

**DS 3****Conduction thermique  
Electronique numérique  
Thermochimie**

*(Calculettes exceptionnellement autorisées)*

**PROBLEME 1 : FUSIBLES**

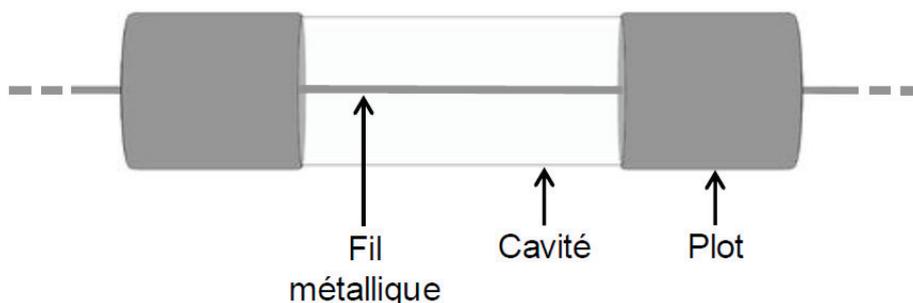
Ce problème traite du fonctionnement de différents fusibles. Aucune connaissance particulière sur les fusibles n'est demandée.

En 1753, à Saint-Petersbourg, le professeur Richman et son assistant étudient les premières machines électrostatiques. Le 6 août, ils sont frappés par la foudre alors qu'ils chargent des condensateurs. L'assistant s'en sort pratiquement indemne, tandis que Richman meurt immédiatement : la décharge électrique a traversé son corps. La communauté scientifique est extrêmement choquée. Il apparaît alors clairement la nécessité de protéger les systèmes électriques et les personnes les utilisant.

C'est Edward Nairne qui fait part pour la première fois de l'utilisation de fils métalliques (qui deviendront l'élément de base d'un fusible) comme moyen de protection lors de décharges de condensateurs. La protection d'un système électrique par un fusible fait appel à un principe de fonctionnement très simple. En situation de fonctionnement normal, le fusible assure le passage du courant. Lors de l'apparition d'un défaut électrique, créant un courant anormalement élevé, le fusible permet la coupure automatique du circuit électrique : le fil métallique constituant le fusible fond en raison de l'apport d'énergie anormalement important du fait du défaut électrique.

L'idée de la protection des systèmes électriques par fusibles s'est imposée formellement avec le double développement de l'électrification et de l'industrie. Dès les premières tentatives, la structure de base des fusibles actuels a été définie avec les éléments essentiels :

- deux pièces de connexion permettant de relier le fusible au reste du circuit électrique ;
- un fil métallique dont le métal constitutif est choisi avec un point de fusion à basse température (typiquement du plomb ou de l'étain) ;
- une cavité qui assure un rôle de protection et qui peut contenir un isolant.



**Figure 0 : Schéma de base d'un fusible**

Il existe aujourd'hui de nombreux types de fusibles ayant le même principe de fonctionnement et les mêmes éléments de base. On retrouve les fusibles sur les installations domestiques, dans l'industrie (principalement pour l'utilisation avec des charges à fort courant d'appel comme les moteurs) ou pour la protection des semi-conducteurs dans l'ensemble des appareils électroniques.

### Données :

- charge élémentaire  $e = 1,60.10^{-19}\text{C}$  ;
- masse de l'électron  $m_e = 9,11.10^{-31}\text{kg}$  ;
- constante de Boltzmann  $k_B = 1,38.10^{-23}\text{J.K}^{-1}$  ;
- constante d'Avogadro  $N_A = 6,02.10^{23}\text{mol}^{-1}$ .

### Données relatives à l'aluminium :

- L'aluminium libère exactement trois électrons de conduction par atome ;
- masse volumique de l'aluminium  $\mu_{Al} = 2,6989\text{g.cm}^{-3}$  ;
- masse molaire atomique de l'aluminium  $M_{Al} = 27,0\text{g.mol}^{-1}$  ;
- capacité thermique massique de l'aluminium  $c_{Al} = 897\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  ;
- enthalpie massique de fusion de l'aluminium  $\Delta h_{fus,Al} = 398\text{kJ.kg}^{-1}$ .

