DS 8 : Electromagnétisme

PROBLÈME 1 : ÉLECTRON DANS UN PIÈGE DE PENNING

Données numériques			
Charge d'un électron (valeur absolue)	$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C	Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Masse d'un électron	$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg	Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Ce problème porte sur l'étude sommaire du confinement d'un électron (de masse m et de charge $-q$) dans une petite région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que les forces électromagnétiques. L'électron se déplace dans le référentiel $\mathscr{R}(Oxyz)$, supposé galiléen ; on appelle respectivement $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz. Suivant les questions, on repérera un point M de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (r, θ, z) avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Partie I - Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

L'électron, se déplaçant dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent (indépendant du temps). Le champ magnétique $\vec{B}$ est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{e}_z (B > 0)$. On pose $\omega_c = qB/m$.

À l'instant initial, l'électron se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{e}_x + v_{oz}\vec{e}_z$ (v_{ox} et v_{oz} désignent des constantes positives).

I.A - Déterminer la coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t.

I.B - On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan Oxy.

I.B.1) Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron en fonction de v_{ox}, ω_c et du temps t.

I.B.2) En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t.

I.B.3) Montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan Oxy est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H. Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H, le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cercle en fonction de v_{ox} et ω_c. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan Oxy. Préciser en particulier le sens de parcours de l'électron sur Γ.

I.C - *Application numérique* : calculer la fréquence f_c pour $B = 1,0$ T.

I.D - Tracer l'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

Partie II - Mouvement de l'électron dans un champ électrique quadrupolaire

À l'aide d'électrodes de forme appropriée (cf figures 1 et 2), on crée autour du point O, dans une zone vide de charges, un champ électrostatique $\vec{E}$ quadrupolaire de révolution autour de l'axe Oz, dérivant du potentiel :

$U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1(x^2 + y^2) + \alpha_2 z^2$ où α_0, α_1 et α_2 sont des constantes.

On peut également mettre U sous la forme $U(r, z) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2$.

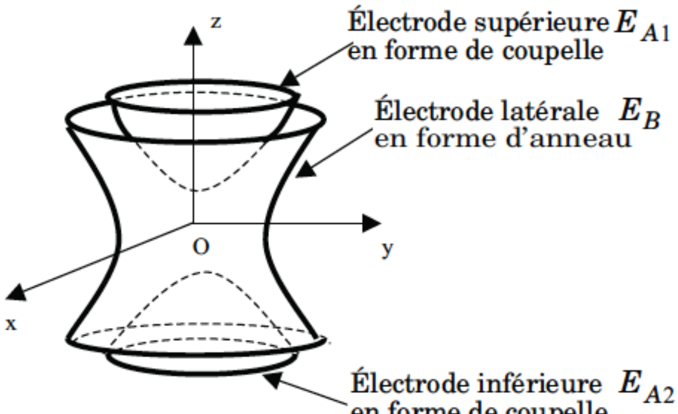

Figure 1

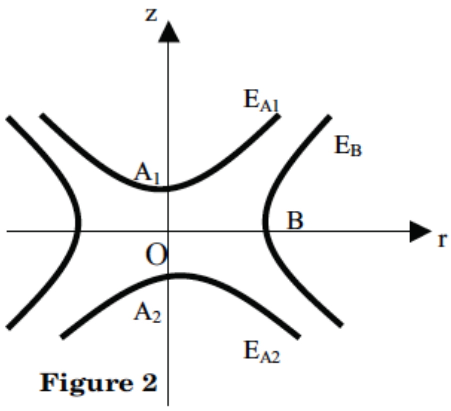

Figure 2

Coupe des électrodes dans le plan méridien

II.A - Étude du potentiel U et du champ $\vec{E}$

II.A.1) À quelle équation aux dérivées partielles doit satisfaire le potentiel U ?

II.A.2) En déduire une relation entre α_2 et α_1.

