

Complément au TD Em1: Ce qui est tombé au concours sur les champs statiques en Physique A

2015

A- Etude de capteurs capacitifs (30%)

Ces capteurs utilisent un condensateur comme composant principal. On rappelle qu'un condensateur est formé de deux armatures conductrices séparées par un isolant électrique. Ici, l'isolant est de l'air, dont les propriétés électriques seront supposées identiques à celles du vide (permittivité ϵ_0).

1) Résultats sur les champs

- a- Donner les quatre équations de Maxwell en régime stationnaire.
- b- Donner l'énoncé du théorème de Gauss de l'électrostatique.
- c- Démontrer ce théorème à partir de la relation de Maxwell-Gauss.

2) Fonctionnement

- On applique une tension U aux armatures du condensateur.
- a- Effectuer un schéma figurant : le condensateur, la tension U (représentée par une flèche) et les charges stockées.
 - b- Rappeler la loi liant la charge du condensateur (Q) et la tension U .
 - c- Expliquer qualitativement pourquoi les charges électriques des armatures se condensent sur les portions d'armature se faisant vis-à-vis (appelées surfaces en regard).

3) Capacité du condensateur plan

On s'intéresse ici au cas d'un condensateur à lame d'air constitué de deux armatures planes métalliques en regard l'une de l'autre (aire de chaque armature : S), parallèles, distantes de e , séparées par de l'air (Fig 1a). Les armatures en regard portent respectivement les densités surfaciques uniformes de charge $-\sigma$ et $+\sigma$. On considèrera les dimensions des armatures beaucoup plus grandes que e , ce qui permet d'utiliser le modèle du condensateur plan illimité (ce qui revient à dire que l'on néglige les effets de bords).

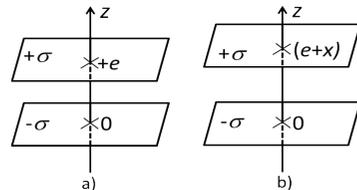


Fig. 1 : Condensateur plan :
a) Position de référence.
b) Position après déplacement de l'armature supérieure d'une quantité algébrique x .

- a- Reproduire et compléter la Fig. 1 a) en dessinant l'allure des lignes orientées du champ électrostatique.
- b- Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace en expliquant la méthode utilisée et en donner une représentation graphique $E(z)$.
- c- En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ (on considèrera $V=0$ sur l'armature de densité surfacique négative).
- d- Représenter graphiquement le potentiel en fonction de z .
- e- En déduire l'expression littérale de la capacité C_{P0} du condensateur plan.

- f- On envisage maintenant la situation où l'une des deux armatures reste fixe, tandis que l'autre est susceptible de se déplacer en translation d'une quantité algébrique x ($x > -e$) par rapport à sa position de référence ($x=0$) (Fig. 1 b)) :
 - i- Donner l'expression de la nouvelle capacité $C_P(x)$ en fonction de C_{P0} , e , et x .
 - ii- Tracer l'allure de $C_P(x)$ pour $x > -e$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables sur les deux axes.
 - iii- On envisage la situation de petits déplacements ($|x| \ll e$) : déterminer une expression approchée au premier ordre de la capacité du condensateur.
 - iv- Tracer la représentation graphique correspondante sur le graphe de la question ii.

4) Condensateur cylindrique :

On considère un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales séparées par de l'air, selon le schéma et la légende de la Fig. 2 a). L'armature interne porte une charge $-Q$ et l'externe une charge $+Q$; ces charges sont supposées uniformément réparties sur les surfaces.

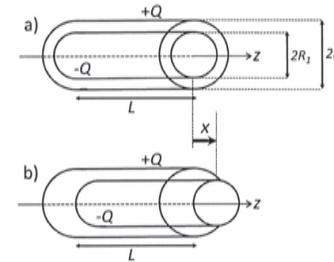


Fig. 2 : Condensateur cylindrique :
a) Position de référence.
b) Position après déplacement de l'armature intérieure d'une quantité algébrique x .

Les données sont : les rayons R_1 et R_2 ; la permittivité ϵ_0 ; la longueur L .

L est beaucoup plus grand que R_2 , de telle sorte que l'on peut adopter un modèle illimité.

