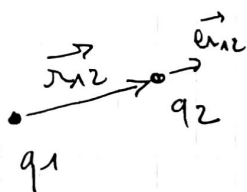


CORRIGÉ DS 9 : ELECTROMAGNÉTISME

PROBLÈME (1) : Gravitation et Pesanteur.

Partie (I). A) Champ de gravitation terrestre

I.A) 1)



Interaction coulombienne : $\vec{F}_{1/2}^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$

ou bien : $\vec{F}_{1/2}^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$

Par définition du champ $\vec{E}_{1/2} = \vec{E}$ champ électrique résultant en (2) et créé par la charge q_1 : $\vec{E} = \vec{E}_{1/2} \equiv \frac{\vec{F}_{1/2}^e}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(r_{12})^2} \vec{e}_{12}$

et donc de façon générale avec q placé à l'origine du repère

$$\left[\vec{E}(M) \right]_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}$$

- 2) "Énoncé" : Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée vaut la charge intérieure au volume englobé par cette surface divisée par la permittivité du vide.

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = \frac{Q_{\text{int}}(V)}{\epsilon_0}$$

3) $\vec{F}_{1/2}^g = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$ (avec les mêmes notations qu'en I.A.1)

et donc : $\vec{G} = -\frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} = -\frac{\gamma m}{r^2} \vec{e}$

so le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle m placée à l'origine O du repère.

4)

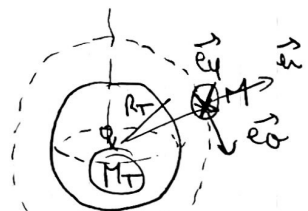
électrostatique (Coulombs)		gravitation (NEWTON)
q	$\longleftrightarrow$	m
$\frac{q}{F_{1/2}}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{m}{F_{1/2}^g}$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\longleftrightarrow$	$-\gamma$
$\vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{G}$
$\vec{E} = -\text{grad } V$	$\longleftrightarrow$	$\vec{G} = -\text{grad } \phi$
$E_p(q) = q'V + \text{cte}$	$\longleftrightarrow$	$E_p(m') = m'\phi + \text{cte}$

Th de "Gauss" gravitationnel

$$\oint_{S(V)} \vec{G} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = -4\pi\gamma M_{\text{int}}(V)$$

↑ potentiel de gravitation.

I. A. 5) a)



⊗ $r > R_T$:

On applique Gauss gravitationnel

$$\oint_{S(r)} \vec{G}_T \cdot d\vec{S}_{\text{sphère}} = -4\pi\gamma M_T$$

↑
contient le
globe terrestre et
intérieur à
ma surface d'intégration

↑
sphère d'intégration
du flux
de rayon $r > R_T$

$$\rho_T = \frac{dm}{dV} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

Invariances et symétries :

→ situation du point M
invariante par modification de θ et φ
→ dépendance seulement à r

→ Tout plan contenant $\vec{OM}$ est 1 plan de symétrie
de la distribution des masses
(en particulier les deux plans : $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
 $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$)

→
donc $\vec{G}_T(M)$ doit appartenir à ces plans car, d'après
le principe de Curie, il s'agit aussi de plans
de symétrie des effets (ici $\vec{G}_T$ qui est 1 champ
vecteur polaire)

Ainsi : $\vec{G}_T = G_T(r) \vec{e}_r$

les vecteurs surface sphère s'écrivent : $d\vec{S}_{\text{sphère}} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$
(de la sphère)

$$\begin{aligned} \text{ainsi : } \oint_{S(r)} \vec{G}_T \cdot d\vec{S}_{\text{sphère}} &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} G_T(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta d\theta \right) \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \right) \times G_T(r) \times r^2 \\ &= 4\pi r^2 G_T(r) \end{aligned}$$