II.A.3) Les surfaces internes des 2 électrodes E_{A1} et E_{A2}, de révolution autour de Oz, ont pour équation : $r^2 - 2z^2 = -2z_0^2$ (les points A_1 et A_2 de la figure 2 ont respectivement pour ordonnées $+z_0$ et $-z_0$ sur l'axe Oz). Ces 2 électrodes sont au potentiel nul (cf figure 3). La surface interne de l'électrode latérale E_B également de révolution autour de Oz, a pour équation : $r^2 - 2z^2 = r_0^2$ (le point B de la figure 2 est à la distance r_0 de l'axe Oz). Cette électrode est au potentiel $V_0 (V_0 > 0)$. On définit la constante positive d par $4d^2 = r_0^2 + 2z_0^2$.

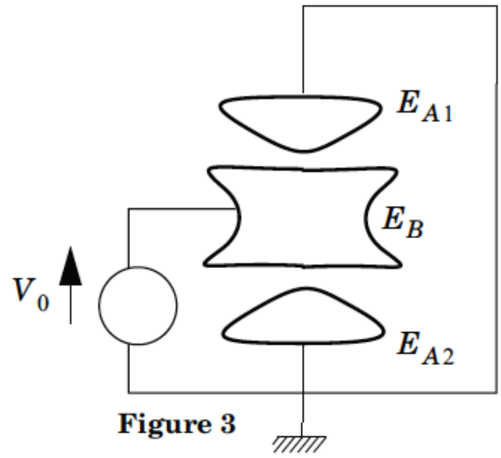

Figure 3

Exprimer le potentiel $U(r, z)$ en fonction de d, z_0, V_0, r et z.

II.A.4) Représenter, au voisinage du point O, dans le plan méridien rOz (voir Figure 2), les lignes équipotentielles (préciser en particulier les lignes équipotentielles qui passent par O) et les lignes de champ en justifiant brièvement le schéma. Préciser également le sens du champ $\vec{E}$ sur les lignes de champ.

II.A.5) Représenter, au voisinage du point O, dans le plan Oxy, les lignes équipotentielles et les lignes de champ, en précisant le sens du champ $\vec{E}$ sur les lignes de champ.

II.A.6) Calculer les composantes cartésiennes E_x, E_y et E_z du champ $\vec{E}$ en un point M en fonction de d, V_0, x, y, z.

II.B - On considère le mouvement de l'électron dans le champ quadrupolaire

II.B.1) Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes Ox, Oy et Oz. On introduira la constante

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{qV_0}{md^2}}.$$

II.B.2) Montrer que le mouvement de l'électron suivant Oz (mouvement longitudinal) est périodique et déterminer sa fréquence f_0 en fonction de ω_0.

II.B.3) *Application numérique* : $r_0 = 3,0\ \text{mm}$, $z_0 = 2,0\ \text{mm}$, $V_0 = 10\ \text{V}$. Calculer f_0. Comparer les valeurs numériques de f_0 et de f_c.

II.B.4) Montrer que le mouvement de l'électron dans le plan Oxy (mouvement transversal) n'est pas borné. Il n'y a donc pas confinement de l'électron au voisinage de O dans le champ quadrupolaire.

Partie III - Mouvement de l'électron dans les champs magnétique et électrique

L'électron est maintenant soumis simultanément au champ magnétique $\vec{B}$ de la Partie I et au champ électrique quadrupolaire $\vec{E}$ de la Partie II.

III.A - Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes Ox, Oy et Oz. On utilisera les constantes ω_c et ω_0.

III.B - Montrer que le mouvement longitudinal suivant l'axe Oz, déterminé à la question II.B.2) n'est pas modifié.

III.C - Pour déterminer le mouvement transversal dans le plan Oxy, on utilise la variable complexe $\underline{u} = x + iy$.

III.C.1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$.