- a- Quel est le système de coordonnées spatiale le plus adapté ici ?
- b- Déterminer, en justifiant qualitativement mais de manière précise, la direction, le sens du champ électrostatique et les coordonnées dont dépend son module.
- c- Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ en tout point de l'espace en fonction de Q et des données.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec les expressions littérales dans chaque zone de l'espace :

r	0	R_1	R_2	∞
$\ \vec{E}\ $				

- d- En déduire le potentiel électrostatique V (on impose $V=0$ sur l'armature intérieure), puis la différence de potentiel entre l'armature externe et l'armature interne.
- e- Déterminer C_{C0} la capacité du condensateur sous la forme $C_{C0} = A_c \cdot L$, où L est la longueur des portions de cylindre en regard (ici $L=L$). Expliciter A_c en fonction des données.
- f- L'armature intérieure du condensateur est susceptible de se déplacer d'une distance algébrique x par rapport à sa position de référence, selon le schéma de la Fig. 2 b).

B) Etude d'un capteur inductif (12%)

Dans cette partie, on s'intéresse au fonctionnement d'un capteur inductif de déplacement. Le capteur utilise une bobine d'auto-induction. On s'intéresse dans un premier temps au champ magnétique créé par un solénoïde dans l'air, puis à partir de là au capteur lui-même, obtenu en insérant une partie mobile à l'intérieur du solénoïde.

- 1) On considère un solénoïde de longueur l_0 et de rayon R recouvert de N spires jointives bobinées sur un cylindre rempli d'air, dans lesquelles circule un courant électrique d'intensité I (Fig. 6). On considèrera que les propriétés magnétiques de l'air sont celles du vide et que le champ magnétique sur l'axe du solénoïde est donné en norme par la relation $B = \mu_0(NI/l_0)$. Tous les calculs de champ magnétique seront menés dans l'approximation du solénoïde illimité.

Les données sont : R, N, I, μ_0 et l_0 .

- Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
- Donner l'allure des lignes de champ magnétique d'un solénoïde de longueur l_0 (les directions et sens de ces lignes seront justifiées).
- Démontrer que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde est nul (modèle du solénoïde illimité).
- A partir du théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en tout point intérieur au solénoïde.
- En déduire l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance L_0 du solénoïde, après en avoir rappelé la définition générale.

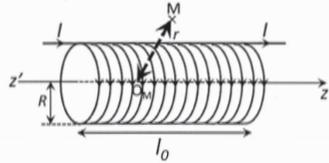


Fig. 6 : Solénoïde de longueur l_0 , constitué de N spires jointives bobinées sur un cylindre de rayon R rempli d'air, dans lesquelles circule un courant I et étudié dans l'approximation du solénoïde infini. r désigne la distance à l'axe d'un point M au niveau duquel on cherche à évaluer le champ B .

2°) Le capteur étudié est représenté sur la Fig. 7. Une partie mobile de longueur l_0 , appelée noyau, peut se déplacer en translation à l'intérieur du solénoïde initialement rempli d'air. Pour la suite de l'étude, nous admettrons les résultats suivants :

- L'insertion d'un noyau à l'intérieur d'un solénoïde conduit à une modification de son coefficient d'auto-inductance : l'inductance en présence du noyau est le produit de l'inductance dans l'air par un facteur multiplicatif δ ($\delta \gg 1$).
- Le coefficient d'auto-inductance du capteur peut être évalué comme celui résultant de la mise en série de deux solénoïdes :
 - Le premier, de longueur x , est rempli d'air.
 - Le deuxième, de longueur $l_0 - x$, contient le noyau.

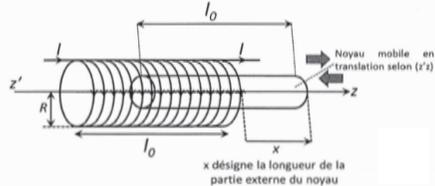


Fig. 7 : Capteur magnétique à insertion d'un noyau au sein du solénoïde de la Fig. 6 initialement rempli d'air.

- Déterminer en fonction de N , l_0 et x , le nombre N_1 de spires de la partie gauche du solénoïde sans noyau et celui (N_2) de la partie droite avec le noyau interne.
- En déduire l'inductance propre de chaque partie puis l'inductance $L(x)$ en fonction de δ , L_0 , l_0 et x .
- Représenter graphiquement $L(x)$ en fonction de x si $0 < x < l_0$.

