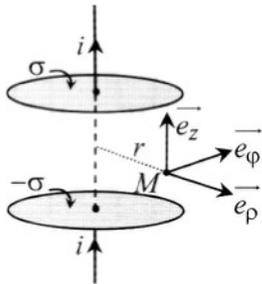


TD Em2 : Champs variables. Ondes électromagnétiques

EXERCICE 1 : Condensateur plan à armatures circulaires dans l'ARQS

On considère un condensateur plan formé de deux armatures métalliques circulaires de rayon a , de même axe (Oz) et séparées l'une de l'autre par un diélectrique d'épaisseur e assimilable au vide (on prendra sa permittivité diélectrique relative égale à l'unité : $\epsilon_r = 1$). Ce condensateur est soumis à une tension variable de façon sinusoïdale à la pulsation ω de sorte que l'armature supérieure porte une densité surfacique de charge positive $\sigma(t)$ et l'armature inférieure porte une densité surfacique de charge négative $-\sigma(t)$. La variation temporelle du champ électrique crée un champ magnétique qui, à son tour, crée un champ électrique variable se superposant au premier et ainsi de suite... On fait pour l'instant l'hypothèse qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme



$\vec{E}_0 = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, hypothèse dont on cherche ici à déterminer le domaine de validité. On néglige les effets de bords et on se place dans les coordonnées cylindriques (r, φ, z) d'axe (Oz) rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. On rappelle qu'en cylindrique, l'opérateur divergence appliqué à \vec{E} s'écrit :

qu'en cylindrique, l'opérateur divergence appliqué à \vec{E} s'écrit :

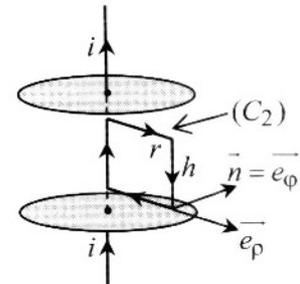
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

1. Justifier que le champ est axial et qu'il ne dépend, a priori, que de r . Quel est alors le cadre de validité de l'expression $\vec{E}_0 = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ du champ dans l'espace entre les armatures ?
2. a) On se place dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ électrique uniforme. Montrer que la variation au cours du temps du champ électrique \vec{E}_0 crée un champ magnétique $\vec{B}_1(M, t)$. En identifiant les sources de $\vec{B}_1(M, t)$, et en analysant précisément leurs symétries, déterminer la direction de $\vec{B}_1(M, t)$.
b) En intégrant $\vec{B}_1(M, t)$ sur un contour fermé orienté, judicieusement choisi (il sera utile d'examiner les invariances des sources de \vec{B}_1), donner l'expression de $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de $\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$, en un point M à la distance $r = OM$ de l'axe, en distinguant les cas $r < a$ et $r > a$.
- c) Dédire de ce qui précède que tout se passe comme si le champ $\vec{B}_1(M, t)$ était créé par un fil rectiligne d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ que l'on exprimera en fonction de a et de $\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$ et dont on précisera le sens. Que peut-on en conclure quant à la continuité des lignes de courant dans l'ARQS dans un circuit comportant un condensateur ? On rappelle que dans l'ARQS, le champ magnétique créé au point M par un fil d'axe (Oz) transportant un courant $i(t)$ est donné par $\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$ et que par conservation de la charge, l'intensité du courant s'écrit $i(t) = -\frac{dq}{dt}$ où q désigne la charge de l'armature de laquelle le courant « sort ».

3. On cherche à présent la condition de validité de l'hypothèse d'uniformité du champ électrique. Pour cela, on tient compte du champ électrique induit par la variation temporelle de $\vec{B}_1(M, t)$. Ce champ apporte, par rapport au champ $\vec{E}_0(t)$ uniforme, une correction $\vec{E}_2(M, t)$ que l'on désire évaluer. On note $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ le champ total entre les armatures. On néglige le champ magnétique créé par la variation temporelle de \vec{E}_2 , de sorte que le champ magnétique se réduit en première approximation à $\vec{B}_1(M, t)$.

a) Écrire l'équation de Maxwell-Faraday dans l'espace entre les armatures. En déduire que \vec{E}_2 est axial. Justifier, de plus, qu'il ne dépend que de r .

