

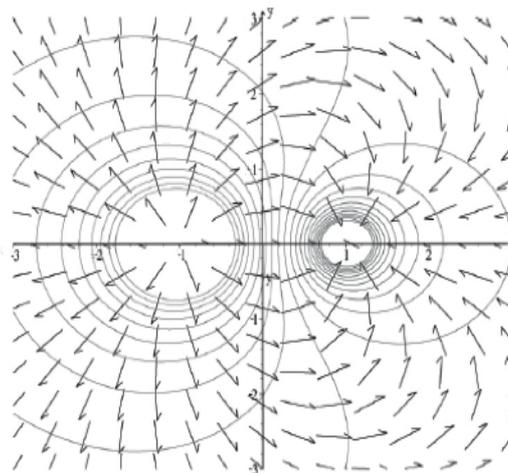
## TD Em1 : Champs statiques créés par des distributions diverses

### Exercice 1A : Lecture d'une carte de champ

On considère un doublet de charges  $q_A$  et  $q_B$  placées respectivement aux points  $A(-1, 0)$  et  $B(+1, 0)$  du plan  $(Oxy)$ .

Sur la carte de champ représentée, les lignes courbes correspondent aux équipotentielles (régulièrement réparties en valeurs de potentiel) et les flèches indiquent l'orientation de la ligne de champ locale.

1. Quels sont les signes des charges  $q_A$  et  $q_B$  ?
2. Quelle est la charge la plus grande en valeur absolue ?
3. Sachant que le rapport des charges est égal en valeur absolue à 2, montrer que l'équipotentielle  $V = 0$  correspond dans le plan  $(Oxy)$  à un cercle  $C$  dont on déterminera son rayon  $R$  et son centre  $C$ .



### Exercice 2A : Modèle de membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan  $yOz$  ; l'axe  $Ox$  est orienté vers l'extérieur de la cellule (vers l'électrolyte). Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse  $x$ .

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique (en général négatif).

On schématise le potentiel par la fonction  $V(x)$  suivante :

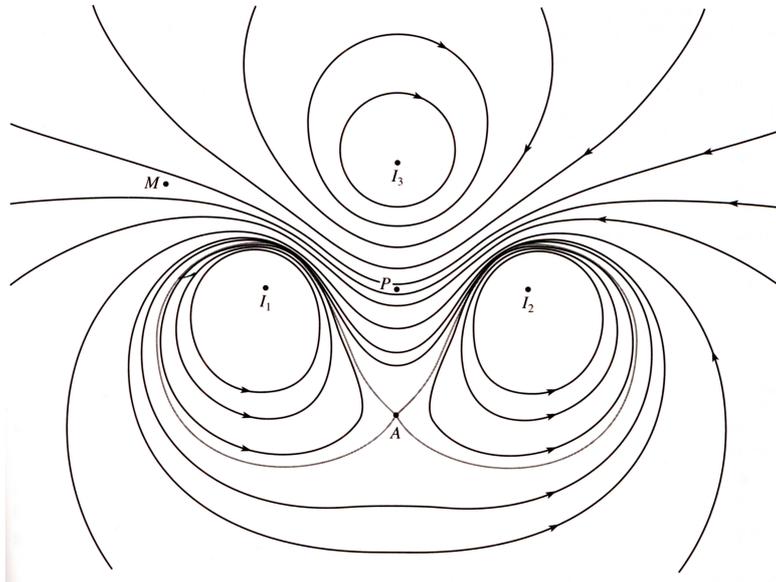
$$\begin{cases} x \leq 0 & V(x) = -V_0 \\ x > 0 & V(x) = -V_0 \cdot e^{-\frac{x}{a}} \end{cases}$$

où  $V_0$  est une constante positive homogène à un potentiel et où  $a$  est une distance.

1. Calculer le champ électrique en tout point.
2. Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe  $Ox$  et de base  $S$ , limitée par les plans d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ . En déduire la densité volumique de charge  $\rho$  en tout point. Retrouver cette expression par application de l'équation de Maxwell-Gauss puis par l'équation de Poisson. Quel est le signe de  $\rho$  ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide (quels sont les porteurs de charge présents) ?
3. En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge  $\sigma$  présente sur la surface d'équation  $x=0$ .
4. Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe  $Ox$  et de base  $S$  s'étendant indéfiniment le long de l'axe  $Ox$  (de  $-\infty$  à  $+\infty$ ). Commenter

### Exercice 3A : Lignes de champ magnétique

Trois fils infiniment longs parallèles sont parcourus par des courants permanents d'intensité  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Les lignes du champ magnétique sont représentées sur la figure.