B.2 - « Mesure du vide » : les jauges de pression UHV

Pour limiter les chocs et les impuretés, on doit imposer une pression dans l'enceinte très faible de l'ordre de 10^{-9} Pa. On se propose d'étudier ici un appareil de mesure des faibles pressions : la jauge de Bayard-Alpert.

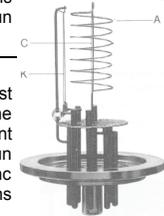


Figure B.4 : Sonde de Bayard-Alpert

Principe de la jauge de Bayard-Alpert :

Une jauge de Bayard-Alpert est dite de type « ionique ». Son principe est basé sur l'accélération d'électron émis par un filament (K) au moyen d'une grille (A) plongée dans le gaz à analyser. Les électrons accélérés, en heurtant les molécules du gaz les ionisent. Les ions ainsi formés sont récoltés par un collecteur (C) situé au centre de la grille. Le nombre d'ions collectés et donc le courant généré dans le collecteur est proportionnel au nombre d'électrons émis et au nombre de particules du gaz, donc indirectement à la pression.

Pour maximiser le nombre de particules heurtés par les électrons, on construit la grille de manière à confiner les électrons dans un mouvement oscillant au sein du gaz : ils sont ainsi certains de finir par heurter une particule du gaz. On se propose ici d'étudier le champ électrique de confinement ainsi créé.

Modèle pour le calcul du champ électrique intérieur à la grille :

La géométrie réelle étant relativement complexe, on utilisera ici le modèle simplifié suivant :

- la grille (A) est un cylindre de longueur infinie et d'épaisseur négligeable et de rayon R_g . Elle est portée au potentiel $V_g = +180V$ uniforme
- le collecteur (C) est un cylindre infini plein de rayon R_c porté au potentiel $V_c = 0V$ uniforme.
- Une enceinte métallique extérieure (E), cylindrique de rayon R_2 est maintenue au potentiel $V_{ext} = 0V$ uniforme.
- L'ensemble (A), (C), et (E), formés des cylindres coaxiaux, possède une symétrie cylindrique.
- un filament rectiligne K est positionné parallèlement à l'axe \vec{e}_z des cylindres, à la distance R_K du centre. On admet que sa présence conserve à l'ensemble {A,C,E,K} la symétrie cylindrique.
- À l'intérieur se trouve un gaz raréfié : le milieu est assimilable au vide.

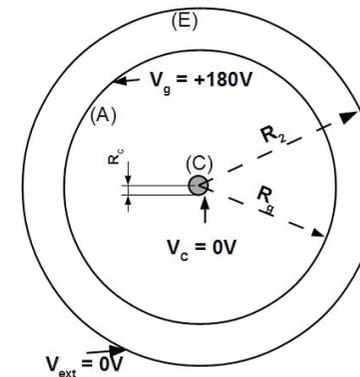


Figure B.5 :

On notera Oz l'axe de symétrie des cylindres (orienté par \vec{e}_z)

Q26. On s'intéresse au champ électrique $\vec{E}(M)$ et au potentiel $V(M)$ en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Q26.a. Faire apparaître sur un schéma les vecteurs unitaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la base cylindrique.

Q26.b. Expliquer, par des arguments qualitatifs précis, pourquoi on a $V(M) = V(r)$ et $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Q27. On cherche à déterminer les grandeurs électrostatiques entre C et A.

Q27.a. Donner l'équation de Maxwell-Gauss.

Q27.b. En déduire l'équation différentielle que vérifie le potentiel $V(r)$ dans cette zone. (On pourra faire intervenir l'expression du laplacien fourni en fin d'énoncé).

Q27.c. Exprimer $V(r)$ en fonction de r, R_g, R_c et V_g .

Q28. Déduire de la question précédente l'expression du champ $\vec{E}(M)$ entre A et C.

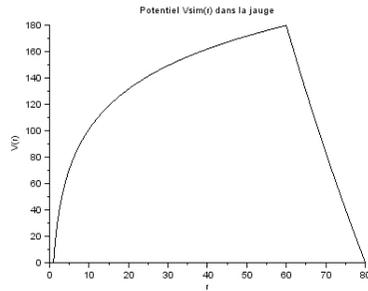


Figure B.6 : Potentiel $V_{\text{sim}}(r)$ (r est en mm)

Q29. L'allure du champ électrique en tout point intérieur de la jauge est donné sur la Figure B.6. représentant $V_{\text{sim}}(M) = V_{\text{sim}}(r)$ en fonction de r .