b) On désigne par (C_2) le contour rectangulaire contenu dans un plan méridien et orienté de sorte que la normale à la surface rectangulaire s'appuyant sur ce contour soit $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$. Justifier le choix de ce contour. En évaluant la circulation de \vec{E}_2 sur (C_2) , donner l'expression de \vec{E}_{tot} en fonction de $\vec{E}_0(t)$, $\vec{E}_2(r=0, t)$ et ω . À quelle condition sur ω le champ total est-il uniforme ? Quel est le cadre de cette approximation, quelle différence peut-on faire par rapport au régime stationnaire ? Pour un condensateur à 1 MHz avec des armatures de rayon $a = 1$ cm, le champ est-il uniforme ? Conclure sur la validité de la notion de capacité d'un condensateur dans le cadre de cette approximation.



EXERCICE 2 :

- Soit un solénoïde de section quelconque, infiniment long et comportant n spires par unité de longueur. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), lorsque les spires sont parcourues par un courant d'intensité I , le solénoïde crée un champ magnétique nul en tout point extérieur au solénoïde et égal à $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}$ en tout point intérieur au solénoïde (μ_0 désigne la perméabilité du vide et \vec{e} un vecteur unitaire colinéaire à l'axe du solénoïde).

- La densité volumique d'énergie magnétique $E_{m,vol}$ due à un champ magnétique \vec{B} est

$$\text{donnée par : } E_{m,vol} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Première partie : Champ magnétique créé par un tore et passage au solénoïde infini

1/ Énoncer le théorème d'Ampère. On veillera à expliquer soigneusement la signification des différents termes qui apparaissent dans cet énoncé.

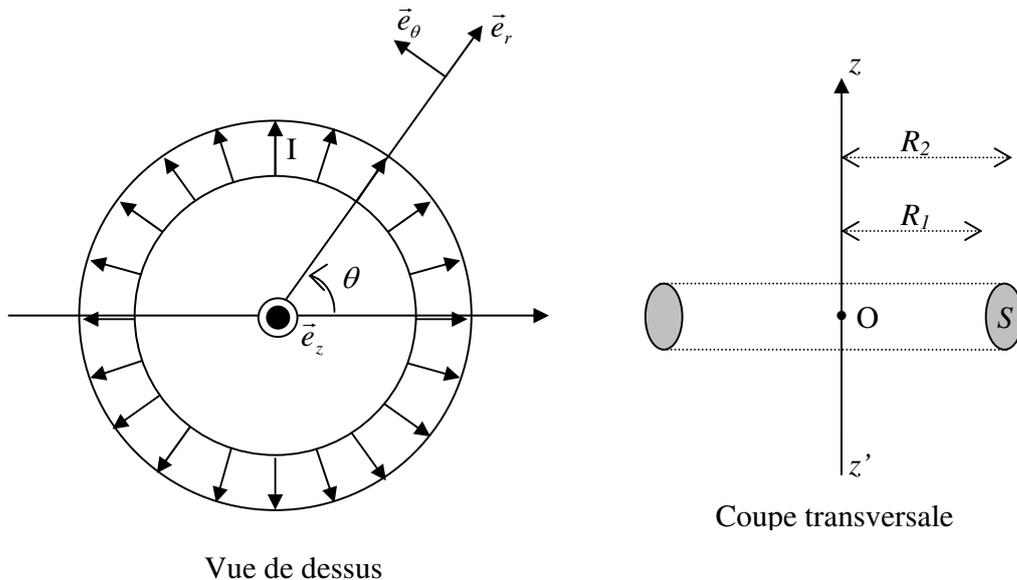
Quelle est l'équation de Maxwell qui permet de démontrer ce théorème ? Écrire cette équation.

On désire dans les questions qui suivent, retrouver l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini à partir de l'étude d'un tore.

Un tore est engendré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe (Oz) . Un fil conducteur est régulièrement enroulé sur le tore et forme une bobine de N spires parcourues par un courant I .

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .

Soit R_1 le rayon intérieur du tore et R_2 le rayon extérieur.



2/ Symétries

Etudier les symétries et invariances de la distribution de courant. En déduire que le champ magnétique se met sous la forme $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$ où $B(r, z)$ est une fonction qui ne dépend que des variables d'espace r et z .

3/ Expression du champ magnétique

En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On distinguera les deux cas où le point M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du tore.