III.C.2) Montrer que l'électron sera confiné autour de O si la pulsation ω_c est supérieure à une certaine valeur ω_{c0} que l'on exprimera en fonction de ω_0. En déduire la valeur minimale B_0 de B qui permet le confinement de l'électron. Exprimer B_0 en fonction de V_0, d, m et q.

III.C.3) On suppose dorénavant $\omega_c \gg \omega_0$, ce qu'indiquaient les valeurs numériques précédentes. Déterminer, dans ce cas, u en fonction de deux pulsations ω_1 et ω_2, $(\omega_1 < \omega_2)$ du temps t et de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 qu'on ne cherchera pas à déterminer (la constante A_1 est associée à la pulsation ω_1 et la constante A_2 à la pulsation ω_2). Exprimer ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0 et ω_c (compte tenu de $\omega_c \gg \omega_0$).

III.C.4) *Application numérique* : calculer les fréquences f_1 et f_2 associées aux pulsations ω_1 et ω_2.

III.C.5) Montrer qu'à chaque pulsation ω_1 ou ω_2 est associé un mouvement circulaire de l'électron.

III.D - Le mouvement de l'électron apparaît donc comme la superposition de trois mouvements : (1) un mouvement circulaire à la pulsation ω_1 dans le plan Oxy ; (2) un second mouvement circulaire à la pulsation ω_2 dans le plan Oxy ; (3) un mouvement sinusoïdal longitudinal à la pulsation ω_0 le long de l'axe Oz.

Compte tenu des valeurs numériques des différentes pulsations et en supposant A_2 nettement plus petit que A_1, tracer l'allure de la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan Oxy, puis l'allure générale de la trajectoire dans l'espace.

(Rq : dans la mesure où une particule chargée rayonne (et donc perd) son énergie dès qu'elle a un mouvement présentant une accélération non nulle, la particule perdra rapidement sa vitesse restera piégée. Pour en savoir plus : voir les deux documents postés sur mon site « Piéger et observer un seul atome » par Claude Cohen-Tannoudji et « Expérience isoltrap »)

PROBLÈME 2 : SPIRE EN ROTATION AUTOUR D'UN DE SES DIAMÈTRES DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME ET CONSTANT

Une spire conductrice circulaire (S), de résistance négligeable, de rayon a, de surface $S=\pi a^2$ et de centre O, tourne à vitesse angulaire ω supposée constante $(\omega>0)$ autour d'un de ses diamètres servant d'axe Oz au problème.

Les axes Ox, Oy et Oz sont munis de la base orthonormée $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La position de (S) est repérée par l'angle $\theta=\omega t$ entre le plan xOz des coordonnées cartésiennes et le plan de la spire. L'orientation du sens positif du courant dans la spire est imposée (voir *figure* 1 et *figure* 2).

Cette spire est placée dans un champ magnétique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oy et noté $\vec{B}=B\vec{u}_y$ (B constante positive).

La spire forme un circuit électrique fermé avec un dipôle X (X sera suivant les questions une résistance ou un condensateur), la spire et X étant en série (on ne se préoccupera pas des problèmes techniques engendrés par la connexion électrique entre la spire en rotation et X). Le coefficient d'auto-induction de la spire (S) sera négligé.

On indique que le moment du couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ (dû aux forces de Laplace) qui s'exerce sur un circuit électrique parcouru par un courant i, dont le vecteur surface est $\vec{S}$ (orienté en fonction de i), et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est donné par la formule $\vec{\Gamma}=\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$ où $\vec{\mathcal{M}}$ désigne le moment magnétique du cadre avec $\vec{\mathcal{M}}=i\vec{S}$.