### Caractéristiques de différents métaux :

- température de fusion :  $T_f$
- conductivité thermique :  $\lambda$
- conductivité électrique :  $\sigma$

	Plomb	Argent	Aluminium
$T_f$ (K)	600,7	1235	933,5
$\lambda$ ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )	35,3	429	237
$\sigma$ (unité S.I. « de base »)	$4,81.10^6$	$6,30.10^7$	$3,77.10^7$

On entend par unité S.I. « de base » l'unité non préfixée (exemple : le mètre et pas le centimètre)

### Formule mathématique :

- Laplacien en coordonnées cylindriques :  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

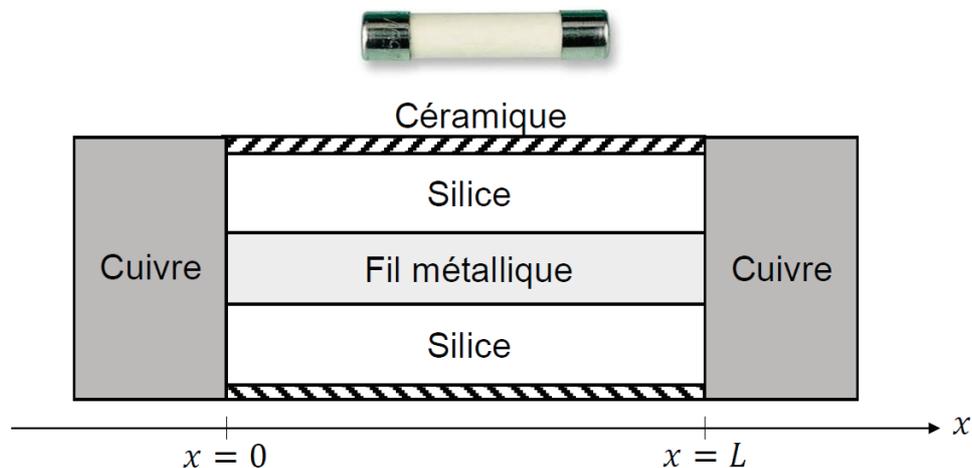
## **B / Étude des fusibles en céramique**

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section  $S$ , de longueur  $L$ . On donne la masse volumique  $\mu$ , les conductivités thermique  $\lambda$  et électrique  $\sigma$ , la capacité thermique massique  $c$  du fil métallique. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température.

Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante  $T_0$ . Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible.

Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.

Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .



**Figure 2 : Fusible en céramique**

On considère que la température ne dépend que de la position et du temps  $T = T(x, t)$ .

**B1.** Rappeler la loi de Fourier. Préciser sa signification physique ainsi que celle de chacun de ses termes. Donner les unités de chaque terme.

**B2.** Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

**B3.** Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

La température de fusion du métal est notée  $T_f$ .

**B4.** Donner la position  $x_{fusion}$  du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale  $I_{max}$  supportée par le fusible.

*Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF, ...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensités maximales admissibles varient. On cherche à déterminer au laboratoire le diamètre  $D$  du fil métallique constituant chaque fusible, de l'ordre du micromètre. On mesure la longueur des fusibles :  $L = 3,0$  cm.*

**B5.** Proposer une méthode optique permettant de déterminer avec du matériel usuel de laboratoire le diamètre des fils métalliques des différents fusibles. Une description rigoureuse du principe de la méthode est attendue.