4/ Cas d'un solénoïde infini

En remarquant que le tore précédent se comporte comme un solénoïde infini lorsque son rayon tend vers l'infini, justifier l'expression, rappelée précédemment, du champ magnétique créé par un solénoïde infini en tout point de l'espace.

Deuxième partie : Inductance d'un solénoïde

On désire dans cette partie déterminer l'inductance d'un solénoïde de deux manières différentes.

On considère un solénoïde de longueur l constitué de N spires régulièrement espacées, supposées jointives, de section S . Sa longueur l est très grande devant ses dimensions latérales et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini.

Les spires du solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité i .

5/ Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant le flux propre

En précisant clairement les orientations choisies pour le calcul, déterminer le flux Φ_0 du champ magnétique \vec{B} calculé précédemment à travers une spire du solénoïde. En déduire le flux propre Φ_{propre} du champ magnétique à travers le solénoïde.

En déduire l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0 , l , N et S .

6/ Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant l'énergie magnétique

6.1/ Soit un solénoïde d'inductance L et parcouru par un courant i variable au cours du temps.

En négligeant la résistance du solénoïde et en utilisant la convention récepteur que l'on précisera, rappeler l'expression de la tension u_L aux bornes du solénoïde précédent. On exprimera u_L en fonction de L et i .

6.2/ En écrivant la puissance électrique instantanée mise en jeu dans la bobine, en déduire l'expression, en fonction de L et i , de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde.

6.3/ En considérant l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique rappelée au début du problème, déterminer une autre expression de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde. En déduire l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0 , l , N et S .

Quatrième partie : Champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

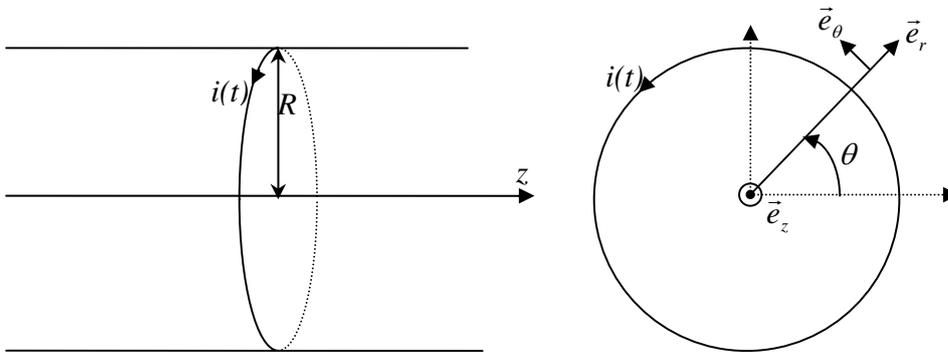
9/ Champ électrique à l'intérieur d'un solénoïde

On considère un solénoïde circulaire de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Sa longueur est très grande devant ses dimensions latérales et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini.

Les spires du solénoïde sont parcourues par une intensité sinusoïdale de pulsation ω :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .



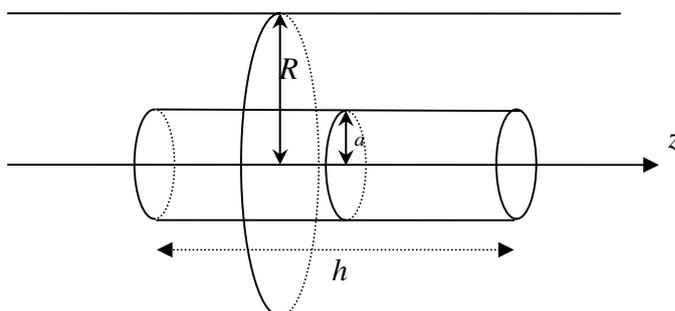
9.1/ Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, qu'un champ électrique \vec{E} est nécessairement créé par le solénoïde.

9.2/ En admettant que le champ électrique est orthoradial (dirigé suivant le vecteur \vec{e}_θ) et ne dépend que de r , déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} créé par le solénoïde en tout point M de l'espace en fonction de μ_0 , n , I_0 , ω , r et t .

10/ Introduction d'un conducteur dans le solénoïde

Un cylindre métallique de conductivité γ , de rayon a et de longueur h très grande par rapport à a est placé à l'intérieur du solénoïde précédent. L'axe du solénoïde et l'axe du cylindre sont confondus.