devant égaux $-4\pi\gamma M_T$

ainsi : $G_T(r) = -\frac{\gamma M_T}{r^2}$

⊗ $r < R_T$

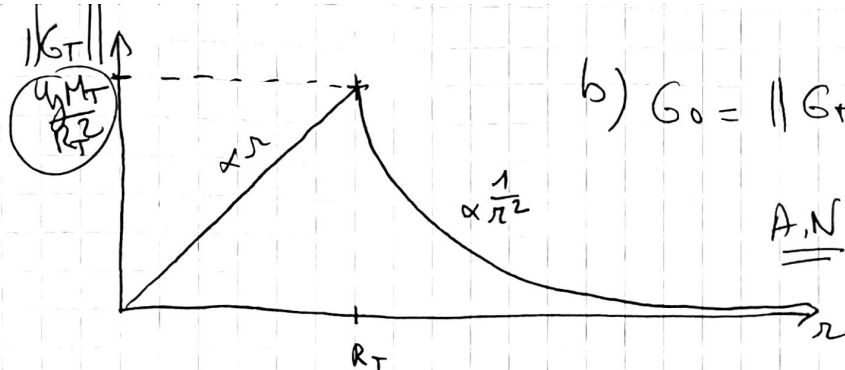
$$4\pi r^2 G_T(r) = -4\pi\gamma M_{\text{int}}(r)$$

$$r^2 G_T(r) = -\gamma \rho_T \times \frac{4}{3}\pi r^3 = -\gamma \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r^2 G_T(r) = -\gamma \frac{M_T r^3}{R_T^3}$$

ou enfin : $G_T(r) = -\gamma \frac{M_T r}{R_T^3}$

On remarque au passage la continuité de $G_T(r)$ en $r = R_T$.



$$b) G_0 = \|G_T(R_T)\| = \frac{u_g M_T}{R_T^2}$$

$$\underline{A.N.}: G_0 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,38 \cdot 10^6)^2}$$

attention!
(distances en m!)

$$\underline{A.N.}: G_0 = 0,980 \times 10^1 = 9,80 \frac{\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

- c) Si la masse n'est pas uniformément répartie mais tant que la symétrie sphérique de la distribution des masses est préservée alors seule la masse intérieure totale de la sphère intervient dans l'obtention de $G_T(R_T)$. Ainsi ce champ de gravitation à la surface est inchangé. $G_T(R_T) = G_0 = \frac{u_g M_T}{R_T^2}$.

- d) Le noyau est la partie comprise entre 0 et R_1 dans le modèle proposé: on obtient un champ gravitationnel proportionnel à $r < R_1$ qui correspondrait en effet à une modélisation de masse volumique uniforme.

Rq: on peut aussi utiliser $\text{div } \vec{G}_T = -4\pi u_g \rho(r)$.
(Gauss gravitationnel local)

en symétrie sphérique:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r}$$

donc si $\rho(r) = \rho_0$ alors

$$-4\pi u_g \rho_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 G_T(r))}{\partial r}$$

$$r^2 G_T(r) = -4\pi u_g \rho_0 \frac{r^3}{3} + \frac{C}{r^2}$$

$$\Rightarrow G_T(r) \propto \frac{r}{3}$$

L'obtention ρ_0 dans le noyau:

$$G_0 = \frac{u_g M_N}{(R_1)^2} \quad (\text{par analogie avec le calcul I.A.5.b}).$$

$$\text{avec } M_N = \rho_0 \times \frac{4}{3} \pi (R_1)^3 \quad \text{donne: } G_0 = \frac{u_g M_N}{R_1^2} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi \frac{R_1^3}{R_1^2} u_g$$

$$\text{soit: } \rho_0 = \frac{3 G_0}{4 \pi R_1 u_g}$$

ou encore en fonction des données de l'énoncé:

$$\rho_0 = \frac{3}{4 \pi R_1 u_g} \times \frac{u_g M_T}{(R_T)^2} = \frac{3 M_T}{4 \pi R_1 (R_T)^2} \approx 10 \text{ tonnes/m}^3$$

c) Si le champ de gravitation ne varie pas avec r alors le calcul de la divergence donne :

$$\operatorname{div}(-G_0 \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 G_0)}{\partial r} = \frac{-2G_0}{r} = -4\pi\gamma \rho(r)$$

$$\text{soit : } \rho(r) = \frac{G_0}{2\pi\gamma r} = \frac{M_T}{2\pi R_T^2 r} \quad \text{décroissante de } r$$

I. B) le champ de pesanteur terrestre.

1) Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont vérifiées. À commencer par le principe de l'inertie qui les définit :

"Dans 1 référentiel galiléen, tout système isolé (ou pseudo-isolé : $\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{cases}$) aura 1 mouvement tel que son centre de masse sera en translation rectiligne uniforme."