*Les différents fusibles sont composés du même type de métal. Les mesures pour chacun de l'intensité maximale en fonction de leur diamètre sont effectuées pour  $T_0 = 293$  K et résumées dans le tableau suivant :*

$I_{max}$ (A)	0,8	1,0	2,0	2,5	4,0	5,0	6,3
$D$ ( $\mu\text{m}$ )	57	64	100	114	145	160	188

**B6.** En explicitant votre méthode, déterminer l'élément chimique le plus probable constituant le fil métallique du fusible. Cette question demande de l'autonomie et sera évaluée en conséquence.

### C / Étude des fusibles en verre

*Au laboratoire on dispose aussi de fusibles où le fil métallique est entouré d'air. On doit donc tenir compte de la convection entre le fil métallique et l'air environnant.*

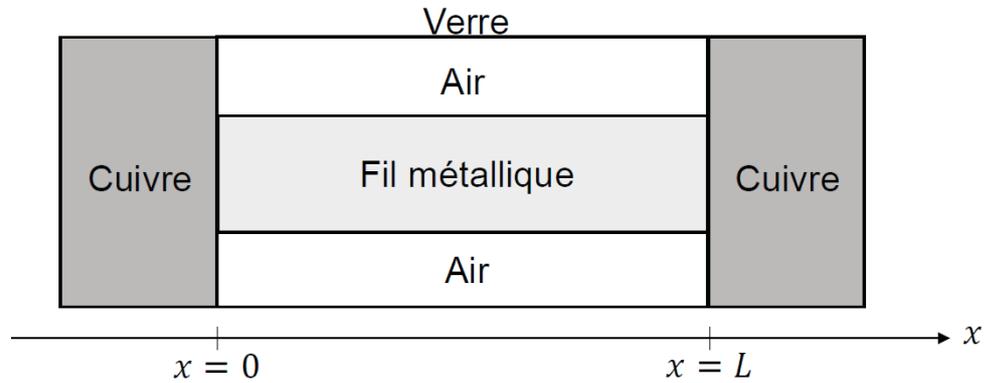
*Les échanges thermiques à l'interface sont modélisés par la loi de Newton. Le flux thermique surfacique cédé à l'air extérieur est  $\vec{j}_{conv} = h(T(x) - T_{air})\vec{u}$  avec  $h$  le coefficient de transfert convectif et  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire suivant la normale extérieure à la surface d'échange.*

*On considère que  $T_{air} = T_0$ .*

*Le coefficient d'échange thermique  $h$  décrit les transferts de chaleur entre le fusible et l'air.*

*Le fil métallique est toujours soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif maintenus à la température  $T_0$ .*





**Figure 3 : Fusible en verre**

On peut montrer que la température du fil métallique ne dépend que de la position  $x$  si  $Bi$  le nombre de Biot (sans dimension) est tel que

$$Bi = \frac{hD}{\lambda} \ll 1,$$

avec :

- $D$  le diamètre du fil métallique ;
- $h$  le coefficient de transfert convectif qui est de l'ordre de grandeur de 10 (unités S.I. « de base ») ;
- $\lambda$  la conductivité thermique du fil métallique.

**C1.** Justifier que le nombre de Biot est sans dimension. Comme le nombre de Reynolds, ce nombre sans dimension permet de comparer deux grandeurs physiques, lesquelles ?

**C2.** Justifier que l'on se trouve ici dans le cas  $Bi \ll 1$ .

On supposera cette condition vérifiée dans tout ce qui suit. La température ne dépend que de la position  $x$  et du temps  $t$  :  $T(x, t)$ . On se place en régime stationnaire.

On pose  $k = \sqrt{\frac{4h}{\lambda D}}$  et  $T_1 = \frac{16I^2}{\sigma \lambda k^2 \pi^2 D^4}$ .

**C3.** Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - k^2(T - T_0 - T_1) = 0.$$

**C4.** Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites.

On montre que  $T$  peut s'écrire sous la forme :  $T(x) = T_0 + T_1 \left( 1 - \frac{ch\left(k\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)}{ch\left(\frac{kL}{2}\right)} \right)$ .