On fait l'hypothèse que l'introduction du conducteur cylindrique ne modifie pas sensiblement les champs électrique et magnétique créés à l'intérieur du solénoïde en l'absence du cylindre conducteur.



10.1/ Effet Joule dans le cylindre métallique

10.1.1/ En appliquant la loi d'Ohm locale, déterminer la densité de courant volumique \vec{j} qui apparaît dans le cylindre conducteur en fonction de $\mu_0, n, I_0, \gamma, \omega, r$ et t . On n'omettra pas de préciser la direction du vecteur \vec{j} .

10.1.2/ Déterminer l'expression dP_J de la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans un volume élémentaire $d\tau = r dr d\theta dz$ du cylindre. On exprimera dP_J en fonction de $d\tau, \gamma, r, \mu_0, n, \omega, I_0$ et t .

Par intégration de l'expression précédente de dP_J , déterminer la puissance instantanée P_J dissipée par effet Joule dans le cylindre. On exprimera P_J en fonction de $\gamma, h, a, \mu_0, n, \omega, I_0$ et t .

Déterminer la moyenne temporelle $\langle P_J \rangle$ de la puissance instantanée P_J en fonction de $\gamma, h, a, \mu_0, n, \omega$ et I_0 .

10.1.3/ Citer une application classique du phénomène physique ainsi mis en évidence dans la question précédente.

10.2/ Influence du conducteur cylindrique sur le champ magnétique

10.2.1/ Soit \vec{B}' le champ magnétique variable créé par la densité volumique de courant \vec{j} calculée au 10.1.1/ à l'intérieur du cylindre conducteur.

On admettra que le champ \vec{B}' se met sous la forme $\vec{B}' = B'(r,t)\vec{e}_z$ où $B'(r,t)$ est une fonction qui ne dépend que de r et du temps et que le champ \vec{B}' est nul à l'extérieur du cylindre conducteur.

En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression de \vec{B}' à l'intérieur du cylindre conducteur. On précisera clairement le contour choisi pour l'application de ce théorème.

10.2.2/ On souhaite déterminer les conditions dans lesquelles l'hypothèse faite précédemment est valable (l'introduction du conducteur ne modifie pas le champ magnétique existant dans le solénoïde en l'absence du cylindre conducteur). \vec{B} désignant le champ magnétique créé dans le solénoïde en l'absence du cylindre conducteur, déterminer le rapport $\frac{B'}{B}$ des amplitudes des champs magnétiques \vec{B} et \vec{B}' en un point se trouvant à l'intérieur du cylindre conducteur. On exprimera ce rapport en fonction de r, a, μ_0, γ et ω .

10.2.3/ Les dimensions du solénoïde et du cylindre conducteur étant fixées, quelles sont les conditions sur γ et ω à vérifier pour que l'hypothèse précédente soit valable ?

- Formule donnant le rotationnel d'un vecteur \vec{A} en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

EXERCICE 3 : Effet de peau

On considère un conducteur ohmique homogène de conductivité $\gamma = 5.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$, qui occupe le demi-espace défini par $z \geq 0$.

Le conducteur est parcouru par des courants de densité volumique : $\vec{j} = j(z,t)\vec{e}_y$, et on se limitera aux fréquences industrielles et radio.

1) Etablir l'équation différentielle satisfaite par \vec{j} ; résoudre cette équation en cherchant des solutions à variations sinusoïdales dans le temps (on pourra s'intéresser à la signification physique des autres solutions).

On fera apparaître une distance caractéristique δ dont on donnera l'interprétation physique.

A.N. : calculer δ pour $f_1 = 50Hz$ et $f_2 = 100MHz$; conclure.

2) Exprimer en fonction de δ , a et j_0 (=amplitude de \vec{j} en $z=0$) l'intensité efficace I du courant qui parcourt la région du conducteur définie par : $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

Rq : on rappelle la définition de la valeur efficace d'un courant $i(t)$ de période T :

$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$; en anglais, la valeur efficace est notée : « **R.M.S** » = « Root Mean Square », et donne aux étudiants la suite des opérations à mener pour la calculer...

3) Exprimer en fonction de I , a , b , γ et δ la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la région du conducteur définie par : $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et : $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.

En déduire une interprétation énergétique de la grandeur δ .

