

# CORRIGÉ Physique A (CONCOURS BLANC 2019)

Premier problème : Filtre à "variable d'état"

I.1] figure (1) :  $s(t) = -\frac{1}{RC} \int e dt$  intégrateur inverseur

$$\text{et } H_1(j\omega) = \frac{S}{E} = -\frac{1}{jRC\omega} = -\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = j\frac{\omega_0}{\omega}$$

figure (2) :  $H_2 = \frac{-aR}{R} = -a$

et  $s(t) = -a e(t)$ . amplificateur inverseur.

figure (3) :  $\frac{s}{-R} = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R} + \frac{e_3}{R}$   
 $\Rightarrow s = -(e_1 + e_2 + e_3)$  sommateur inverseur.

et donc :  $S = -(\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3)$  ← amplitudes complexes

et  $s(t) = -(e_1(t) + e_2(t) + e_3(t))$  ← grandeurs réelles instantanées.

I.2] On écrit les relations entrée-sortie de chaque montage à AO idéal fonctionnant en régime d'amplification. (linéaire).

$$s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_N(t) dt \quad \text{ou bien} \quad v_N(t) = -RC \dot{s}(t).$$

$$v_M(t) = -RC \dot{v_N}(t) = + (RC)^2 \ddot{s}(t)$$

$$v_P(t) = -a v_N(t) = RCa \dot{s}(t).$$

enfin sur le sommateur inverseur :

$$-\frac{v_M}{R} = \frac{e}{R} + \frac{v_P}{R} + \frac{s}{R}$$

$$e + v_P + v_M = -s. \quad \text{ou} \quad e = -s - v_P - v_M$$

$$\text{soit } e = -s - RCa \dot{s} - (RC)^2 \ddot{s}$$

$$\text{ou } \boxed{e = -\left(s + \frac{a}{\omega_0} \dot{s} + \frac{\ddot{s}}{\omega_0^2}\right)}$$

$$\boxed{H_4(j\omega) = \frac{S}{E} = -\frac{1}{1 + j\frac{a\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

filtre passe-bas du second ordre.

Pour  $a = \sqrt{2}$  :

$$H_{dB} = g_{dB} = 20 \log_{10} |H_4|$$

$$= -20 \log_{10} \left( \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

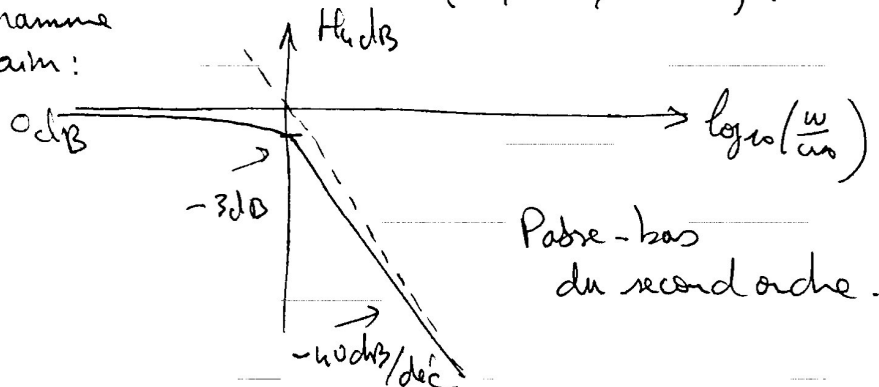
$$H_{dB} = -10 \log_{10} \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \right)$$

pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$   $H_{dB} \rightarrow 0$

pour  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$   $H_{dB} = -3 \text{ dB}$

pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$   $H_{dB} \rightarrow -10 \log_{10} \left( \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \right)$   
 $\rightarrow -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$   
 $(-40 \text{ dB/décade})$ .

Allure du diagramme de BODE du gain :



I.3) On a circuit RLC série alimenté par 1 générateur de Thévenin

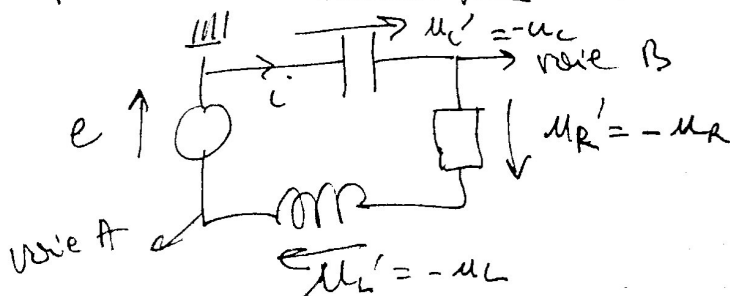
on aura :  $e(t) = R i'(t) + L \frac{di'}{dt} + \frac{q}{C}$  avec  $\frac{dq}{dt} = q' = i'$

soit  $e(t) = R q' + L q'' + \frac{q}{C}$

$\Rightarrow e(t) = RC u_c' + LC u_c'' + u_c$

on prendra donc la tension aux bornes du condensateur en sortie.

et pour avoir le m<sup>e</sup> signe il faudra prendre la masse ainsi :



avec  $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$

et  $RC = \frac{a}{\omega_0}$

II.1]  $f_h$  = fréquence d'horloge (plutôt de commutation de l'interrupteur).

les charges et décharges de condensateur sont "instantanées".