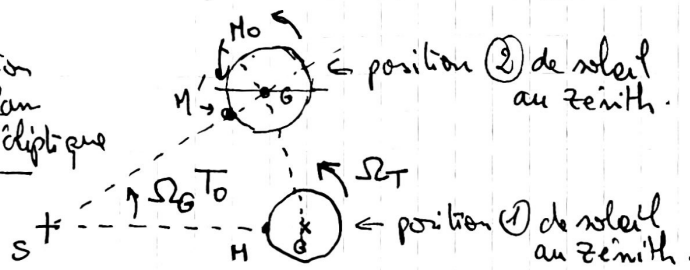
→ le référentiel géocentrique est associé à 1 repère ayant pour origine le centre de masse du globe terrestre et des axes fixes dans le référentiel héliocentrique ("vivant des étoiles fixes"). C'est-à-dire qu'il s'agit d'un observateur "fictif" placé au centre de la terre mais ne tournant pas avec elle lors de sa révolution quotidienne autour de l'axe des pôles.

→ Un référentiel terrestre au contraire correspond à 1 observateur fixe à la surface du globe à 1 latitude donnée. Il tourne donc dans le référentiel géocentrique.

(Rq) : le référentiel géocentrique est souvent approximé galiléen mais dans ce cas le référentiel terrestre ne peut l'être car leur mouvement relatif est 1 mouvement de rotation sensiblement uniforme autour de l'axe des pôles.

2°) C'est la translation circulaire annuelle de la terre dans sa course autour du soleil dans le plan de l'écliptique qui est responsable de cette différence.

Projection
⊥ au plan
de l'écliptique



(échelles non respectées !)

en T_0 on a déposé
la durée T du jour
sidéral qui correspondait
à la position finale H_0

C'est la période
de rotation de la terre
autour de son axe des pôles

$$\Rightarrow \Omega_T \times T = 2\pi.$$

Sur la durée T_0 , l'angle parcouru dépasse 2π de $\Omega_G T_0$, soit :

$$\Omega_T T_0 = 2\pi + \Omega_G T_0 = \Omega_T T + \Omega_G T_0$$

$$\text{ou : } \Omega_T (T_0 - T) = \Omega_G T_0.$$

$$T_0 - T = \frac{\Omega_G}{\Omega_T} T_0 \approx \frac{1}{365} \times 24 \text{ heures.}$$

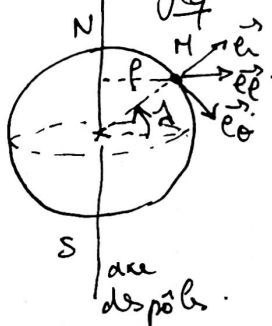
$$T_0 - T \approx 4 \text{ minutes.}$$

I.B.3] Dans le référentiel terrestre on doit tenir compte de la
force d'inertie centrifuge (donnée en ANNEXE) dans la force
de pesanteur pour "faire comme si" le référentiel terrestre
était galiléen ! (en fait il y aurait évidemment d'autres
corrections !)

En posant ceci on a :

$$\vec{g} = G_T(R_T) \vec{e}_r + \frac{\vec{F}_{ic}}{m} = G_T(R_T) \vec{e}_r + \Omega^2 \rho \vec{e}_\rho$$

(distance
à l'axe
des pôles.)



$$\text{avec donc : } \rho = R_T \cos \lambda.$$

$$\vec{g} = G_T(R_T) \vec{e}_r + \Omega^2 R_T \cos \lambda \vec{e}_\rho.$$

$$\text{soit en utilisant : } \vec{e}_\rho = \cos \lambda \vec{e}_r + \sin \lambda \vec{e}_\theta$$

$$\vec{g} = (G_T(R_T) + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) \vec{e}_r + (\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda) \vec{e}_\theta.$$

Verticale
NON
radiale !