**C5.** Tracer l'allure du profil de température.

**C6.** Quel(s) mode(s) de transfert thermique manque(nt)-t-il(s) à cette étude ?

**Rappel sur les fonctions hyperboliques :**

$$ch(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

$$sh(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$$

- Les scripts seront rédigés en langage Python.
- On suppose que numpy, odeint et pyplot ont été préalablement importés sous Python :

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
```

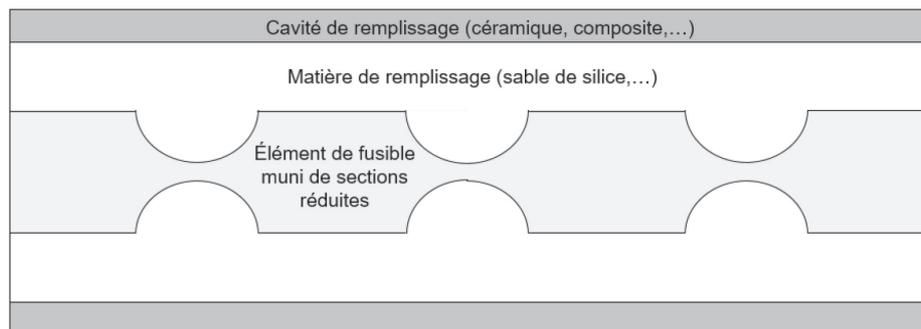
## E / Étude numérique d'un fusible à section variable

Les fils étudiés dans le début du problème ont deux « défauts » :

- ils engendrent des surtensions de coupure extrêmement élevées,
- leurs courants minimaux de coupure sont très importants.

De fait, ils ne sont plus employés que dans les produits de très basse qualité, aucun ne peut être conforme aux normes internationales. Pour résoudre le problème de surtension, il a fallu introduire par endroits des rétrécissements de section. Ces rétrécissements, ou crans, régulièrement espacés permettent une fusion simultanée de tous les crans, d'où une coupure plus rapide.

C'est le principe utilisé par les fusibles limiteurs moyenne tension (3,6 kV à 36 kV) largement utilisés pour la protection de transformateurs, de moteurs ou d'autres récepteurs.

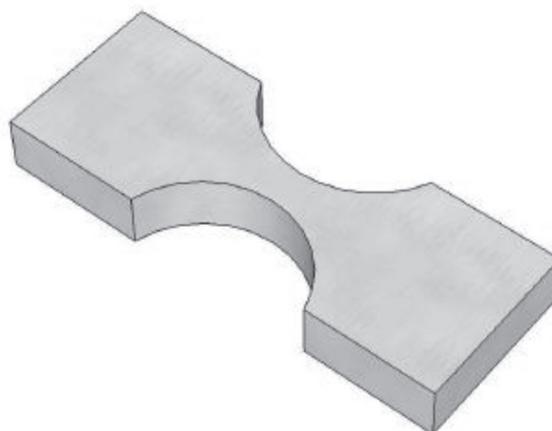


**Figure 5 : Fusible à section variable**

On se propose d'étudier le profil de température dans l'élément fusible de section variable.

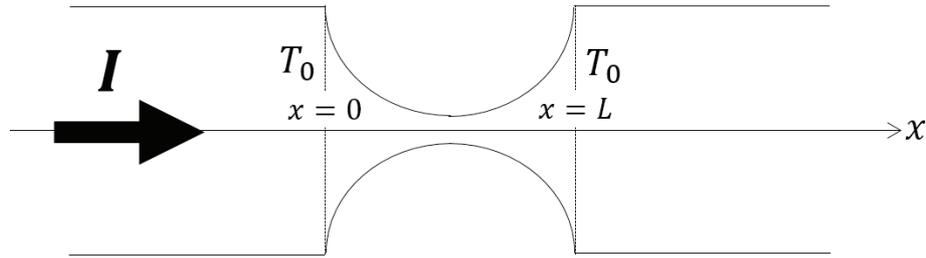
L'élément fusible de type industriel étudié ici est une lame en argent de section variable. Cette lame a une épaisseur  $e = 0,105$  mm dans la direction perpendiculaire au plan de la figure 6, on note  $S_0$  la section maximale de la lame (section dans les zones hors rétrécissement).

La lame conductrice métallique d'argent est parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniformément répartie sur la section du conducteur. La résistivité électrique de l'argent est  $\rho = 1,6 \mu\Omega \cdot \text{cm}$  et sa conductivité thermique est  $\lambda = 429 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Le fil d'argent est entouré de silice isolant, on néglige alors la dissipation de chaleur vers l'extérieur. L'argent fond à la température  $T_f = 1235 \text{ K}$ .