( $T_h \gg RC$ ) temps caractéristique de charge ou de décharge de  $C_0$  par  $r$ ).

position  $A_1$  :  $q_1 = C_0 V_1$

position  $A_2$  :  $q_2 = C_0 V_2$

charge "transférée" à C car l'A.O doit présenter  
1 tension différentielle d'entrée  $E = e^+ - e^- = 0V$   
en régime linéaire de telle façon que toute la  
charge se retrouve sur C.

ainsi  $\Delta q = \underbrace{C_0 V_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{ce que } l'op. \\ \text{avait accumulé} \\ \text{dans } C_0}} - \underbrace{C_0 V_2}_{\substack{\downarrow \\ \text{ce qui reste} \\ \text{accumulé} \\ \text{dans } C_0. \\ (= 0 \text{ si l'A.O} \\ \text{présente } E = 0! )}}$

donc, a priori :  $\Delta q = C_0 (V_1 - V_2)$ .

l'intensité moyenne (par période de commutation) passant  
de  $A_1$  à  $A_2$  s'écrit donc :  $i_{\text{moy}} = \frac{\Delta q}{T_h} = \frac{C_0 (V_1 - V_2)}{T_h}$

II.2] la relation précédente est analogue à une loi d'Ohm  
de type :  $i_{\text{moy}} = \frac{(V_1 - V_2)}{R_e}$  avec  $R_e = \frac{T_h}{C_0}$

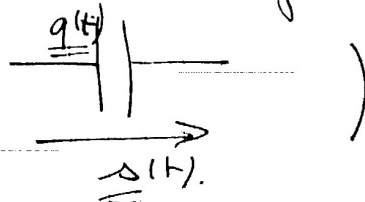
(la "valeur"  $\leftarrow$  ceci est une  
notion quantitative)

(nous ne  
connaissons ni  $C_0$  ni  $T_h$   
pour le moment).

II.3] A chaque période de commutation, on emmagasine  
dans C une charge supplémentaire de  $(\Delta q = C_0 E_0)$   
(cf réflexion sur  $E = 0$ )

Or sur le condensateur  $C$ , on peut écrire :

$$q(t) = -C s(t) \quad (\text{attention à la position de la charge !})$$



Donc si on part d'un condensateur  $C$  déchargé,  $s(t)$  "augmente" de  $-\frac{\Delta q}{C}$  à chaque commutation.

et on aura donc :

$$s(t) = \left( -\frac{C_0 E_0}{C} \right) \times p$$

à la fin de la pième commutation.

Si cette tension  $s(t)$  prend une valeur extrême (c'est à cause de la saturation de l'ALI à  $-V_{sat}$  (si  $E_0 > 0$ ))

II.4]  $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

→ période du signal sinusoïdal  
 $\neq$  période de commutation!

a)  $C_0$  est chargé "instantanément" à  $t = pTh$ .

$C_0$  est déchargé "instantanément" à  $t = (p + \frac{1}{2})Th$ .

On écrit donc entre les instants  $(p-1)Th$  et  $pTh$  :

$$s(pTh) = s(pTh - Th) + \left( -\frac{C_0}{C} e((p-1)Th) \right)$$

b) La période  $T$  étant très supérieure à  $Th$ , on peut considérer les variations de  $s$  et  $e$  sur  $Th$  suffisamment faibles pour approximer :

$$s(pTh) - s(pTh - Th) \approx \frac{ds}{dt} \times Th$$

$$\text{soit} \quad \frac{ds}{dt} \times Th = -\frac{C_0}{C} e(t)$$

c'est une approximation continue.

ce qui s'écrit en grandeurs complexes :

$$j\omega \underline{S} \underline{Th} = -\frac{C_0}{C} \underline{E}$$

$$\text{or } \underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = -\frac{C_0}{C} \times \frac{1}{j\omega Th}$$

$$\text{en notant } R_c = \frac{Th}{C_0} \text{ (question II.1.)}$$

$$\text{on aura : } \underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{R_c} \times \frac{1}{j\omega} \rightarrow \text{montage équivalent à 1 intégrateur inverseur}$$

→ à condition que :

- les charges/décharges soient instantanées
- la période de commutation soit très courte devant la période minimale du signal que l'on cherche à intégrer.

II. 5) a)  $s(t)$  est le signal crénelé et  $e(t)$  la sinusoïde d'alimentation (les variations légères de  $e(t)$  lors des commutations sont liées à la résistance interne du générateur délivrant le signal & lorsqu'un courant "important" est débité pendant les charges de  $C_0$  on observe une petite "chute de potentiel"  $r_i(t)$ .)

b) On compte 10 créneaux par cycle (1 cycle  $\Rightarrow$  20  $\mu$ s).  
donc  $Th = \frac{200}{10} = 20 \mu s \Rightarrow f_h = \frac{1}{Th} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} = 0,05 \cdot 10^6 \text{ Hz}$   
 $f_h = 50 \text{ kHz}$

c)  $e(t)$  atteint son max  $1/4$  de période après  $s(t)$ .  
donc la sortie est en quadrature avancée sur l'entrée ( $\varphi_{s/e} = +\frac{\pi}{2}$ )

$$d) \text{ gain} = \frac{4,080}{7,783} = \frac{1}{RC\omega} = \frac{C_0}{C Th 2\pi f}$$

$$\text{avec } f = 1 \text{ kHz}$$

$$f_h = \frac{1}{Th} = 50 \text{ kHz}$$

$$\text{A.N : } C \approx \frac{7,783}{4,080} \times \frac{2,2}{2\pi} \times 50 \mu F$$

$$C \approx 33 \mu F$$

c) la "marche" est maximale quand  $e(t)$  est maximal

$$\frac{\Delta S}{I_{th}} = - \frac{C_0}{C I_{th}} e_{max}$$

$$\Delta S = - \frac{2,8}{33} \times \frac{7,8}{2} \approx - \frac{7,8}{30} \approx \underline{\underline{-0,26 V}}$$

(confirmation d'environ 4 "marches" descendants pour  $-1V$ )

f)  $\tau C_0 = 50 \times 22 \cdot 10^{-9} \neq 10^{-7} s = 0,1 \mu s.$

$$0,1 \mu s \ll 20 \mu s (= T_{th})$$

donc l'hypothèse d'une charge "instantanée" (compte durée devant la période de commutation) est vérifiée.