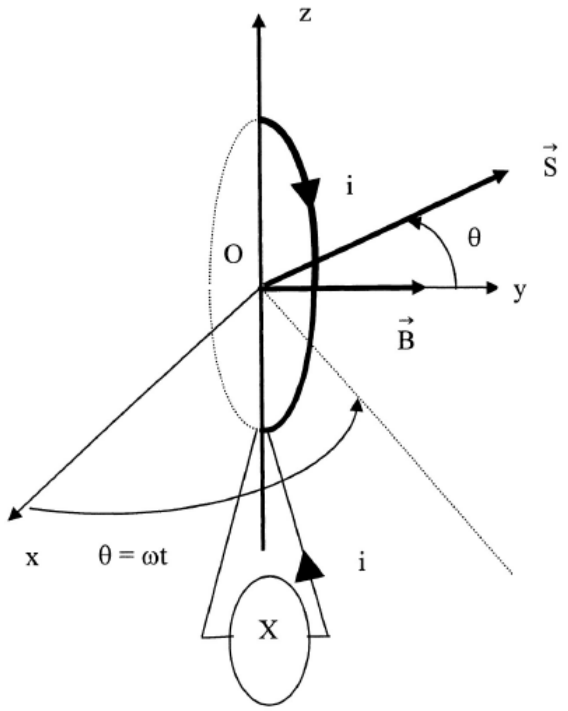

Figure 1 : vue en perspective.

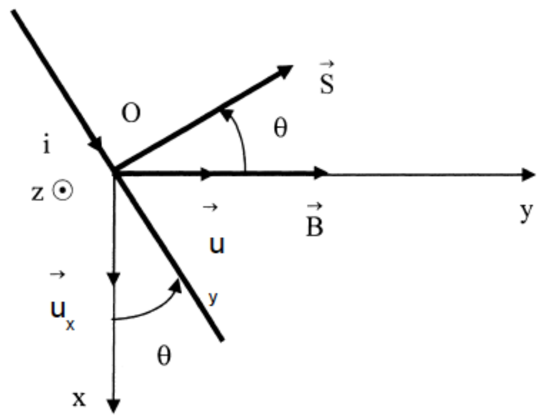

Figure 2 : vue de dessus.

On rappelle que lors de la rotation d'un solide, la puissance P d'un couple de moment $\vec{\Gamma}$ est donnée par la formule $P=\vec{\Gamma}\,\vec{\varpi}$ où $\vec{\varpi}$ représente le vecteur rotation instantanée du circuit.

Les grandeurs moyennes demandées seront rapportées à la période.

1. Expliquer par quel phénomène physique un courant électrique va circuler dans le circuit formé par la spire et le dipôle X .

A. Dipôle résistif

Le dipôle X est un conducteur ohmique de résistance R .

2. Déterminer le courant électrique i qui va traverser R en fonction de B , ω , S , R et t .
3. Déterminer la valeur moyenne $<P_J>$ de la puissance Joule qui en résulte en fonction de B , S , R et ω .
4. Montrer qu'un moteur extérieur devra exercer un couple moteur sur la spire pour maintenir la vitesse de rotation constante (on négligera tout frottement). Quelle sera la puissance moyenne $<P_M>$ de ce couple moteur ?
5. Analyser les transferts d'énergie du dispositif.

B. Dipôle capacitif

X est maintenant un condensateur de capacité C , la résistance de la spire étant toujours négligée. On suppose qu'à $t=0$, le condensateur est déchargé.

6. Déterminer le courant dans le circuit en fonction de B , S , ω , C et t .
7. Déterminer la puissance moyenne $<P_M>$ qu'un moteur extérieur doit exercer sur la spire pour maintenir sa vitesse de rotation constante ?
8. Déterminer la puissance électrique instantanée $P_e(t)$ mise en jeu dans le condensateur en fonction de B , S , ω , C et t . Calculer la valeur moyenne $<P_e>$ de cette puissance.