Exprimons la
norme de $\vec{g}$:

$$\sqrt{(G_0 + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda)^2 + (\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda)^2} \equiv g$$

$$- \frac{4\pi}{R_T^2}$$

$$\text{I.B.4] } \lambda = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \lambda = 0 \Rightarrow g = G_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow g = G_0 - \Omega^2 R_T = 9.8 - 0.034$$

(équateur). (lambda=0)

$$\text{enfin max } \approx \frac{9.034}{9.8} = 0.921\%$$

$$\text{I.B.5] } g=0 \text{ si } \Omega^* = \sqrt{\frac{G_0}{R_T}} = \sqrt{\frac{4\pi}{R_T^3}} \approx 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$\text{soit la période } T^* = \frac{2\pi}{\Omega^*} \approx 1.4 \text{ h (contre journée !).}$$

EXERCICE ① : Règle de PENNING. ATTENTION!

Partie I : (A) - la force de LORENTZ s'exerçant sur l'électron se limite à : $\vec{F} = (-q)(\vec{v} \wedge \vec{B})$ (autres forces négligées)

Elle est donc perpendiculaire à $\vec{B}$ et donc à $\vec{e}_z$.

Aucune composante de force sur $\vec{e}_z \Rightarrow$ aucune accélération.

La particule gardera donc sa composante de vitesse v_{0z} inchangée.

et $z(t) = v_{0z} t$ (e- à l'origine à $t=0$).

(B) - 1) le PFD appliqué à l'électron donne dans les directions Ox et Oy :

$$\begin{cases} m \dot{v}_x = -q v_y B \\ m \dot{v}_y = +q v_x B \end{cases}$$

$$\text{car } \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_e v_y \\ \dot{v}_y = +\omega_e v_x \end{cases}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{vmatrix} \quad \forall t.$$

soit en découplant par dérivation supplémentaire :

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = -\omega_e \dot{v}_y = -\omega_e^2 v_x \\ \ddot{v}_y = -\omega_e \dot{v}_x = -\omega_e^2 v_y \end{cases}$$

Ces deux vitesses (composantes) sont donc des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation $\omega_e = \frac{qB}{m_e}$. Avec les conditions initiales

$$\text{on aura : } \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \cos(\omega_e t) \\ v_y(t) = \frac{v_{0x}}{-\omega_e} = +v_{0x} \sin(\omega_e t) \end{cases}$$

(B) - 2) Par intégration et en rappelant que $x(0) = y(0) = 0$

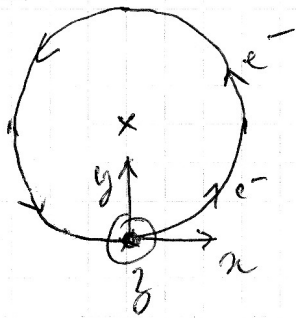
$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_e} \sin(\omega_e t) = \frac{v_{0x}}{\omega_e} \times \sin(\omega_e t) \\ y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega_e} \cos(\omega_e t) + \frac{v_{0x}}{\omega_e} = \frac{v_{0x}}{\omega_e} [-\cos(\omega_e t) + 1] \end{cases}$$

(B) - 3) Notons $r_H = \frac{v_{0x}}{\omega_e}$

$$\frac{x^2}{r_H^2} + \frac{(y - r_H)^2}{r_H^2} = 1$$

équation cartésienne d'un cercle de rayon r_H centré en $H(0, +r_H)$

En a naturellement (par définition) : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$

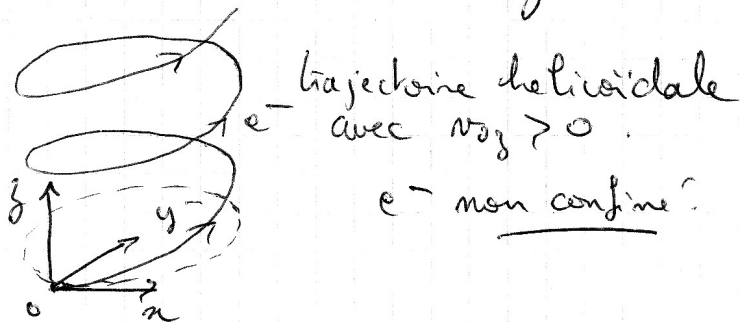


$$I \odot - f_c = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,0}{2\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31}}$$

$$f_c = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

ou 28 GHz

I. B) la trajectoire précédente n'est que la projection sur le plan x, y . On ajoute donc 1 translation rectiligne uniforme dans la direction z .