III. 1) On peut considérer le signal échantillonné aux bornes de  $C_0$  dans la mesure où la valeur de tension  $e((p-1)T_h)$  est "stockée" dans le condensateur mais il ne s'agit pas d'une valeur numérique ne présentant de valeur qu'à  $(p-1)T_h$  (pas discrète en vérité) et son transfert ne sera pas exact vers  $C$ .

Lorsqu'un signal est numérique, cela signifie une valeur discrète de tension à 1 instant discret. La valeur de tension ne peut être qu'un multiple d'un quantum de tension  $q$  lié à la dynamique ( $\Delta S$ ) (plage min-max) et au nombre de bits  $N$  de stockage ou le convertisseur avec :

$$q = \frac{\Delta S}{2^N - 1}$$

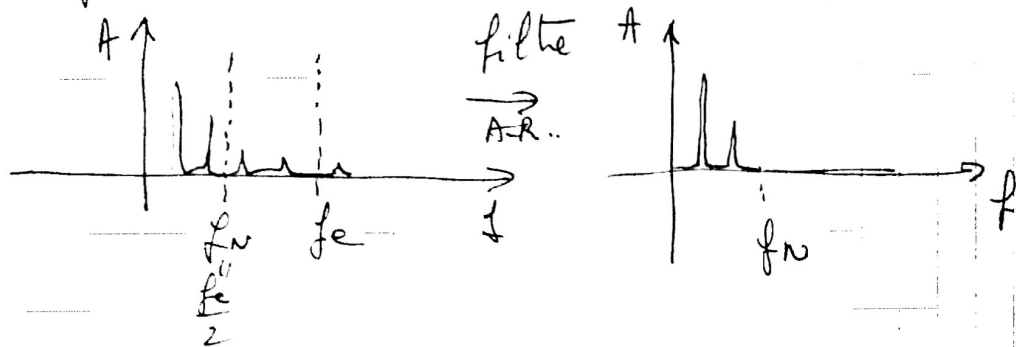
Ce n'est aucunement le cas ici ! Les valeurs "précises" de tension peuvent prendre n'importe quelle valeur !

$\Rightarrow$  Il ne s'agit pas d'un signal numérique !

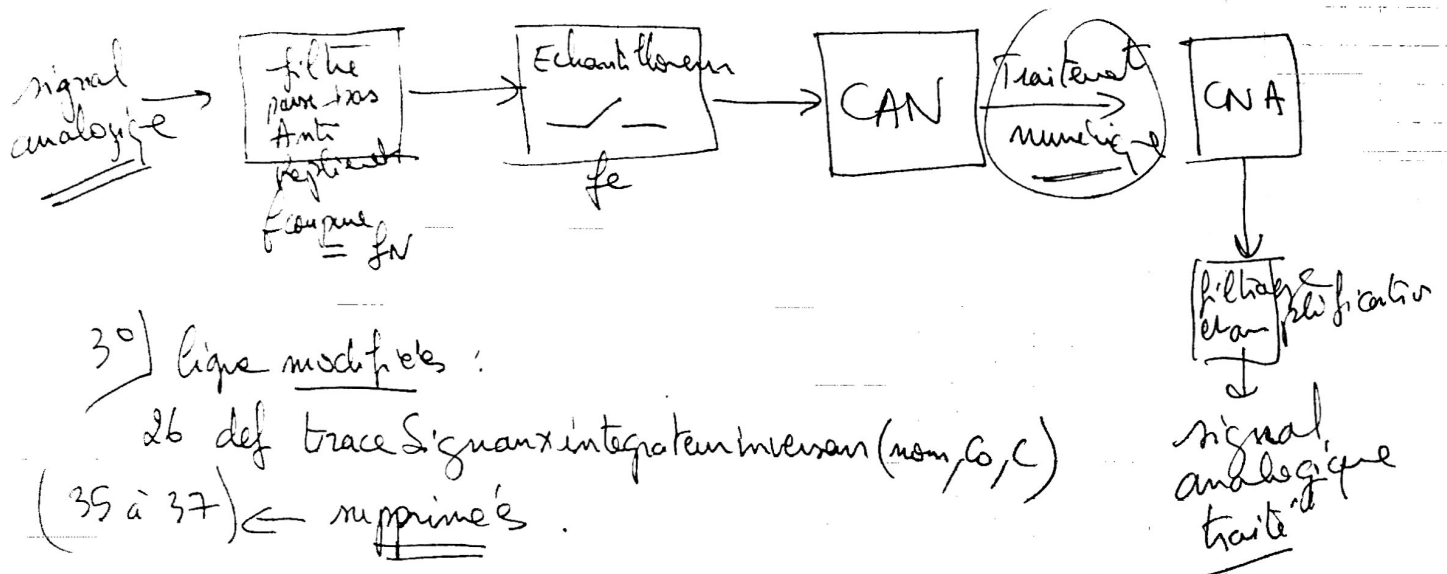
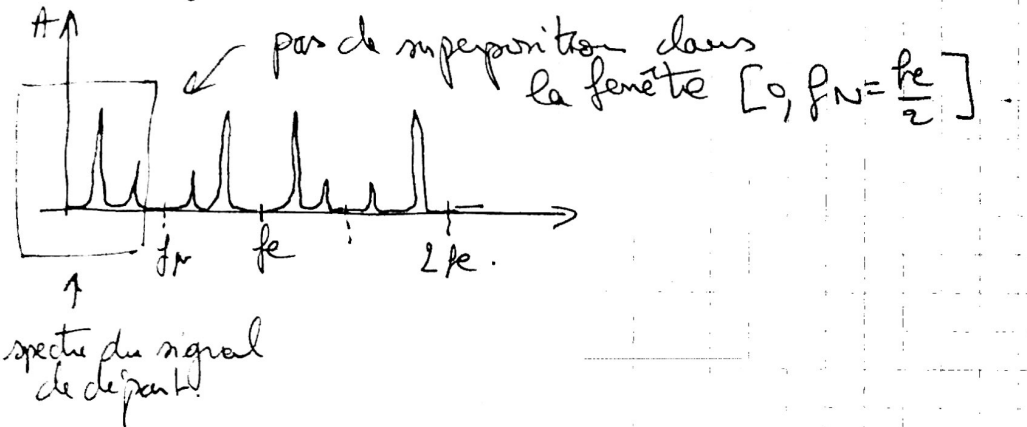
2) Le critère de Shannon stipule que la fréquence d'échantillonnage doit excéder le double de la fréquence maximale du signal échantillonné -