Q29.a. A partir de ce graphique, donner une estimation de R_c et R_g .

Q29.b. Donner l'équation littérale du potentiel $V(r)$ entre G et E.

Q29.c. En déduire l'expression littérale du champ électrique \vec{E} entre G et E.

Q29.d. Reproduire la Figure B.5 et représenter les lignes de champ électrique en précisant leur orientation.

On s'intéresse à présent, au comportement des électrons émis par K. Ils sont libérés avec une vitesse très faible, K étant au potentiel $V_K = 80V$.

Q30. Estimer numériquement la position R_K du filament (situé entre G et E).

Q31. On fait l'hypothèse d'une émission d'électrons à vitesse initiale nulle ($v_K = 0$). On suppose de plus que l'électron n'est soumis qu'à l'action du champ électrique étudié précédemment.

Q31.a. Montrer que la trajectoire de l'électron est rectiligne.

Q31.b. Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ d'un électron dans le champ électrique \vec{E} .

Q31.c. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron émis se conserve.

Q31.d. Représenter graphiquement $E_p(r)$ puis reporter sur un même graphique E_m

Q31.e. En déduire que l'électron est piégé dans une portion d'espace comprise entre deux cylindres de rayons r_{min} et r_{max} . Estimer les valeurs de r_{min} et r_{max} .

Q32. En réalité, l'électron est émis avec une vitesse faible mais non nulle. On s'intéresse aux électrons émis avec une vitesse perpendiculaire à Oz.

Q32.a. Tant qu'ils ne subissent pas de choc (sur un atome ou sur la grille), les électrons ne sont soumis qu'à l'action du champ électrique. Montrer que le moment cinétique de l'électron sur l'axe Oz, noté L_z , est conservé. On pourra utiliser la grandeur L_z pour la suite.

Q32.b. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m_e v^2 + E_{\text{pot}}(r)$ où $E_{\text{pot}}(r)$ est une fonction ne dépendant que de la position radiale r de l'électron qu'on exprimera en fonction de r, L_z, m_e et $V_{\text{sim}}(r)$

Q32.c. Au moyen d'un traitement énergétique approprié, montrer soigneusement que l'électron va rester confiné autour de l'anode tant qu'il ne subit pas de choc. On ne demande pas de déterminer l'équation de la trajectoire de l'électron.

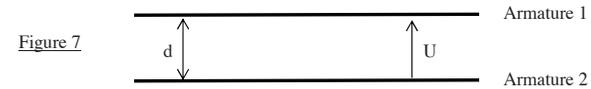
Q33. Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron sur l'axe Oz. Quel est le mouvement de l'électron suivant Oz ? Pour palier à ce problème, on peut rajouter une grille aux extrémités du cylindre.

Pour améliorer la résolution du microscope, on remplace les photons par des électrons, de charge $q = -e$ et de masse m .

On rappelle la relation de De Broglie : $p = h/\lambda$ où p est la quantité de mouvement, λ la longueur d'onde associée à la particule et h la constante de Planck.

B.1 Aspect électrique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (Figure 7) constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de $d = 1 \text{ cm}$ et séparées par du vide quasi-parfait.



B.1.1 On applique entre les armatures une tension positive $U = V_1 - V_2$. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle ?

B.1.2 Ecrire l'équation de Poisson satisfaite par le potentiel V en précisant de quelle équation de Maxwell elle découle ; que devient cette équation dans le vide situé entre les deux armatures ?

Ces dernières étant de grande dimension, le potentiel ne dépend que d'une variable z comprise entre 0 et d , l'origine étant prise au point de départ des électrons.

B.1.3 Exprimer $V(z)$ et en déduire le champ électrique entre les armatures, en fonction de U et d .

B.1.4 On se place dans le cadre de la mécanique classique.

On donne les valeurs numériques approchées : $\frac{e}{m} \approx 2.10^{11} \text{ S.I.}$ et $\frac{h}{m} \approx 7.10^{-4} \text{ S.I.}$

B.1.4.1 Exprimer la vitesse v atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de U, e, m .

Calculer v sachant que $U = 10^5 \text{ V}$. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

B.1.4.2 Calculer la longueur d'onde λ associée aux électrons ainsi accélérés.