II] A) $U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1(x^2 + y^2) + \alpha_2 z^2$

$$U(r, z) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2 \quad [r \text{ des cylindriques}]$$

A.1) le potentiel doit satisfaire à l'équation de LAPLACE dans 1 zone "vide de charge": $\Delta U = 0$

soit en cartésiennes: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2\alpha_1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2\alpha_1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= 2\alpha_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{laplace}} \begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 &= -2\alpha_1 \end{aligned}$$

A.3) le potentiel des électrodes E_{A1} et E_{A2} est nul donc

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 (2z_0^2 - 2z_0^2) - 2\alpha_1 z_0^2$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_0 - 2\alpha_1 z_0^2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\alpha_0}{2z_0^2}$$

le potentiel de l'électrode latérale est $V_0 > 0$ donc:

$$0 < V_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2z_0^2} (r_0^2 + 2z^2) - 2 \frac{\alpha_0}{2z_0^2} z^2$$

Admisi: $0 < V_0 = \alpha_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{2z_0^2} \right) = \alpha_0 \left(\frac{4d^2}{2z_0^2} \right) = \alpha_0 \frac{2d^2}{z_0^2}$

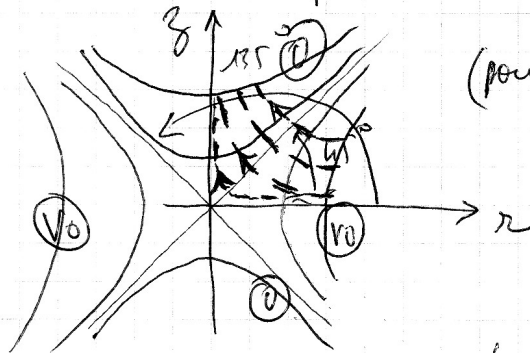
de telle façon que: $\alpha_0 = \frac{V_0 z_0^2}{2d^2}$

ou $U(r, z) = \frac{V_0 z_0^2}{2d^2} \left(1 + \frac{r^2}{2z_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} \right)$

ou bien $U(r, z) = \frac{V_0 z_0^2}{2d^2} + \frac{V_0}{4d^2} [r^2 - 2z^2]$

Seul potentiel compatible avec l'équation de Laplace et les conditions aux limites spatiales (de type DIRICHLET) données par les électrodes à potentiel uniforme.

II. A.4]



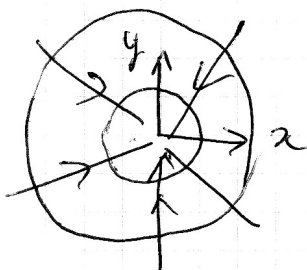
(pour $r = \pm \sqrt{2}z \Rightarrow U(r, z) = U(0, 0) = \frac{V_0 z_0^2}{2d^2}$)

angles de $\pm \frac{\pi}{4}$ ou $\pm \frac{3\pi}{4}$

les lignes de Champ $\vec{E}$ (en pointillés) sont toujours $\perp$ aux équipotentiels (sens de V_0 vers 0).

II. A.5] Plan (xoy)

équipotentiels $\Rightarrow r^2 = 2z^2 + Cte$
 $\uparrow$ dépendant de l'équipotentielle



$\rightarrow$ plan contenant l'origine $\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow$ lignes de champ radiales semblant se rejoindre en O où le champ $\vec{E}$ est donc nul.

II. A.6] En électrostatique: $\vec{E} = -\text{grad } V = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} / \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{V_0 x}{2d^2} \\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ E_z = +\frac{V_0 z}{d^2} \end{cases}$$

cohérent avec le tracé précédent et la nullité du champ à l'origine.