On nomme fréquence de Nyquist :  $f_N = \frac{f_e}{2} > f_{\max \text{ signal}}$

Un signal contenant des fréquences "infinies" (pas de limite supérieure pour le spectre) sera "tronqué" à  $f_N$  pour que le spectre "réplé" (aliasing) (apparu à cause de l'échantillonnage) ne se superpose pas au spectre "réel" :



et spectre du signal échantillonné :



3°) ligne modifiée :

26 def trace Signaux intégrateurs inverses ( $u_0, u_1, u_2$ )  
 (35 à 37) ← supprimés.

$$39 \quad u_1[i+1] = u_1[i] - \frac{C_0}{C} u_0[i]$$

42 plot( $t_0, u_1, 'r+', label="signal intégré"$ )

(commentaires évidents)

## SECOND PROBLÈME : Écoulement dans un canal.

Canal (vu de haut).

42) Dans ce cas d'écoulement incompressible, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant. Ce débit est tout le flux de vecteur vitesse au travers 1 section  $S$  de tube :

$DV = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s}$  devient  $DV = v(M) \times S_{\perp}(M)$  sur 1 tube dans lequel la vitesse est sensiblement uniforme sur 1 section droite.

Ainsi un rétrécissement de largeur (diamètre) de tube de courant correspond à une augmentation de vitesse -

→ De B à J  $\Rightarrow$  rétrécissement  $\Rightarrow v(J) > v(B) = v(A)$

→ en K : point d'arrêt  $v_K = 0 \text{ m.s}^{-1}$    
 (tourbillons  $\rightarrow$  turbulence  $\rightarrow$  vitesse moyenne nulle en ce point.)   
 Bernoulli (ou symétrie de positions).

→ de A à C :  $v_C > v_I > v_A$

et  $v_D = v_C$  (symétrie apparente.)

43)  $DV = v(A) \times L_1 h$

A.N. :  $DV = 0,5 \times 0,5 \times 0,5$

$DV = 125 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$DV = 0,125 \text{ m}^3/\text{s}$

$$v_C = \frac{DV}{L_2 h}$$

$$v_C = v(A) \times \frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{2} \cdot 0,5 = 0,75 \text{ m/s}$$

44) BERNOULLI :

→ le long d'un tube de courant :  $P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = Cte$

si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fluide incompressible-homogène} \\ \text{écoulement permanent} \\ \text{fluide parfait} \end{array} \right.$

(Hors-programme : si l'écoulement est irrotationnel, cette constante est valable sur tout l'écoulement)

45) M est ici un point d'arrêt (en RP le fluide en écoulement ne peut plus entrer dans la veine centrale du tube de Pitot : conservation du débit volumique nul : c'est 1 modèle caricatural de la zone turbulente à cette entrée où du liquide entre et sort).

On écrit donc que  $v(M) = 0 \text{ m.s}^{-1}$

\* Pour trouver 1 relation entre M et N il faut au préalable définir les points  $M_0$  et  $N_0$  en amont sur les  $m$  lignes de courant que M et N  $\Rightarrow$  situations analogues non perturbées par le tube de Pitot :  
 -  $m$  vitesse  $U$  en  $M_0$  et  $N_0$   
 - différence d'altitude négligée  
 -  $m$  pression  $P_0$  aux deux points.

On applique alors le théorème de BERNOULLI sur les deux tubes en spécifiant qu'au point N, les turbulences induisent une uniformité de pression de part et d'autre de l'ouverture (avec 1 vitesse  $U$  non modifiée en N (côté extérieur à Pitot) et 1 vitesse nulle à l'intérieur).