9. Écrire les bilans de puissance du dispositif (moteur, spire, condensateur) et l'équation différentielle en θ dans le cas général d'une vitesse de rotation quelconque. On désignera par J le moment d'inertie de la spire en rotation par rapport à l'axe de rotation. Étudier les deux cas particuliers suivants:

- Spire tournant à vitesse constante. Retrouver les résultats précédents.
- Spire lancée depuis la position $\theta=0$ avec une vitesse ω_0 sans la présence d'un moteur extérieur. Déterminer $\omega=f(\theta)$. Écrire le bilan de puissance électromécanique. Déterminer les intervalles sur lesquels le condensateur est récepteur (préciser alors d'où provient l'énergie) ou générateur (préciser alors où va l'énergie libérée).

PROBLÈME 3 : RÉFLEXION D'UNE OPPH SUR UNE PLAQUE MÉTALLIQUE

On considère une plaque métallique conductrice, de grandes dimensions considérées comme infinies suivant Ox et Oz, de conductivité γ, de perméabilité μ_0 et de permittivité ε_0, occupant tout le demi-espace $y < 0$, comme le montre la figure 1 ci-dessous .

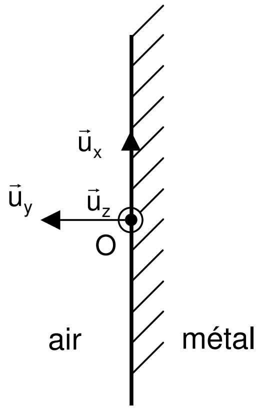

Figure 1

On envoie une OPPH (onde plane progressive harmonique) incidente, de polarisation rectiligne, notée $(\vec{E_i},\vec{B_i})$ *sur cette plaque métallique, le vecteur d'onde de l'onde incidente étant* $\vec{k_i} = -k \cdot \vec{u_y}$ $(k > 0)$. *Le champ électrique associé à l'onde incidente a pour expression :*

$\vec{E_i} = E_0 \cos(\omega t + ky)\vec{u_x}$. *Le trièdre trirectangle Oxyz est direct, l'axe Oy est orienté vers la gauche.*

Données numériques :

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ *F.m*$^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi .10^{-7}$ *H.m*$^{-1}$; $c = 3{,}00.10^{8}$ *m.s*$^{-1}$.

A / REFLEXION SUR UN PLAN CONDUCTEUR PARFAIT

Dans toute cette partie A, la conductivité γ est supposée infinie ; le métal est alors considéré comme un conducteur parfait.

A1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charges et en l'absence de courants.

A2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide. Comment s'appelle ce type d'équation ? Quelle relation existe entre la vitesse de propagation c et les constantes ε_0 et μ_0 ?

A3. Traduire le fait que le champ $\vec{E_i}$ satisfait à cette équation aux dérivées partielles : quelle relation lie ω, k et c ?

A4. Quelle est l'expression du champ magnétique incident $\vec{B_i}$? Préciser son amplitude B_0. Quelle équation de propagation vérifie le champ $\vec{B_i}$?

On cherche une onde réfléchie sous la forme d'une OPPH, de polarisation rectiligne, notée ($\overrightarrow{E_r}$,$\overrightarrow{B_r}$) et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_r}$. En surface du métal (y=0) règnent une densité surfacique de charges σ et un courant surfacique $\overrightarrow{j_s}$, uniformes et non permanents.

A5. Quelles sont les unités de σ et de $\overrightarrow{j_s}$? Que valent les champs électrique et magnétique dans le métal ? Quelles sont les deux relations de passage en y = 0 *?* Quelle composante du champ électrique est toujours continue à la traversée d'une surface ?

A6. Pourquoi les ondes incidentes et réfléchies ont-elles la même fréquence ? Quelle relation lie ici $\overrightarrow{k_r}$ à $\overrightarrow{k_i}$ *?* Détailler le raisonnement.

A7. Etablir l'expression du champ $\overrightarrow{E_r}$ en tout point du plan $y = 0^+$, puis en déduire celles de $\overrightarrow{E_r}$ et de $\overrightarrow{B_r}$ en tout point du ½ espace y > 0.