1. Quelle est la valeur de  $\vec{B}$  au point  $A$ ?
2. Que peut-on dire de  $I_1$  et  $I_2$ ?
3. On mesure un champ magnétique de 0,01 T en  $M$ . Estimer la valeur du champ en  $P$ .

### Exercice 4A: Calculs de Champs E et potentiel V par Gauss en symétrie sphérique

Une boule de centre  $O$  et de rayon  $R$  contient des charges dont la densité volumique  $\rho$  est homogène.

- 1 - Déterminer la direction du champ  $\vec{E}$  et la variable dont dépend la norme de  $\vec{E}$ .
- 2 - Calculer en tout point de l'espace le champ  $\vec{E}(M)$ . Représenter la norme de  $\vec{E}$  en fonction de la variable d'espace.
- 3 - En déduire le potentiel  $V(M)$  en tout point de l'espace<sup>1</sup>. Tracer la courbe représentant  $V(M)$  en fonction de la variable d'espace.

À l'intérieur de la boule se trouve une cavité sphérique creuse de rayon  $R' < R$ .

- 4 - Supposons les deux sphères concentriques. Déterminer le champ  $\vec{E}(M)$  en tout point de l'espace sans avoir recours au théorème de Gauss.
- 5 - On suppose maintenant que le centre des deux sphères est distant de  $OO' = a < R'$ . Déterminer le champ électrique dans la cavité.

### Analogie gravitationnelle

$$\vec{g} = -\frac{G.M}{r^3} \vec{r}$$

1. Une sphère de masse  $M$  crée un champ de gravitation :

Par analogie coulombienne, comment s'écrit le potentiel  $\phi$  dont dérive ce champ de gravitation ? Quelle est sa relation à l'énergie potentielle de gravitation ? Que vaut la divergence de  $\vec{g}$  ? Quelle est la densité moyenne de la terre si on prend  $M=6.10^{24}$  kg et  $R=6400$ km ?

Si la répartition des densités était multicouches tout en restant à symétrie sphérique, pourrait-on s'en rendre compte par observation du champ gravitationnel extérieur ?

S'il y avait un vide sphérique à la place du noyau, quel serait le champ gravitationnel à l'intérieur ?

## Exercice 5A : Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), dont la longueur des génératrices en regard est  $h$ . On néglige les effets de bord.

1) a) Déterminer le vecteur champ électrique en un point  $M$  situé à la distance de  $r$  de l'axe ( $R_1 < r < R_2$ ).

b) En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur.

Application numérique :  $R_2 = 20$  cm,  $R_1 = 10$  cm,  $h = 50$  cm.

c) Cas particulier où  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ ,

2) Pour éviter une étincelle destructive, le champ électrique entre les armatures ne doit pas dépasser la valeur  $E_0$ . Quelle est la d.d.p. maximale  $V_0$  que l'on peut appliquer entre les armatures ?

Application numérique :  $E_0 = 3$  MV/m. Calculer  $V_0$ .

3) La d.d.p.  $V_0$  étant insuffisante, on peut remplacer l'armature intérieure de rayon  $R_1$  par une armature de rayon  $R_0$ , sans changer les autres caractéristiques géométriques de ce condensateur. Quel rayon  $R_0$  doit-on choisir pour que  $V_0$  ait la valeur la plus grande possible ?

Application numérique : Calculer  $R_0$  et  $(V_0)_{\max}$ .

## Exercice 6A : Bobines d'Helmholtz

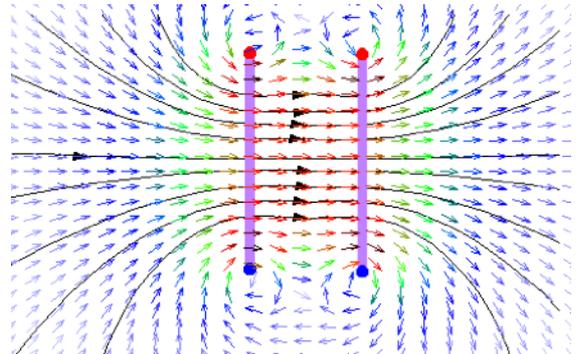
Le champ magnétostatique de deux bobines d'Helmholtz est représenté ci-contre

Quelle propriété a le champ entre les bobines ? Justifier !

Représenter les plans (ou axes) de symétrie et d'anti-symétrie du champ  $B$  ?

Représenter les plans (ou axes) de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution des courants ?