Bernoulli sur la ligne de courant  $M_0 M$  :

$$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_M$$

Bernoulli sur la ligne de courant  $N_0 N$  :

$$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_N + \frac{\rho U^2}{2}$$

Permettant d'en déduire :  $\Delta P \equiv P_M - P_N = \frac{\rho U^2}{2}$

46) la relation entre les pressions dans les tubes fins est issue de la statique des fluides : équilibre du "boudin" de liquide de masse volumique  $\rho_0$  sous l'influence de forces de pressions dissymétriques :

$$\Delta P \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{section} \\ \text{du tube}}}{S} = (\rho_0 h \cdot S) \times g \Rightarrow \Delta P = \rho_0 g h$$

L'identification de ce  $\Delta P'$  à  $\Delta P$  correspond à négliger la variation de pression  $\rho gh$  due à la variation d'altitude dans le tube de pitot pour le fluide de même volume  $\rho$ . (fluide dense doit être compris  $\rho_0 \gg \rho$ ).

47) Dans cette hypothèse:  $\Delta P' = \Delta P = \rho gh = \frac{\rho U^2}{2}$

on aura alors:  $U = \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho}}$

(Rq: si on ne faisait pas l'approx de la question 46, on aurait:

$$\Delta P' = (P_M + \rho gh) - P_N = \rho gh + \frac{\rho U^2}{2}$$

et donc  $\rho gh + \frac{\rho U^2}{2} = \rho gh$

soit  $U = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)gh}{\rho}}$

48)  $U(A) = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$

$Re = \frac{0,5 \times (1)}{10^{-6}} \rightarrow 0,5 \text{ m}$

$\nu_{\text{eau liquide } 20^\circ\text{C}} = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

$Re = 0,25 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^5 \Rightarrow$  Régime turbulent!

En fait on ne sait pas à quelle distance est le pt A de la paroi latérale du canal. (pourquoi prendre  $L_1$ ?)

On peut seulement faire la remarque suivante  $\hookrightarrow$  !  
 $\Rightarrow$  les forces de viscosité sont d'autant moins importantes dans l'écoulement que le nombre de Reynolds est élevé  $\Rightarrow$  prédominance des forces d'inertie.

/ L'hypothèse de fluide parfait est donc assez satisfaisante.

# TROISIÈME PROBLÈME : Optique physique et géométrique.

I.1.1) "Formule" de FRESNEL (ou des interférences à 2 ondes).

$$I(M) = 2I_0 (1 + \cos \Delta\phi)$$

I.1.2)  $\Delta\phi = \frac{2\pi \Delta L}{\lambda}$

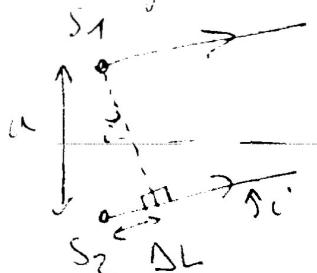
$\lambda \rightarrow$  longueur d'onde dans le vide.

I.1.3) a)  $\left\{ \begin{array}{l} a \ll d \\ \text{ou} \\ \lambda \ll d \end{array} \right\}$  à utiliser immédiatement  $\Rightarrow$  différence de marche approximée à celle à l' $\infty$ .

sous une inclinaison:

$$i \approx \tan i' = \frac{z}{d}$$

dans cette approximation, on lit directement la différence de marche géométriquement.



soit  $\Delta L = a \sin i' \approx a i'$

$$\Delta L \approx a \frac{z}{d}$$

b)  $I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a z}{d \lambda} \right) \right)$

c) Par définition:  $p_0 = \frac{\Delta L(0)}{\lambda} = 0$   
 $\Rightarrow$  frange lumineuse  $\nearrow$  la longueur d'onde.

d)  $\lambda$  différence de marche pour  $\lambda$  inclinaison  $i'$   
 $\Rightarrow$  franges rectilignes sur l'écran.  
 (dirigées suivant  $y \perp$  à la figure).

Par définition:  $d_i = |z_p - z_{p-1}| \quad (= \frac{\lambda d}{a})$ .

avec pour les franges brillantes  $p = \text{entier}$ .

ou bien + simplement on cherche la périodicité spatiale sur  $z$  de l'intensité lumineuse

$$\cos \left( \frac{2\pi a z}{d \lambda} \right) = \cos \left( \frac{2\pi z}{d_i} \right) \Rightarrow d_i = \frac{\lambda d}{a}$$

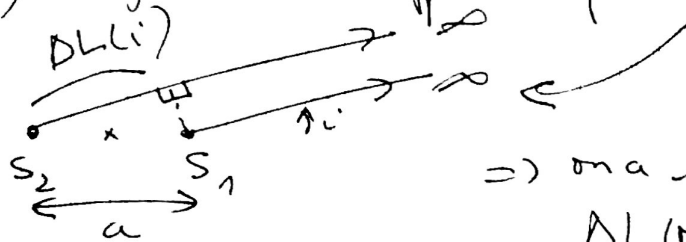
(d<sub>i</sub>) est très voisin des dix de notation!

I.13 e) AN: premier max pour

$$d_i = \frac{\lambda d}{a} = \frac{500 \cdot 10^{-9} \times 1}{10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d_i = 0,5 \text{ mm}$$

I.1.4) a) toujours en rappelant que  $a \ll d$ .