Rq : on donne une primitive de : $\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)$, soit :

$$-\frac{\delta}{2} \exp(-z/\delta) [\cos(\omega t - z/\delta) + \sin(\omega t - z/\delta)]$$

EXERCICE 4 : Propagation entre deux plans

Une onde électromagnétique se propage dans le vide, selon Ox , entre deux plans d'équation $z = 0$ et $z = a$. Nous verrons ultérieurement que le champ électrique de cette onde s'écrit comme celui d'une onde de la

forme : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\frac{\pi z}{2a}) \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ où A et a , k et ω sont des constantes.

1. Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?
2. Est-ce une onde plane ? Est-ce une onde transverse ?
3. Montrer qu'il existe alors une relation entre k , ω , c et a , et que ce type de solution ne convient que si $\omega > \omega_0$ où ω_0 est une grandeur que l'on déterminera. Cette relation est appelée dans la suite relation de dispersion.
4. Quelle vitesse de phase peut-on associer à cette onde ? Montrer que si $\omega > \omega_0$, la dépendance en $\omega t - kx$ traduit un phénomène de propagation dont la vitesse dépend de ω .
5. Déterminer la vitesse c_e de propagation de l'énergie de cette onde.
Méthode : Calculer l'énergie moyenne transportée pendant la durée élémentaire dt dans un parallélépipède de longueur $\Delta x = c_e \Delta t$ et de section droite S suivant Oz ; identifier en effectuant un bilan d'énergie en calculant le flux du vecteur de Poynting sur cette même section droite S
6. Montrer que l'onde précédente se décompose en deux ondes planes progressives dont on précisera les directions de propagation. Utiliser cette décomposition pour retrouver simplement la relation entre k , ω , c et a obtenue dans l'exercice précédent. Que devient la direction de propagation de ces ondes lorsque ω tend vers la valeur ω_0 calculée dans l'exercice précédent ?

EXERCICE 5 : Champ électromagnétique d'un LASER à gaz

Un faisceau LASER émet une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon Oz qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction Ox' inclinée de 60° par rapport à l'axe Ox.

- Ecrire les composantes du vecteur d'onde \vec{k} , du champ \vec{E} , du champ \vec{B} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$
- Calculer leurs normes dans le cas d'un LASER à Argon ionisé ($\lambda_0 = 488\text{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1 mm² de section et de puissance moyenne 1 W.

EXERCICE 6 : Détermination des grandeurs caractéristiques d'une Oem

Dans les unités SI, le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par la relation :

$$\vec{E}(M,t) = (-3 \cdot 10^4 \vec{e}_x + 3\sqrt{3} \cdot 10^4 \vec{e}_y) \cdot \cos \left[\frac{\pi}{3} \cdot (2\sqrt{3}x + 2y) \cdot 10^7 - 9,42 \cdot 10^{15} t \right]$$

Déterminer l'état de polarisation de cette onde, l'amplitude du champ électrique, la direction de propagation de l'onde, les valeurs numériques du module du vecteur d'onde, du nombre d'onde, de la longueur d'onde, la fréquence, la période et la pulsation, la vitesse de propagation, l'amplitude du champ magnétique. Est-ce une onde plane ? progressive ? monochromatique ?

EXERCICE 7 : Cable coaxial (CCP PSI 2011)

Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.

Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial et les phénomènes de réflexion d'ondes lorsque le câble est connecté sur une charge.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : $R_1 = 0,25$ mm, $R_2 = 1,25$ mm et $l = 100$ m.

I] Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

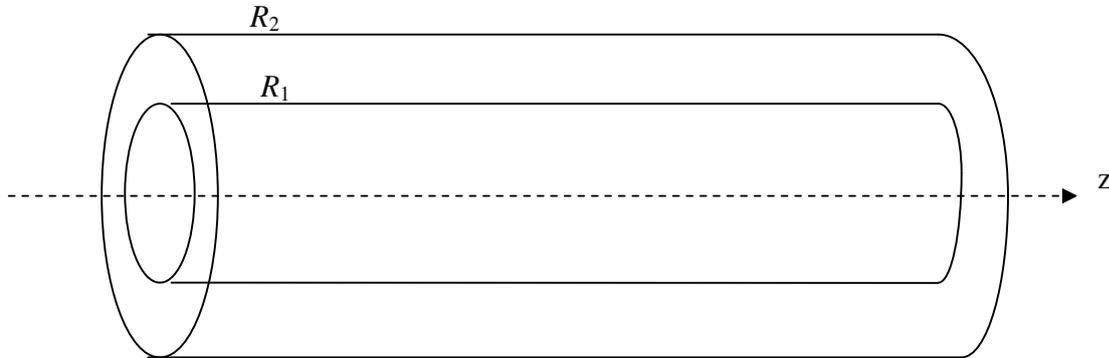


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

Aucune connaissance particulière n'est requise pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble.