II, B) 1) Cette fois la seule force s'exerçant sur l'électron est la composante électrostatique de Lorentz:

$$\vec{F} = -q\vec{E} \quad \leftarrow \text{toujours pour l'électron.}$$

La RFD donne pour l'e⁻:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -qEx = \frac{qV_0 x}{2dz} \\ m\ddot{y} = \frac{qV_0 y}{2dz} \\ m\ddot{z} = -\frac{qV_0 z}{dz} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_0^2}{2} x \\ \ddot{y} = \frac{\omega_0^2}{2} y \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z \end{cases}$$

B. 2) équation de l'oscillateur harmonique sur z
avec naturellement $\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

B. 3) A, N : $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-13} \times 10}{3,1 \cdot 10^{-31} \times \frac{17 \cdot 10^{-6}}{4}}}$ $\left(d^2 = \frac{\omega^2 + 2z_0^2}{4} \right)$
 $d = \frac{\sqrt{3^2 + 2 \times 2^2}}{2}$
 $d = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot 10^{-3} \text{ m.}$
 $\omega_0 \approx 1,0 \cdot 10^8 \text{ Hz.}$
 $\omega_0 = 0,10 \text{ GHz} \ll 1e \text{ (facteur } 280)$

B. 4] Dans le plan (Oxy) les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont hyperboliques et donc possèdent des branches infinies.
 $\Rightarrow$ mouvement non borné.

III] A] Nouvelles équations différentielles par la RFD:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{qV_0 x}{2dz} - q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = \frac{qV_0 y}{2dz} + q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = -\frac{qV_0 z}{dz} \end{cases}$$

soit en utilisant les pulsations ω_c et ω_0

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c \dot{y} - \frac{\omega_0^2}{2} x = 0 & (1) \\ \ddot{y} - \omega_c \dot{x} - \frac{\omega_0^2}{2} y = 0 & (2) \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

III) B) équation non modifiée $\rightarrow$ oscillations bornées sur Oz .

III) C) 1) $\underline{u} = x + iy$

on écrit alors l'équation complexe combinaison linéaire de $f)$ et $g)$: $(1) + i(2)$

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) - i\omega_c (\dot{x} + i\dot{y}) - \frac{\omega_0^2}{2} (x + iy) = 0$$

soit: $\underline{\ddot{u}} - i\omega_c \underline{\dot{u}} - \frac{\omega_0^2}{2} \underline{u} = 0$

2) L'équation du second degré caractéristique de cette équation différentielle sans second membre est:

$$r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_0^2}{2} = 0$$

dont les racines sont: $r = \frac{i\omega_c \pm \sqrt{-\omega_c^2 + 2\omega_0^2}}{2}$

Pour avoir des trajectoires bornées, il faut trouver des solutions harmoniques (sinusoïdales) soit des exponentielles imaginaires du temps: les racines doivent être imaginaires pures $\Rightarrow 2\omega_0^2 - \omega_c^2 < 0 \Leftrightarrow \omega_c > \sqrt{2}\omega_0 \equiv \underline{\omega_{c0}}$

qui se traduit par:

$$\omega_c = \frac{qB}{m} > \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{qV_0}{mdc}}$$

$$|B| > \sqrt{\frac{2mV_0}{qdc}} = B_0$$

3) le calcul était en effet $\gg f_0$

$$\Rightarrow r = \frac{i\omega_c \pm i\omega_c \sqrt{1 - \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}}}{2} \approx \frac{i\omega_c [1 \pm (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2})]}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} r_1 = \frac{i\omega_c}{2} \times \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2} = i \frac{\omega_0^2}{2\omega_c} = i\underline{\omega_1} \\ \text{ou} \\ r_2 \approx i\omega_c = i\underline{\omega_2} \end{array} \right.$$

$$u(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = A_1 e^{\frac{i\omega_0^2}{2\omega_c} t} + A_2 e^{i\omega_c t}$$

III C.4) A.N $f_1 = \frac{\omega_0^2}{2\pi(2m_e)} = \frac{f_0^2}{2f_e} \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 0,19 \text{ MHz}$

$f_2 = f_e = \underline{28 \text{ GHz}}$.

III C.5)

$\underline{u} \equiv x + i y$

et $e^{i\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t)$
 $e^{i\omega_2 t} = \cos(\omega_2 t) + i \sin(\omega_2 t)$.

donc :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

circular
dans le plan
Oxy
de pulsation ω_1
circular
dans le plan
Oxy
de pulsation ω_2

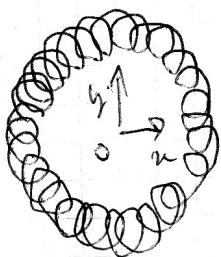
III D) le mouvement oscillatoire harmonique dans la direction z a pour fréquence $f_0 = 0,1 \text{ GHz} = 100 \text{ MHz}$.

donc $f_2 \gg f_0 \gg f_1$

On nous affirme que $A_2 \ll A_1$ donc l'amplitude (rayon) du mouvement circulaire projeté de grande fréquence (f_2) correspond à des trajectoires de faible rayon et celui à (f_1) correspond à 1 cercle moyen décrit nettement + lentement mais de rayon + élevé.