$\Rightarrow$  on a immédiatement

$$DL(M_\infty)_{i_\infty} = a \cos i'$$

$\rightarrow$  l'énoncé suggère d'écrire:

$$\Delta L = (S_2 M) - (S_1 M)$$

$$\text{avec } (S_1 M) = S_1 M = \sqrt{SM^2 + SS_1^2 - 2SM \cdot \overrightarrow{SS_1} \cdot \overrightarrow{SM}}$$

$\uparrow$  ordre 2     $\uparrow$  ordre 2     $\uparrow$  ordre 1

et donc

$$(S_2 M) = S_2 M = \sqrt{SM^2 + SS_2^2 - 2SM \cdot \overrightarrow{SS_2} \cdot \overrightarrow{SM}}$$

$$\text{soit } \Delta L \approx SM \left( \left( 1 - \frac{2 \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SS_2}}{SM^2} \right) - \left( 1 - \frac{2 \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SS_1}}{SM^2} \right) \right)$$

$\hookrightarrow$  ordre 2 néglige + DL de  $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$ .

$$\Delta L \approx \frac{\overrightarrow{SM}}{SM} (\overrightarrow{SS_1} - \overrightarrow{SS_2}) = \frac{\overrightarrow{SM}}{SM} \times \overrightarrow{S_2 S_1}$$

$$\Delta L \approx \underbrace{\vec{u}_{SM}}_{\substack{\text{vecteur unitaire} \\ \text{de direction} \\ \text{par } i}} \cdot \overrightarrow{S_2 S_1} = a \cos i'$$

(invariant long!)

b)  $\Delta L(i) = a \cos i \approx a \left( 1 - \frac{i^2}{2} \right)$  à l'ordre 2 en  $i$ .

ou  $\tan i \approx i \approx \frac{\rho}{d}$  ( $\rightarrow$  notation proposée à la question suivante.)

$$\Rightarrow \Delta L(i) \approx a \left( 1 - \frac{\rho^2}{2d^2} \right)$$

$$c) I(r) = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi a \left( 1 - \frac{r^2}{2d^2} \right)}{\lambda} \right)$$

d) en  $r=0$

$$\Rightarrow I(0) = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda} \right)$$

$$\text{et } p_0 = \frac{\Delta L(0)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} \quad \text{AN: } p_0 = \frac{10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}}$$

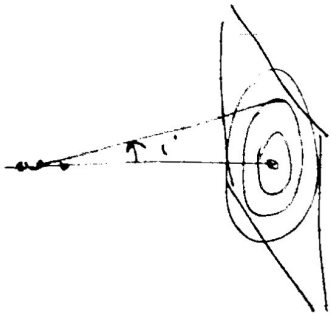
$$p_0 = \frac{10000}{5} = \underline{\underline{2000}}$$

Valeur totale et  
approchée !

(les chiffres ne sont pas significatifs)

ne sont pas en déduit que la frange centrale est brillante par exemple !

e) Il s'agit d'une figure d'anneaux (c'est la inclinaison)



f) Premier rayon d'anneau brillant

$$\text{pour } \frac{a}{\lambda} \left( 1 - \frac{r_1^2}{2d^2} \right) = 10 - 1$$

(différence de l'ordre avec le rayon).

$$\frac{a r_1^2}{2\lambda d^2} = 1$$

$$\Rightarrow r_1 = d \sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$$

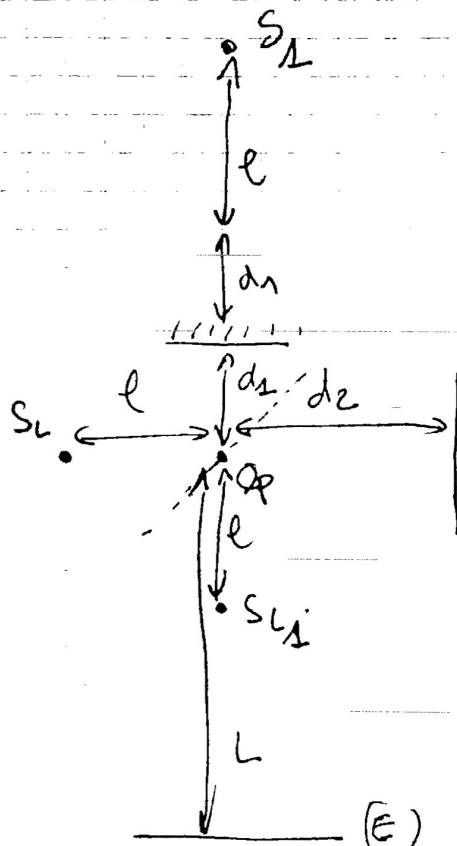
$$\text{AN: } r_1 = \sqrt{\frac{2 \times 500 \cdot 10^{-9}}{10^{-3}}} = \sqrt{10^{-3}} \approx 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\approx \underline{\underline{3 \text{ cm}}}$$

I.15] Pour des observations à l'infini, il faut placer l'écran d'une lentille convergente à distance focale.

I.2] les miroirs sont "parallèles".

(figure page suivante)



$S_{L_1}$  est l'image de  $S_L$  au travers la répliquatrice

$S_{L_2}$  est l'image de  $S_L$  au travers de  $M_2$ .