A] Capacité linéique C :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

- 1) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, dans l'espace inter-conducteur.
- 2) Pour $R_1 < r < R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l, r, Q et ϵ_0 .
- 3) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 , constants. Par un calcul de circulation, exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q, l, R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 4) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l, R_1, R_2 et ϵ_0 , puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 5) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 3,1$. On a alors $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.

Déterminer la valeur numérique de C .

B] Inductance linéique L :

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\vec{j}_{s_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} \vec{u}_z$. On note : \vec{j}_{s_2} la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

- 6) Préciser l'expression et l'unité de \vec{j}_{s_2} .
- 7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.
- 8) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction I_0 , r et μ_0 .
- 9) On note : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0 , μ_0 , R_1 , R_2 et l .
- 10) On rappelle que $W_m = \frac{L_l I_0^2}{2}$. Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l , en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 et de l .
- 11) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 . Déterminer la valeur numérique de L .

II] Onde électromagnétique et impédance du câble coaxial :

A] Détermination de l'onde électromagnétique :

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des z . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique :

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r, \text{ où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

On lui associe le champ électrique complexe : $\underline{\vec{E}}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_r$.

On a : $\vec{E}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(r, z, t))$ où Re signifie partie réelle.

De même, il existe un champ magnétique $\vec{B}(r, z, t)$ auquel on associe le champ complexe : $\underline{\vec{B}}(r, z, t)$, avec $\vec{B}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{B}}(r, z, t))$.

- 12) L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
- 13) On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\underline{\vec{E}}(r, z, t)$ en fonction de E_0 , r , z , k , ω , t et R_1 .

- 14) Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles.
- 15) A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω . Le milieu est-il dispersif ?
- 16) Déterminer en fonction de E_0, r, t, ω, k et R_1 , l'expression du champ magnétique complexe $\vec{B}(r, z, t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

B] Puissance transportée :

- 17) On désigne par $\vec{\pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\vec{\pi}$ en fonction de $E_0, R_1, r, k, \omega, z, t$ et μ_0 .
- 18) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P , par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0 .
Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.

C] Etude de l'interface $r = R_1$:

- 19) Rappeler l'équation de passage du champ électrique à la traversée d'une surface chargée. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur (1), en déduire l'expression de la densité surfacique de charge sur le conducteur (1), en fonction de $E_0, \epsilon_0, k, \omega, z$ et t .
- 20) Rappeler l'équation de passage du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ magnétique est nul dans le conducteur (1), en déduire que le conducteur intérieur est parcouru par une densité surfacique de courant \vec{j}_{s1} qu'on exprimera en fonction de $E_0, \mu_0, c, \omega, k, t$ et z . On remarquera que \vec{j}_{s1} est contenu dans le plan tangent au conducteur puisqu'il s'agit d'un courant surfacique.

D] Détermination de l'impédance caractéristique du câble coaxial :

- 21) En un point de cote z donné, par un calcul de circulation, déterminer la différence de potentiel $u(z, t) = V_1(z, t) - V_2(z, t)$ entre l'âme et la gaine, en fonction de $E_0, R_1, R_2, k, z, \omega$ et t .
On admettra éventuellement que le potentiel vecteur $\vec{A}(r, z, t)$ dont dérive $\vec{B}(r, z, t)$ est porté par le vecteur \vec{u}_z .
- 22) Pour z donné, déterminer le courant $i(z, t)$ véhiculé par l'âme du câble coaxial, en fonction de $E_0, R_1, k, z, \omega, t, \mu_0$ et c .
- 23) On définit l'impédance caractéristique du câble : $Z_c = \frac{u(z, t)}{i(z, t)}$. Exprimer Z_c en fonction de μ_0, c, R_1 et R_2 , puis de μ_0, ϵ_0, R_1 et R_2 , puis en fonction de l'inductance linéique L et de la capacité linéique C du câble à structure « air ou vide », c'est-à-dire de permittivité diélectrique ϵ_0 .