La température du fil est supposée homogène dans toute section perpendiculaire à l'axe. La température en régime permanent est donc de la forme  $T(x)$ .

On s'intéresse à l'effet d'un seul rétrécissement situé entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . On modélise le rétrécissement de la section du fil de la lame par la fonction  $S(x) = S_0 \left(1 - u \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)$ .



**Figure 6 : Un rétrécissement**

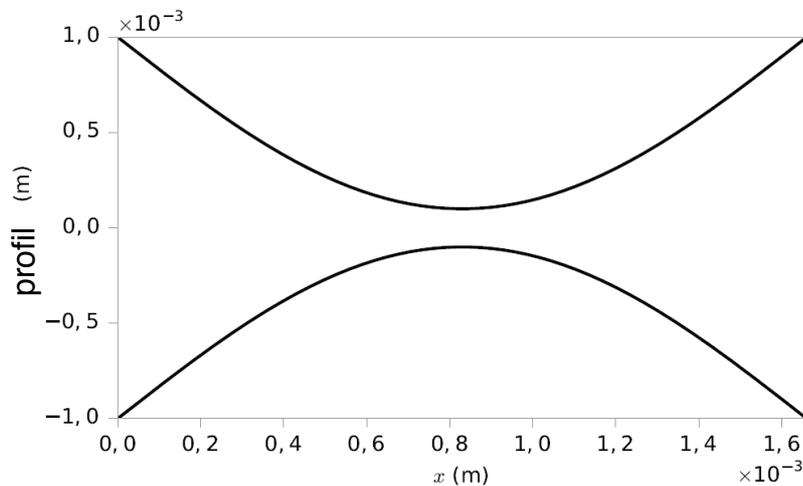
On choisira  $S_0 = 0,105 \text{ mm}^2$  et  $u = 0,9$  et  $L = 1,66 \text{ mm}$ .

On suppose que la température est imposée aux deux extrémités.

On a alors  $T(x = 0) = T(x = L) = 293 \text{ K}$ .

### Tracé de l'allure de la section

- E1.** Comment en python affecte-t-on les valeurs de  $S_0$ ,  $u$ ,  $e$  et  $L$  de l'énoncé aux variables `s0`, `u`, `e` et `L` les représentant ? On affectera leurs valeurs en unités S.I. « de base ».
- E2.** Écrire une fonction `section`, ayant pour paramètre `x` la position sur le fusible, utilisant les variables déjà enregistrées (globales) `s0`, `u` et `L`, et qui renvoie la valeur de la section à la position `x`.
- E3.** En vous aidant de l'annexe 3, proposer un script Python permettant de représenter graphiquement les variations de la largeur de l'élément fusible en fonction de la position  $x$ . On prendra soin de légénder les axes.



**Figure 7 : Profil du rétrécissement en fonction de la position**

### Étude du profil de température

En faisant un bilan d'énergie sur le fil d'argent pour  $x \in [0, L]$  on obtient l'équation différentielle d'ordre 2 non linéaire :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} \frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha}{(S(x))^2}$$

Où  $S'(x) = \frac{dS}{dx}$  et avec  $\alpha = \frac{\rho I^2}{\lambda}$  et  $T(0) = T(L) = T_0$ .

On se propose de déterminer une liste  $L_T = [T_{x_0}, \dots, T_{x_i}, \dots, T_{x_{n-1}}]$  de  $n$  éléments modélisant le profil de température pour des valeurs de  $x$  également réparties entre 0 et  $L$  inclus.

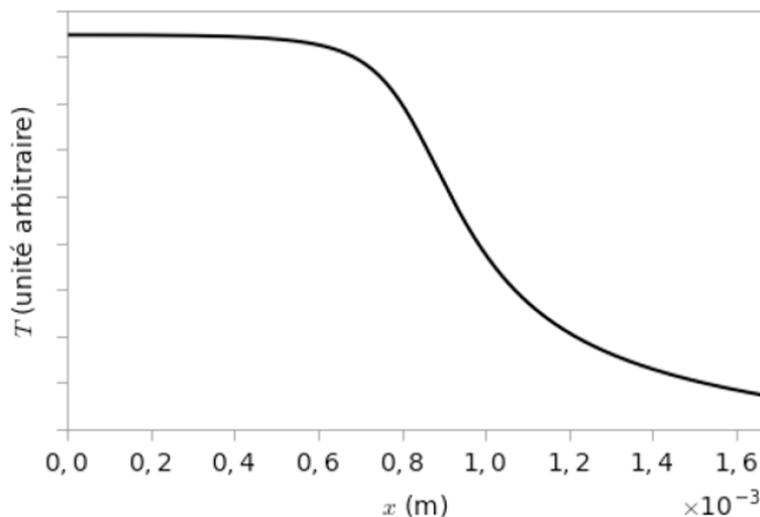
On écrit donc  $T_{x_i} = T(x_i)$ .