( $S_2$  n'a pas été représenté au dessus de  $S_1$ ).

$$(-\alpha_{S_1}) = L + 2d_1 + l$$

$$(-\alpha_{S_2}) = L + 2d_2 + l$$

I.2.1 b)  $a \equiv \alpha_{S_1} - \alpha_{S_2} = 2(d_2 - d_1)$ .

ou

$$d \equiv \frac{-\alpha_{S_1} - \alpha_{S_2}}{2} = \frac{L + l + d_1 + d_2}{2}$$

I.2.1 c) Éclairement uniforme si la différence de marche est uniforme en tout point de l'écran.  $\Rightarrow$  contact optique  $a = 0$

I.2.2 a) On se retrouve dans la situation de la figure (?) de la première partie  $\Rightarrow$  anneaux (Michelson en lame d'air).

I.2.2 b) on avait :  $\rho_1 = d \sqrt{\frac{2\lambda}{a}} = (L + l + d_1 + d_2) \sqrt{\frac{2\lambda}{2(d_2 - d_1)}}$

$$\rho_1^2 = (L + l + d_1 + d_2)^2 \times \frac{\lambda}{e}$$

$$\approx L + l + 2l$$

$$\approx 1 \text{ mm}$$

$\Rightarrow$  A.N :  $e = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{(0,02)^2}$

$$e \approx 1,25 \text{ mm}$$

I.2.2.c) au centre :  $P_0 = \frac{S_0}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = \underline{5000}$

I.2.3] a) question très pénible sans support de dessin qui devrait être fourni dans l'énoncé.  
(nécessite également 1 compas!)

$\Rightarrow$  question à fuir puisque on vous donne le résultat :  
2 sources écartées transversalement de  $a$ .

b) Fauts (si vous le souhaitez ce n'est pas important!) le dessin en temps libre.

On aura alors :  $a = 4l \sin(2\alpha)$   
( $n/d_1$  et  $n/d_2$  égaux à  $l$ ).

c) On aura des franges rectilignes (conformément à la question I.1.3d).

d) On rappelle la formule de l'interfrange :  
$$d_i = \frac{\lambda d}{a} = \frac{\lambda (L+3l)}{a} = \frac{\lambda (L+3l)}{4l \sin(2\alpha)}$$

A.N possible simplement si  $a = 4l \sin(2\alpha)$  a été trouvé.

$$\alpha \simeq 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

e) On pourrait aussi répondre à cette question sans expression analytique de  $a(\alpha)$ .

$\Rightarrow$  si  $\alpha$  augmente, les images  $S_1$  et  $S_2$  s'écartent de l'axe vertical (en effet si  $\alpha = 0 \Rightarrow$  sur l'axe) (confondus)

donc  $d_i$  diminue puisque  $a$  augmente.

# QUATRIÈME PROBLÈME: Positions des télescopes spatiaux

## 1°) HUBBLE

1.1) Si on se limite à l'interaction terrestre, nous sommes dans la situation d'un problème à 2 corps en interaction newtonienne dans 1 référentiel géocentrique (approximé galiléen!). Dans ce cas la trajectoire est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole) dont le centre de la terre occupe un des foyers. Sachant que l'on souhaite que la trajectoire reste liée (à la terre), il s'agit d'une trajectoire elliptique (comme celles des planètes autour du soleil dans l'approximation à 2 corps dans 1 référentiel héliocentrique galiléen).

1.2) En notant  $\gamma$  la constante de gravitation universelle, l'interaction entre le télescope Hubble et la terre s'écrit:

$$\vec{F}_{T/H} = -\gamma \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } \vec{e}_r \text{ dirigé de la terre vers le télescope.}$$

$\nwarrow$   
 subie par Hubble  
 de ce point de la terre.

Et la deuxième loi de Newton (ou TRD appliqué à 1 pt matériel) s'écrit:  $m \vec{a} = -\gamma \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r$

(l'accélération est donc purement radiale et si le mouvement est circulaire alors:  $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  avec  $r = ct$ )

$$\text{donc } \vec{a} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{R_{geo}} = r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \vec{e}_\theta \frac{dr}{dt} = r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \vec{e}_\theta \frac{dr}{dt} \quad (\text{car } \vec{a} \text{ radiale})$$

$$\text{soit: } \vec{a} = r \dot{\theta}^2 (-\vec{e}_r) = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{accélération centripète}).$$

$$\text{Ainsi: } -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\gamma \frac{M_T}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et } \dot{\theta} = 0 \quad (1) \quad (2)$$

$$(\text{l'égalité (2): } \dot{\theta} = 0 \Rightarrow r \dot{\theta} = v = ct \quad (\text{avec } r = ct)).$$

le mouvement est donc obligatoirement uniforme s'il est circulaire.

1.3) L'égalité (1) donnera la valeur de cette vitesse  $v$  constante.

$$r\ddot{\theta}^2 = \frac{U_y M_T}{r^2} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{U_y M_T}{r}} = \sqrt{\frac{U_y M_T}{R_T + h}} \text{ avec } h \text{ l'altitude constante de Hubble}$$

Remarque : L'énoncé impose de passer par la seconde loi de Newton alors que le passage par l'énergie potentielle Newtonienne donnerait 1 résultat scalaire immédiat :

$$E_p = - \frac{U_y M_T m}{r} + Cte. \quad (\text{on choisit } E_p = 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty \Rightarrow Cte = 0)$$

donc la conservation de l'énergie mécanique totale donnerait :

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left( - \frac{U_y M_T m}{r} \right) = E_m = Cte.$$

$$\text{donc si } r = Cte \Rightarrow v = Cte.$$

1.4) S'agissant d'un mouvement circulaire uniforme, on obtient la période par le périmètre de la trajectoire circulaire :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \times \sqrt{\frac{r}{U_y M_T}}$$

$$\text{ou encore : } T = \frac{2\pi}{\sqrt{U_y M_T}} (R_T + h)^{3/2}$$

$$(\text{la question se limitait en fait à écrire : } T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} !)$$

1.5) Troisième loi de Kepler : Toutes les planètes décrivent des ellipses autour du soleil (foyer) vérifiant  $\frac{T^2}{a^3} = Cte$  avec  $T$  la période et  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse.