B.1.5 On envisage une approche relativiste du mouvement des électrons. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la même façon qu'en mécanique classique, mais les expressions de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement doivent être corrigées ainsi :

$$E_c = (\gamma - 1) m c^2 \quad \text{et} \quad p = \gamma m v \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{et} \quad c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

B.1.5.1 Exprimer γ en fonction de e, U, m, c puis en déduire λ en fonction de h, m, c, γ .

B.1.5.2 Calculer la valeur de γ ainsi que la valeur affinée de λ , sachant que $\sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2 - 1} \approx 0,7$.

B.1.5.3 Conclure d'une part sur le gain en précision du modèle relativiste, et d'autre part sur l'avantage du microscope électronique par rapport au microscope optique.

B.2 Défecteur magnétique

Le rôle d'un défecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.

On suppose qu'un électron de vitesse v_0 arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au vecteur vitesse.

B.2.1 Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

B.2.2 On admet que la trajectoire de l'électron est circulaire.

B.2.2.1 Tracer cette trajectoire, en faisant clairement apparaître les vecteurs \vec{v}_0 et \vec{B} .

B.2.2.2 Déterminer l'expression du rayon du cercle décrit, en fonction de m , v , e , B .

B.2.3 Que devient cette expression dans le cas d'une particule relativiste ?

B.3 Lentille magnétique

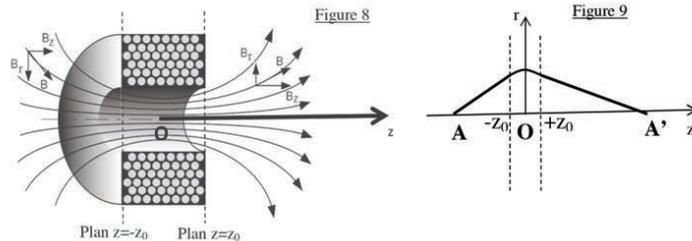
Une lentille magnétique sert à assurer la focalisation du faisceau d'électrons.

Le champ magnétique est créé par un bobinage de spires de faible largeur $2z_0$ parcouru par un courant d'intensité i .

La figure 8 suivante représente les lignes de champ magnétique.

La position de l'électron est repérée par le point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe Oz étant l'axe de symétrie de la bobine centrée sur O.

La figure 9 représente la courbe $r(z)$ faisant apparaître qu'un électron issu d'un point A de l'axe du microscope ressort, après traversée de la lentille, par un point A' du même axe.



On suppose que l'électron est non relativiste, qu'il est soumis uniquement à la force magnétique et que sa vitesse initiale v_0 est quasi colinéaire à l'axe Oz : $\vec{v}_0 \approx v_0 \vec{u}_z$.

B.3.1 Justifier le fait que le champ magnétique soit de la forme : $\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$.

Aucune expression n'est demandée pour B_r et B_z .

B.3.2 Dans quelle zone le champ magnétique est-il le plus intense ?

B.3.3 Montrer qu'à l'intérieur de la bobine, les équations du mouvement de l'électron peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_z \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{e}{m} \left(\frac{dr}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_r \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_r \end{cases}$$

B.3.4 On admet que la résolution du système conduit, pour la fonction $r(z)$, à l'équation approchée suivante : $\frac{d^2 r}{dz^2} \approx -\frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r_0 B_z^2$ où r_0 est la valeur de r à l'entrée et à la sortie de la lentille.

En remarquant que $\left(\frac{dr}{dz} \right)_{-z_0} \approx -\frac{r_0}{OA}$ et $\left(\frac{dr}{dz} \right)_{+z_0} \approx -\frac{r_0}{OA'}$, déduire de l'équation précédente, que

\overline{OA} et $\overline{OA'}$ sont liés par la relation de conjugaison d'une lentille et préciser sa distance focale image f' en fonction de e , m , v_0 et de l'intégrale $I = \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2 dz$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

B.3.5 La tension accélératrice U étant fixée, sur quel(s) paramètre(s) peut-on agir pour influencer sur f' ?

Erratum : partie manquante dans l'énoncé 2015 (A4 f à h)

On rappelle que les charges se condensent sur les portions d'armatures en regard. Déterminer l'expression littérale de la capacité $C_C(x)$ associée à une position x donnée du cylindre intérieur en fonction de C_{C0} , L , et x .

g- Tracer l'allure de $C_C(x)$ en positionnant correctement les grandeurs remarquables (pentes et valeurs sur les axes).

h- Dans la perspective de la mesure d'un déplacement x , quelles sont les différences notables entre $C_P(x)$ et $C_C(x)$?