- E4.** Donner l'expression de la position  $x_i$  en fonction de  $i$ ,  $n$  et  $L$ .
- E5.** Écrire une fonction `sprimesurs`, ayant pour paramètre la position  $\mathbf{x}$  et qui renvoie la valeur de  $\frac{S'(x)}{S(x)}$ .
- E6.** Expliquer le principe de la méthode d'Euler pour l'intégration numérique d'une équation différentielle non linéaire du type  $\frac{dy}{dx} = f(y(x), x)$  avec comme condition initiale  $y(x_0) = y_0$ .

*Pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 on utilise la fonction `odeint` qui réalise une intégration numérique.  
(Le principe d'utilisation de cette fonction est détaillé en annexe).*

- E7.** En se référant à l'annexe pour la résolution numérique d'une équation du type  $\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(\vec{u}(x), x)$ , préciser l'expression du vecteur  $\vec{u}$  pour le problème étudié ici.
- E8.** En utilisant les notations de l'annexe réécrire dans le cadre du problème la fonction `F` qui renvoie la dérivée seconde de la température pour la position  $\mathbf{x}$ . On fera attention aux arguments attendus. La grandeur  $\alpha$  est supposée déjà enregistrée dans une variable `alpha` et accessible aux différentes fonctions en tant que variable globale.
- E9.** En se référant au programme utilisé en annexe, créer la liste  $L_T$  attendue par le problème en l'enregistrant dans une variable `listeT`. On calculera  $n = 1000$  valeurs de la température entre 0 et  $L = 1,66$  mm et on prendra comme conditions aux limites  $T(0) = T_0 = 293$  K et  $\frac{dT}{dx}(x = 0) = 0$ .

*On trace alors la température (avec une échelle arbitraire) en fonction de la position avec ces conditions aux limites et pour le courant  $I = 100$  A :*



**Figure 8 : Profil de température #1**

- E10.** Pourquoi cette courbe ne répond pas à notre problème ?

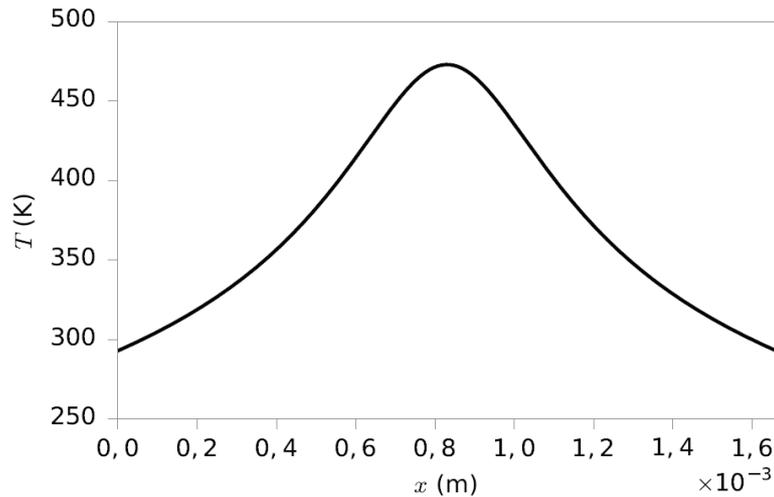
*Pour résoudre ce problème, on doit trouver la bonne condition aux limites sur la dérivée de la température.*

- E11.** Écrire une fonction `Tf(T0, d)` qui prend comme arguments les deux conditions aux limites de la valeur  $T_0$  de la température et de sa dérivée  $d$  en  $x = 0$ , et qui renvoie la valeur de la température en  $x = L$ . Le tableau des valeurs des positions  $x_i$  enregistré dans la variable nommée  $\mathbf{x}$  est supposé accessible en tant que variable globale. Cette fonction pourra être utilisée dans la suite du problème.