Dans le cas du télescope spatial, la terre joue le rôle de l'unique astre attracteur du mv à 2 corps et on obtient :

$$\left[ \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{U_y M_T} \right]$$

$$1.6) \text{ Application numérique : } T = \frac{2\pi \times (6370 + 600)^{3/2} (10^3)^{3/2}}{\sqrt{4.67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}}$$

$$\text{donnant : } T = 5780 \text{ s} = 1 \text{ h } 36 \text{ minutes. ou } \underline{96 \text{ minutes}}$$

## 2) Deuxième partie : James Webb

2.1) Dans le référentiel  $R'$  tournant avec le rayon Soleil-Terre le pt  $L_2$  est 1 pt fixe qui devrait correspondre à une position d'équilibre (position d'équilibre pour le "petit corps" dans le problème dit "des 3 corps"). On écrit alors la condition d'équilibre avec la loi de Newton corrigée par la force d'inertie centrifuge soit :

$$\vec{0} = -\frac{G M_s m}{r_s^2} \vec{e}_{rs} - \frac{G M_T m}{r_T^2} \vec{e}_{rT} + m \omega_T^2 r_s \vec{e}_{rs}$$

qui devient pour la recherche sur l'axe STM ( $L_2$ )

$$\vec{0} = -\frac{G M_s m}{(d+l)^2} \vec{e}_x - \frac{G M_T m}{\ell^2} \vec{e}_x + m \frac{G M_s (d+l)}{d^3} \vec{e}_x$$

soit l'équation scalaire :

$$0 = -\frac{M_s}{(d+l)^2} - \frac{M_T}{\ell^2} + \frac{M_s (d+l)}{d^3}$$

et en multipliant par  $d^2$  :  $M_s \times \left(\frac{d}{d+l}\right)^2 + M_T \times \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = M_s \left(\frac{d+l}{d}\right)$

2.2)  $k \equiv \frac{M_T}{M_s} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30}} = 3 \cdot 10^{-6}$

Cette définition du rapport des masses permet de simplifier l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{d}{d+l}\right)^2 + k \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{d+l}{d}\right)$$

2.3) En notant :  $\varepsilon = \frac{\ell}{d}$

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 + \frac{k}{\varepsilon^2} = 1 + \varepsilon$$

l'approximons à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  :  $(1-2\varepsilon) + \frac{k}{\varepsilon^2} \approx 1 + \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{k}{\varepsilon^2} \approx 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow k \approx 3\varepsilon^3$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx \sqrt[3]{\frac{k}{3}} = \sqrt[3]{10^{-6}} = 10^{-2}$$

et donc :  $\ell \approx 10^{-2} \times d \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ km}$

- 2.4) 1) On obtiendrait l'énergie potentielle de chacune des "forces" mises en jeu par intégration des forces puisque :
- $$\vec{F} = -\text{grad } E_p \quad \text{ou bien} \quad dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$
- (à appliquer à chacune des 3 forces)

On utiliserait alors l'expression de cette fonction scalaire (énergie potentielle) pour rechercher les positions correspondantes des extrema.

Attention : elle est a priori exprimée en fonction des variables  $x, y$  et  $z$  et il faudra tester des variations de  $dx, dy$  et  $dz$ .

Dans le cas d'un équilibre stable, il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle et dans le cas instable, d'un maximum local d'énergie potentielle.

(Une position peut être stable vis-à-vis d'une modification de  $y$  et  $z$  et instable vis-à-vis d'une variation sur  $x$ ).

- 2) A partir de la position d'équilibre  $L_2$ , on remarque qu'une augmentation de  $x$  diminue les forces d'attraction "négatives" de la terre et du soleil alors que la force centrifuge "positive" augmente : ainsi le télescope JWST s'éloignera d'autant + de  $L_2$  si on l'en écarte d'un  $dx > 0 \Rightarrow$  INSTABLE (On peut faire le même raisonnement avec  $dx < 0$ ).

- 2.5) Choix de  $L_2$  :
- Avantages :
- position d'équilibre (fixée dans  $R'$ )
  - proximité de la terre (contrairement à  $L_3, L_4, L_5$ ).
  - cône d'ombre de la terre (?) vis-à-vis du soleil.
- $\Rightarrow$  contrairement à SOHO qui consistait à observer le soleil.
- (pas de pollution lumineuse ?)

(en fait le JWST disposera d'un bouchon thermique séparant la face ombragée par le soleil porteur de cellules photovoltaïques et de la partie électronique qui holas émettrait de l'IR ! Or c'est dans l'IR que JWST devra faire ses images !)

Inconvénient principal : INSTABILITÉ

$\Rightarrow$  Moteurs à ergols ( $N_2O_4, N_2H_4$ ) nécessaires pour maintenir la trajectoire approchée autour de  $L_2$