A8. Que vaut le champ électromagnétique total ($\overrightarrow{E_{tot}}$,$\overrightarrow{B_{tot}}$) résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ? Quelle est sa particularité ?

A9. Quelle propriété particulière possède le plan y = 0 vis-à-vis du champ électromagnétique total ? En déduire les expressions de σ et de $\overrightarrow{j_s}$. Donner une interprétation qualitative des résultats obtenus.

A10. Quelle est l'énergie volumique associée à l'onde incidente ? Même question pour l'onde réfléchie. Comparer les résultats.

A11. Quelle puissance instantanée P_i apportée par l'onde incidente traverse une surface S orthogonale à la direction de propagation? Même question pour l'onde réfléchie (P_R). Comparer ces résultats à ceux obtenus à la question A.10. Commenter.

A12. Comparer les moyennes temporelles de P_i et de P_R ; commenter physiquement.

B / Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal.

En réalité le métal de la plaque de la figure 1 a une conductivité qui n'est pas infinie ce qui permet au champ électromagnétique de pénétrer dans le métal ; il sera noté ($\overrightarrow{E_t}$,$\overrightarrow{B_t}$). Les résultats suivants seront admis :

en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, il vient , lorsque $k\delta << 1$, avec $k = \dfrac{\omega}{c}$,

$$\overrightarrow{E_t} = \sqrt{2}\, k\delta E_0\, e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u_x} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{B_t} = 2\frac{E_0}{c} e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega t + \frac{y}{\delta}\right)\overrightarrow{u_z}\ .$$

Le courant surfacique est alors nul ; dans le métal règnent une densité de courant $\vec{j}$ et une densité de charge $\rho = 0$.

Donnée numérique : $\gamma = 10^7\ S.m^{-1}$.

B1. Quelle est la dimension de δ ? Que représente cette grandeur ? Application numérique : représenter la courbe $\log(\delta)$ en fonction de $\log(\omega)$ pour $1\ rad/s < \omega < 10^6 rad/s$.

B2. Rappeler l'expression -en fonction de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$ - de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière et, en appliquant la loi d'Ohm locale dans le métal, évaluer sa moyenne temporelle .

En déduire la puissance moyenne totale $<P_J>$ dissipée dans la portion de cylindre d'axe Oy, de section S et délimitée par les plans y = 0 et y = - L , avec $L >> \delta$.

B3. Déterminer la puissance moyenne <P_t> rayonnée par l'onde transmise à la travers la section droite d'abscisse y = 0^- ; comparer au dernier résultat de la question B2 ; commenter en détails.
Que remarquerait-on si, la pulsation étant fixée, on faisait tendre la conductivité vers l'infini ? Commenter.

B4. Ecrire la relation de passage en y = 0 pour le champ électrique, et en déduire, pour tout y > 0 , le champ $\overrightarrow{E_r}$ de l'onde électromagnétique réfléchie, puis le champ $\overrightarrow{B_r}$.

B5. Quelle est la puissance moyenne <P_R> rayonnée par l'onde réfléchie à travers une surface S orthogonale à la direction de propagation ?

B6. En limitant l'analyse aux termes de degré inférieur ou égal à 1 en kδ (ne pas oublier que kδ << 1), quelle relation simple obtient-on entre les puissances moyennes rayonnées <P_i> (voir question A12), <P_R> (voir question B5), et <P_t> (voir question B3). Commenter.

RELATIONS DE « PASSAGE »

(TRAVERSÉE D'UNE DISTRIBUTION SURFACIQUE DE CHARGES ET DE COURANTS)

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma(P,t)}{\varepsilon_0}.\vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s(P,t) \times \vec{n}_{12} \end{cases}$$

AIDES NUMÉRIQUES :

$$\frac{1,6}{2.\pi.9,1} \approx 0,028 \qquad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1,6.40}{9,1.17}} \approx 0,10$$