- E12.** Écrire une fonction python `Trouve_derivee(T0, Terr, dmin, dmax)` utilisant la méthode de la dichotomie renvoyant l'estimation de la dérivée de la température en  $x = 0$  permettant d'avoir une température de  $T_0$  en  $x = L$ . Cette fonction prend comme paramètre :
- la température  $T_0$  en  $x = 0$  ;
  - l'erreur admise  $Terr$  sur l'évaluation de l'égalité entre les température en  $x = 0$  et  $x = L$  ;
  - les variables numériques  $dmin$  et  $dmax$  entre lesquelles la valeur de la dérivée sera trouvée par dichotomie. On suppose que la valeur de  $\frac{dT}{dx}$  recherchée est dans l'intervalle  $[dmin ; dmax]$ .

Il est à noter que lorsque la dérivée initiale  $\frac{dT}{dx}(x = 0)$  augmente, la valeur de la température finale  $T(x = L)$  aussi.

On dispose maintenant de la valeur de  $\frac{dT}{dx}$  en  $x = 0$  qui permet d'obtenir le profil de température attendu, tracé entre 0 et  $L$  sur la figure 9.



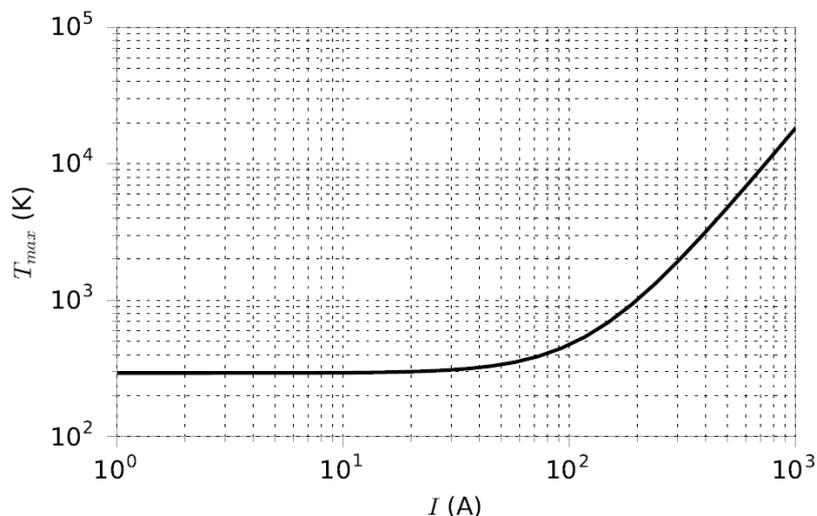
**Figure 9 : Profil de température #2**

- E13.** Commenter la courbe obtenue.

On cherche la valeur de la température maximale observée sur le fusible.

- E14.** Écrire une fonction `Trouve_max(I)` qui renvoie la valeur maximale atteinte sur le fusible. On n'utilisera pas la fonction `max` de python.

On trace alors la température maximale atteinte par le conducteur en fonction du courant qui le traverse, sans prendre en compte la fusion. Cette température est tracée sur la figure 10.



**Figure 10 : Température maximale atteinte en fonction du courant**

- E15.** Commenter la courbe obtenue. Préciser la nature des asymptotes à faible et forte intensités. Estimer le courant nominal d'un tel fusible.

## ANNEXE 1

### Méthode de résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2 à l'aide de la bibliothèque scipy

#### Position du problème :

On cherche à résoudre une équation différentielle d'ordre 2 du type  $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, y(x), x\right)$ .

On dispose des conditions « initiales »  $y(x_0) = y_0$  et  $\frac{dy}{dx}(x_0) = y_0'$ .