Projection dans le plan xOy

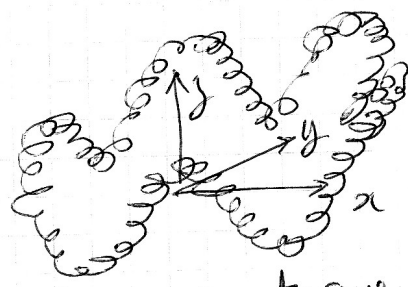
↓



$\frac{28000}{0,2} \approx 140000$
 petites boucles dans 1 tour!

En 3D

↓



bon j'admets que c'est affreux!

(voir l'image d'accueil de mon site!)

PROBLÈME (3) : Réflexion d'une OPH sur 1 conducteur parfait.

Première PARTIE : propagation dans le vide.

$$1^o) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(M,t) &= \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \vec{E}(M,t) &= - \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B}(M,t) &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B}(M,t) &= \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

En l'absence de charges et de courants : $\begin{cases} \rho(M,t) = 0 \\ \vec{j}(M,t) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$2^o) \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

donc : $\operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_0) - \Delta \vec{E} = \operatorname{rot} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

$$\operatorname{rot} \left[\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right] = \vec{0}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \vec{0} - \Delta \vec{B} = \operatorname{rot} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) \\ \operatorname{rot} : - \Delta \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \text{et : } \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$3^o) \quad \begin{aligned} \vec{E}_0 &= E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z & \text{or } \vec{E}(x,t) &= \vec{E}_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \\ \vec{B}_0 &= B_{0y} \vec{e}_y + B_{0z} \vec{e}_z & \vec{B}(x,t) &= \vec{B}_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \end{aligned}$$

S'agissant de fonctions de type $f(t - \frac{x}{c})$ pour la phase, celle-ci avance dans la direction $x \nearrow$. Donc la direction de propagation est donnée par $\vec{e}_x$.

$E_{0y}, E_{0z}, B_{0y}, B_{0z}$ étant apparemment des constantes, les champs vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont uniformes dans des plans $x = \text{cte}$ (plans équi-phases ici) perpendiculaires à la direction $\vec{e}_x$ de propagation $\Rightarrow$ onde plane.

progressive : déjà dit !

monochromatique car Harmonique : f est du type $\cos$ en sinus de ωt .

c : célérité de propagation de la phase. Si deux instants $t_2 > t_1$ successifs donnent la même valeur de phase alors:

$$\varphi\left(\frac{x_1}{c} - t_1\right) = \varphi\left(\frac{x_2}{c} - t_2\right) \Rightarrow \frac{x_1}{c} - t_1 = \frac{x_2}{c} - t_2$$

(au delà de la périodicité de la fonction sinusoidale)

$$\Rightarrow c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \text{l'onde s'est déplacée de } (x_2 - x_1) \text{ sur la durée } (t_2 - t_1).$$

$\vec{k}$ doit avoir la direction et le sens de propagation et la phase doit s'écrire pour 1 OPPH: $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$
ou $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$.

Choisissons: $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ ici $\varphi = \omega t - \frac{\omega x}{c}$

donc: $\vec{k} \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{\omega x}{c}$

donc: $k_x = \frac{\omega}{c}$, $k_y = k_z = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x}$

4°) Vérification de l'équation de d'Alembert pour cette OPPH:

Pour $\vec{E}$: $\vec{\Delta E} = (\Delta E_x) \vec{e}_x + (\Delta E_y) \vec{e}_y + (\Delta E_z) \vec{e}_z = \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

avec $E_y = E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$ et $\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$.
 $E_z = E_{0z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$ donne ici: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y$.

soit: $\forall t, \forall x$
$$\begin{cases} -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = 0 \\ -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{0z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) E_{0z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

possible si et seulement si: $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$