Sont-elles parcourues par des intensités différentes ? Indiquer leur sens.



## Exercice 7A : Décharges d'orage

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon  $R = 6,4 \cdot 10^3$  km, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative  $-Q$  uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon  $R + h$  ( $h = 60$  km) porteuse d'une charge  $+Q$ . Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

1 - Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.

2 - Calculer le potentiel  $V$  de l'ionosphère.

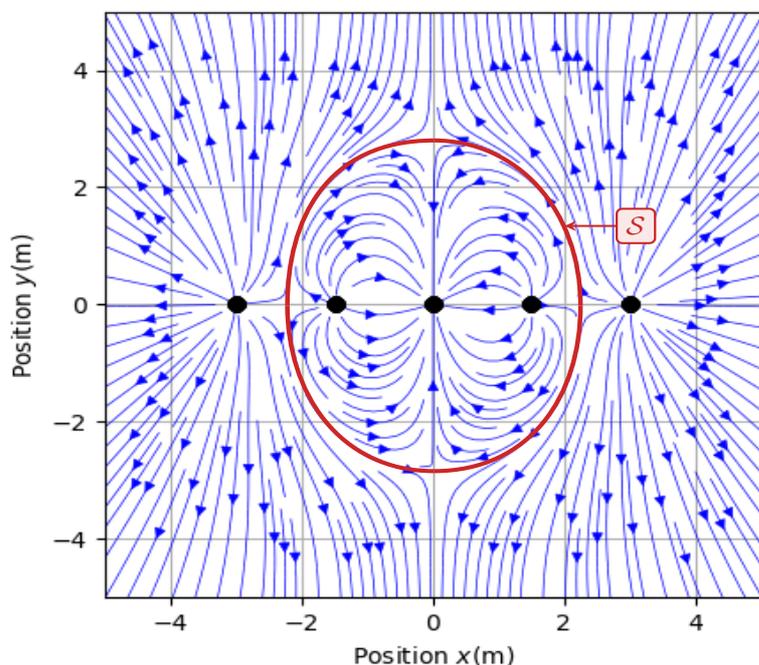
3 - Déterminer la capacité  $C$  de ce condensateur.

4 - Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. Calculer  $C$  numériquement.

5 - Un éclair correspond à un courant moyen de 30 kA pendant 25 ms. Quelle est sa puissance ?

## Niveau B

### Exercice 1B : Détermination de charges ponctuelles par lecture d'un champ E



On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées 1 à 5 de gauche à droite. La surface  $\mathcal{S}$  sera discutée dans les questions.

- 1 - Donner le signe de chacune des charges.
- 2 - Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges  $q_4$  et  $q_5$  en fonction des autres.
- 3 - On admet que le champ est nul en tout point de la surface  $\mathcal{S}$  : comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?
- 4 - En déduire  $q_3$  en fonction des autres charges.

### Exercice 2B : Atome d'hydrogène : Modèle de Yukawa

Le potentiel électrostatique créé par un atome d'hydrogène supposé à symétrie sphérique peut être décrit par le potentiel de Yukawa,

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/a}}{r}.$$

Cet exercice propose d'interpréter cette forme.

- 1 - Étudier les cas limites  $r \ll a$  et  $r \gg a$ . Interpréter les résultats.
- 2 - Déterminer le champ électrostatique associé.
- 3 - Déterminer la charge  $q(r)$  se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$ .
- 4 - En déduire la présence d'une charge ponctuelle en  $O$ . Que modélise-t-elle ? Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace. Interpréter.

Dans une approche quantique de l'atome, l'électron ne peut plus être décrit comme une particule ponctuelle parfaitement localisée en un point  $M$  mais par une fonction d'onde, qui traduit la probabilité de le détecter autour de  $M$  : on note  $P(M) d\tau$  la probabilité de détecter l'électron dans un volume infinitésimal  $d\tau$  centré sur le point  $M$ . La densité volumique de probabilité de présence  $P(M)$  est reliée à la densité volumique de charge  $\rho(M)$  par

$$\rho(M) = -eP(M).$$

- 5 - Exprimer la densité volumique de charge  $\rho(r)$  et en déduire  $P(r)$ .
- 6 - En exploitant la question 3, montrer que la probabilité  $dP = p(r) dr$  de trouver l'électron dans une coquille sphérique comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  s'écrit

$$dP = \frac{4\pi r^3}{a^2} e^{-r/a} dr.$$

Montrer que  $p(r)$  est maximale en  $r = a$ . Que représente physiquement  $a$  ?

Donnée : pour  $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$ ,  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r)$ .