#### Principe :

Une équation différentielle d'ordre 2 peut être ramenée à un système d'équations différentielles d'ordre 1.

#### Procédure :

- On se donne la fonction python **F** désignant le second membre de l'égalité  $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, y(x), x\right)$  ainsi que les conditions initiales enregistrées dans les variables **y0** et **y0prime**.

- On ramène l'équation différentielle d'ordre 2 à un système d'équations d'ordre 1.

On pose :  $u_0(x) = y(x)$  et  $u_1(x) = \frac{dy}{dx}(x)$ .

Alors  $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, y(x), x\right)$  devient 
$$\begin{cases} \frac{du_0}{dx} = u_1(x) \\ \frac{du_1}{dx} = F(u_1(x), u_0(x), x) \end{cases}$$

- Vectoriellement, cela se traduit par :

On pose  $\overrightarrow{u(x)} = \begin{cases} u_0(x) \\ u_1(x) \end{cases}$ .

On a donc  $\frac{d\overrightarrow{u}}{dx} = \vec{f}(\overrightarrow{u(x)}, x)$  avec  $\vec{f}(\overrightarrow{u(x)}, x) = \begin{cases} u_1(x) \\ F(u_1(x), u_0(x), x) \end{cases}$  et  $\overrightarrow{u(x=0)} = \begin{cases} y_0 \\ y_0' \end{cases}$ .

- On résout ce système avec la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** grâce au squelette de programme suivant :

#### Programme :

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np

def fonction_f_vecteur(u, x):
    return [u[1], F(u[1], u[0], x)]

# n est le nombre de positions pour lesquels on cherche y

x = np.linspace(x_min, x_max, n)
solution = odeint(fonction_f_vecteur, [y0, y0prime], x)
```

### **Solution :**

La variable renvoyée par `odeint` enregistrée dans `solution` est une matrice de type `ndarray` comprenant les valeurs de la fonction et de sa dérivée :

$$\mathbf{solution} = \begin{bmatrix} [y_0 & y'_0] \\ \vdots & \vdots \\ [y_{n-1} & y'_{n-1}] \end{bmatrix}$$

Ainsi, on accède à la  $i$ -ième valeur de la fonction solution de l'équation différentielle  $y(x_i)$  par `solution[i,0]` et à la  $i$ -ième dérivée par `solution[i,1]`.

## **ANNEXE 3**

### **Exemple de script et de tracé associé avec matplotlib**

*Script :*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0,2*np.pi,30)
y = np.cos(x)
plt.plot(x,y)
plt.xlim((0,2*np.pi))
plt.xlabel("abscisses")
plt.ylabel("ordonnees")

plt.show()
```

*Tracé :*