(idem pour $\vec{B}$ par analogie des composantes)

5°) En cartésiennes: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\omega}{c} E_{0z} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = +\frac{\omega}{c} E_{0y} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \end{vmatrix}$

soit $+\frac{\partial B_y}{\partial t} = +\frac{\omega}{c} E_{0z} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \Rightarrow B_y = -\frac{1}{c} E_{0z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$ +100
0

idem $-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\omega}{c} E_{0y} \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \Rightarrow B_z = +\frac{1}{c} E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$

car onde

On vérifie que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux en opérant le produit scalaire :

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_y \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) & -\frac{1}{c} E_0 \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \\ E_0 \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) & +\frac{1}{c} E_y \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{or } \|\vec{E}\| = \sqrt{E_y^2 + E_0^2} \left| \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \right|$$

$$\text{et } \|\vec{B}\| = \sqrt{\left(\frac{E_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{c}\right)^2} \left| \cos(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \right|$$

$$\text{donc } \forall x \text{ et } \forall t \Rightarrow \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{1}{c}$$

6°) $\vec{R} \equiv \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rightarrow$ densité volumique de courant d'énergie électromagnétique
ou bien : puissance (locale et instantanée) rayonnée par l'onde par m^2 .

$\|\vec{R}\|$ s'exprime en W/m^2 .

$$2) \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ E_y & B_y \\ E_z & B_z \end{vmatrix} = \frac{(E_y B_z - E_z B_y) \vec{e}_x}{\mu_0}$$

$$\vec{R} = \left(\frac{E_y^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \frac{\omega x}{c}) + \frac{E_z^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \right) \vec{e}_x$$

$$\text{avec } E_0^2 \equiv E_y^2 + E_z^2$$

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \vec{e}_x$$

$$\text{et pour éviter } \mu_0 : \vec{R} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - \frac{\omega x}{c}) \vec{e}_x$$

Moyenne d' $\cos^2 = \frac{1}{2}$ sur 1 nombre entier de "périodes".

$$\Rightarrow \langle \vec{R} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_x$$

DEUXIÈME PARTIE : réflexion d'1 onde en incidence normale.

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

7°) la direction de polarisation est la direction de $\vec{E}$ soit $\vec{e}_y$
(cette onde est polarisée rectilignement)

9°) 1) On nous donne: $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_2$ ((2) le métal parfait)
(1) le vide

ainsi: $\vec{E}_{\text{vide}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$
(à $x=0^-$)

doit vérifier $[-\vec{E}_i(0^-) - \vec{E}_r(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$

soit:
$$\begin{cases} 0 - E_{rx}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = 0 \text{ (composante longitudinale)} \\ -E_0 \cos(\omega t) + E_{ry}(0^-) = 0 \\ 0 - E_{rz}(0^-) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{E}_r$ n'a qu'une composante sur $\vec{e}_y$ en $x=0^-$

$E_{ry}(0^-) = -E_0 \cos(\omega t)$

Et comme l'onde réfléchie doit se propager (d'après les lois vues en optique scalaire) dans la direction $-\vec{e}_x$ alors elle s'écrit de manière régressive:

$\Rightarrow \vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$
(ou $\vec{E}_r = -E_0 \vec{e}_y$) (expression propre dans l'énoncé).

2) Ainsi il faudrait refaire: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ comme dans la question 5 de la première partie?!

→ cas particulier de la question (5) où le terme non nul du rotationnel est: E_{oy} . donc $B_{iz} = \frac{E_{oy}}{c} \cos(\omega t - kx)$

ou $B_{rz} = -\frac{E_{oy}}{c} \cos(\omega t + kx)$.

ainsi:
$$\begin{cases} \vec{B}_{oi} = \frac{E_{oy}}{c} \vec{e}_z = +\frac{E_0}{c} \vec{e}_z \\ \vec{B}_{or} = -\frac{E_{oy}}{c} \vec{e}_z = +\frac{E_0}{c} \vec{e}_z \end{cases}$$

3) $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \vec{e}_y (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = -2E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t) \sin(-kx)$
 $|\vec{E}| = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$

$|\vec{B}| = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \vec{e}_z (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z$

S'agissant de fonctions $f(x)g(t)$ ce sont des ondes stationnaires.