### Exercice 3B : Champ magnétostatique créé par une bobine torique

Une bobine torique est constituée de  $N$  ( $\gg 1$ ) spires jointives régulièrement enroulées sur un tore (ou un pneu) d'axe  $Oz$  et parcourues par la même intensité  $I$ . Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par la bobine torique.



### Exercice 4B : Gravure ionique

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.

Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système de trois grilles métalliques portées à des potentiels différents contrôlables indépendamment les uns des autres, représenté figure 1. On suppose les potentiels tels que  $V_2 < V_3 < V_1 = 0$  et on admet que le champ électrique est nul sur chaque grille, et qu'il est également nul pour  $x < 0$  et pour  $x > d_0 + d_1$ .

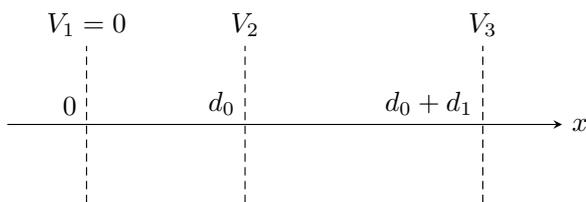


Figure 1 – Dispositif de contrôle du courant ionique.

1 - Déterminer le potentiel  $V(x)$  en tout point de l'espace lorsque seules les grilles sont présentes.

Considérons un cation de masse  $m$  et de charge  $e$  placé sans vitesse à proximité de la grille 1.

2 - Déterminer la vitesse  $v(x)$  de l'ion en fonction du potentiel  $V(x)$  et montrer qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération durant le trajet de la grille 1 à la grille 3.

3 - Déterminer sa vitesse en sortie du dispositif. Quelle(s) grille(s) permettent de la contrôler ?

On considère maintenant que le dispositif est traversé par un flux continu, constitué de nombreux ions (densité volumique  $\rho(x)$ ) émis dans les mêmes conditions que précédemment. Tous ces ions se propagent dans la direction  $x$ . L'équation de conservation de la charge permet de montrer que le vecteur densité de courant s'écrit  $\vec{j} = J_0 \vec{u}_x$  avec  $J_0$  une constante. La présence de ces ions modifie le potentiel électrique par rapport à la situation où les grilles étaient seules.

4 - Montrer que le potentiel  $V(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0.$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à

$$(-V)^{3/4} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4} x$$

5 - Montrer que jouer sur  $V_2$  permet de contrôler le flux  $J_0$  sans changer la vitesse des cations en sortie du dispositif.

## Exercice 5B : Analogie gravitationnelle ...et science fiction

### RESSORT GRAVITATIONNEL

1. Par des analogies convenablement choisies, justifiez la forme du théorème de Gauss gravitationnel sous forme locale

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = -4\pi G\rho$$

où  $\vec{g}$  est le champ de gravitation,  $G$  la constante universelle de gravitation et  $\rho$  la masse volumique

2. En déduire l'expression du champ de gravité en tout point d'une boule de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$  uniforme.
3. On considère une planète de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$ . On creuse un tunnel qui la traverse de part en part en passant par le centre. On supposera le tunnel suffisamment fin pour ne pas perturber la symétrie du problème. On lâche à un bout du tunnel une bille de masse  $m$ . Déterminez son mouvement.

### L'ÉTOILE DE LA MORT

On cherche à déterminer l'énergie nécessaire à désintégrer une planète.

1. On considère une boule de rayon  $r$ . Quel volume faut-il lui apporter pour augmenter son rayon de  $dr$ ? Quelle masse  $dm$  du matériau ce volume représente-t-il?
2. On considère un système formé de la masse  $dm$  à l'infini et de la boule de rayon  $r$ . Exprimez l'énergie potentielle du système en fonction de  $E_p(r)$ , énergie potentielle d'une boule de rayon  $r$  et de masse volumique  $\rho$ .
3. On répartit à présent la masse  $dm$  sur la surface de la boule. Déterminez l'expression de  $E_p(r + dr)$  en fonction de  $E_p(r)$  et de  $dr$ . En déduire une équation différentielle vérifiée par  $E_p(r)$ . En déduire l'énergie potentielle de la boule.
4. Calculez l'énergie nécessaire pour dissloquer une planète semblable à la Terre.
5. Dans l'épisode IV de Star Wars (un nouvel espoir), on peut estimer l'énergie libérée par l'Étoile de la mort pour détruire Alderaan (qu'on supposera semblable à la Terre) à environ  $10^{37} J$ . Comment expliquer la différence avec le résultat précédent?