\omega_0) = 0$$

De même, on a $\varphi' = \text{Arg}(\underline{u_C}) - \text{Arg}(\underline{e}) = -\varphi$ avec $\tan \varphi = \frac{Q\omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ et $\cos \varphi$ du signe

de $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ soit positif pour $\omega < \omega_0$ et négatif pour $\omega > \omega_0$. On en déduit

$$\varphi' = \begin{cases} -\text{Arctan} \frac{Q\omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} & \text{pour } \omega < \omega_0 \\ -\pi - \text{Arctan} \frac{Q\omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

En cherchant les limites de l'une ou l'autre des expressions, on obtient

$$\varphi'(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

19. Pour accéder à l'intensité à l'oscilloscope, on doit placer la résistance R à la place du condensateur de capacité C de manière à ce que les masses de l'oscilloscope et du générateur soient communes.

20. La tension aux bornes de la résistance R est $U_R = Ri$. On obtient par conséquent le même comportement pour U_R que pour l'intensité et notamment on observe un phénomène de résonance expliquant l'existence du maximum de la voie Y .

21. On est à la pulsation $\omega = \omega_0$ soit à la pulsation de résonance en intensité. A cette pulsation, on n'a donc pas de déphasage entre la tension du générateur et celle aux bornes de la résistance : l'oscillogramme (a) correspond à observer la tension aux bornes de la résistance sur la voie Y . On en déduit que l'oscillogramme (b) correspond à observer la tension aux bornes du condensateur sur la voie Y .

Une autre solution consiste à remarquer que le maximum pour la voie Y est plus grand pour l'oscillogramme (b) et que le plus grand maximum est obtenu aux bornes du condensateur. Cela concorde avec le résultat précédent.

22. A la pulsation ω_0 , on est à la résonance en intensité donc l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance vaut $U_{R,max} = \frac{RE}{R_0}$ donc $R_0 = \frac{RE}{U_{R,max}}$.

Or on lit sur les oscillogrammes $E\sqrt{2} = 5,8 \text{ V}$, $U_{R,max}\sqrt{2} = 4,8 \text{ V}$ et $R = 480 \Omega$. On en déduit $R_0 = 580 \Omega$ et

$$r' = R_0 - R - R_g = \frac{RE}{U_{R,max}} - R - R_g = 50 \Omega$$

On a établi à la question 8 que $U_{cc} = QE$ avec $U_{cc}\sqrt{2} = 20 \text{ V}$ donc le facteur de qualité vaut $Q = \frac{U_{cc}}{E} = 3,45$.

Comme le facteur de qualité peut s'écrire $Q = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}$, on a

$$L' = CQ^2 R_0^2 = 0,40 \text{ H}$$

Une autre manière d'obtenir la valeur de L' consiste à partir de l'expression de la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C}} = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ dont on déduit

$$L' = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = 0,40 \text{ H}$$

car $T_0 = 1,25 \text{ ms}$.

23. La tension E étant continue, le régime permanent est un régime continu. Par conséquent, les dérivées temporelles sont nulles. On en déduit que

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 0$$

et

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0$$

On en déduit que

$$u_R = Ri = 0$$

et par une loi des mailles que $e - R_g i = u_L + u_C + u_R$ soit avec $e = E$, $i = 0$, $u_L = 0$ et $u_R = 0$, on a

$$u_C = E$$

24. En appliquant la loi des mailles au circuit $u_c + Ri + L \frac{di}{dt} + ri = 0$ soit avec $i = C \frac{du_c}{dt}$

$$u_c + (R+r)C \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R+r}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

ou

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q'} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

Par identification, on obtient

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et $\frac{R+r}{L} = \frac{\omega_0}{Q'} = \frac{1}{Q' \sqrt{LC}}$ soit

$$Q' = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

25. L'intensité traversant une inductance et la tension aux bornes d'une capacité sont continues. Compte tenu de l'énoncé, on peut supposer que la réponse attendue est la continuité de l'intensité dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur. On en déduit que $u_c(0) = E$ par continuité aux bornes de la capacité. Par ailleurs, comme $i(0) = 0$ et qu'on a la relation $i = C \frac{du_c}{dt}$, on a $\frac{du_c}{dt}(0) = 0$.

26. La résolution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants implique de résoudre l'équation caractéristique $\alpha^2 + \frac{R+r}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{R+r}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}$. On a un régime pseudo-périodique si ce discriminant est négatif soit $R+r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} - r$$

27. Dans ce cas, on a $\alpha = -\frac{R+r}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R+r}{2L}\right)^2}$ soit en posant

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R+r}{2L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q'}\right)^2}$$

et

$$\lambda = \frac{R+r}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q'}$$

on a une solution sous la forme $u_c = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$.

On en déduit $\frac{du_c}{dt} = e^{-\lambda t} ((-\lambda A + B\omega) \cos(\omega t) - (\lambda B + \omega A) \sin(\omega t))$.

L'utilisation des conditions initiales conduit à $u_c(0) = E = A$ et $\frac{du_c}{dt}(0) = 0 = -\lambda A + B\omega$ donc

$$A = E$$

et

$$B = \frac{\lambda E}{\omega}$$

28. La pseudo-période vaut

$$T = 1,29 - 0,65 = 0,64 \text{ ms}$$

On en déduit la pseudo-pulsation

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 9,8 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

En supposant que u_1 et u_2 désignent les amplitudes de U_c des points S_1 et S_2 respectivement, on peut calculer $\delta = \ln(e^{\lambda T}) = \lambda T$ donc

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q'}$$

On en déduit

$$Q' = \frac{\omega_0 T}{2\delta}$$

Par ailleurs, on a $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q'^2}}}$ et $Q' = \frac{2\omega_0 \pi}{2\delta \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q'^2}}}$

$$\text{soit } \delta = \frac{\pi}{Q' \sqrt{1 - \frac{1}{4Q'^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q'^2 - 1}}$$

On en déduit $\delta^2 = \frac{4\pi^2}{4Q'^2 - 1}$ et

$$Q' = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}} = 2,5$$

Enfin par la relation $\omega_0 = \frac{2Q'\delta}{T}$, on a

$$\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

29. En principe, il faut $Q' \gg 1$ mais la présence du facteur 4 permet que le résultat soit encore valable ici.

30. On peut se demander pourquoi on repose la question d'estimer Q' , ce qui a déjà été fait à la question 28.

On détermine la valeur de L par la relation

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,10 \text{ H}$$