24) Compte tenu de l'isolant séparant l'âme de la gaine, on a, en pratique :

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Application numérique : déterminer la valeur de Z_c .

III] Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :

La gaine est maintenant reliée à la masse ($V_2 = 0$), et l'âme, portée au potentiel $V_1(z,t) = V(z,t)$, est parcourue par le courant $i(z,t)$. On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur dz de la figure 2 où L et C désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

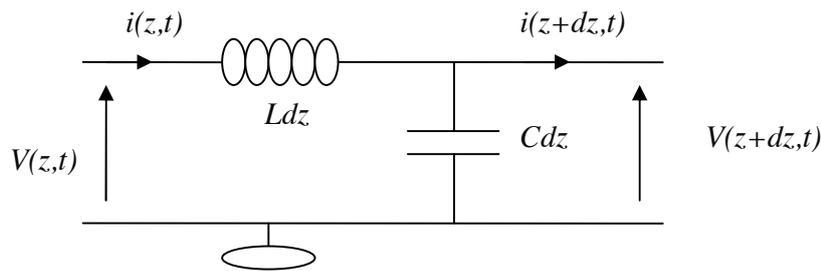


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

25) A quelle(s) condition(s) sur les matériaux peut-on modéliser ainsi la portion de câble coaxial ?

A] Equation de propagation :

26) Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions $V(z,t)$ et $i(z,t)$.

27) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction $V(z,t)$ d'une part, puis par la fonction $i(z,t)$ d'autre part. Quelle est la forme la plus générale de la fonction $V(z,t)$?

B] Phénomène de réflexion en bout de câble :

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation ω .

On posera $V(z,t) = V_i(z,t) + V_r(z,t)$.

Avec $V_i(z,t) = V_{im} \cos(\omega t - kz + \varphi)$ et $V_r(z,t) = V_{rm} \cos(\omega t + kz + \psi)$.

A ces ondes réelles, on associe les ondes complexes : $\underline{V}(z,t) = \underline{V}_i(z,t) + \underline{V}_r(z,t)$ avec

$$\underline{V}_i(z,t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{V}_r(z,t) = \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{où} \quad \underline{V}_{im} = V_{im} e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{V}_{rm} = V_{rm} e^{j\psi}.$$

Le câble est relié à un générateur basses fréquences, qui délivre en $z = 0$, une tension sinusoïdale, de sorte que l'onde totale en $z = 0$ est sinusoïdale. Le choix de l'origine des temps nous permet de poser : $V(0,t) = V_0 \cos(\omega t)$, à laquelle on associe la forme complexe : $\underline{V}(0,t) = V_0 e^{j\omega t}$.

28) Le câble est en court circuit, ou refermé par une résistance nulle ($R = 0$) à l'extrémité située en $z = l$.

Expliciter la condition limite $\underline{V}(l,t)$ vérifiée par la fonction $\underline{V}(z,t)$ en $z = l$.

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifié par \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} .

Puis exprimer \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} en fonction de V_0 , k et l .

29) On définit le coefficient de réflexion r par : $r = \frac{V_r(l,t)}{V_i(l,t)}$.

Déterminer r dans le cas du court-circuit ($R = 0$).

30) Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ($R = +\infty$) à son extrémité située en $z = l$.

Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en $z = l$.

On admettra dans ce cas que $r = 1$.

31) Le câble est maintenant chargé à son extrémité en $z = l$, par une résistance R . En admettant que le coefficient de réflexion r est réel, justifier qu'il existe au moins une valeur critique de R notée R_c pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?

Dans la suite du problème, on admettra que $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

IV] Etude expérimentale :

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en $z = 0$, délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carré », entre les niveaux 0 et V_0 . L'autre extrémité du câble est refermée par une résistance R .

En plus des phénomènes de propagation et de réflexion éventuelle de l'onde, il y a un léger phénomène d'atténuation. On supposera que la valeur de la résistance R n'a aucune influence tant sur la durée de propagation que sur l'amortissement dû au chemin parcouru. On admet de plus qu'il n'y a pas de réflexions multiples.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en $z = 0$ la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie (figure 3). Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de R .

32) Donner une valeur approchée de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

A] Cas d'un court-circuit : $R = 0$.

L'extrémité $z = l$ est en court circuit : $R = 0$.

33) On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en $z = 0$, par la figure suivante :

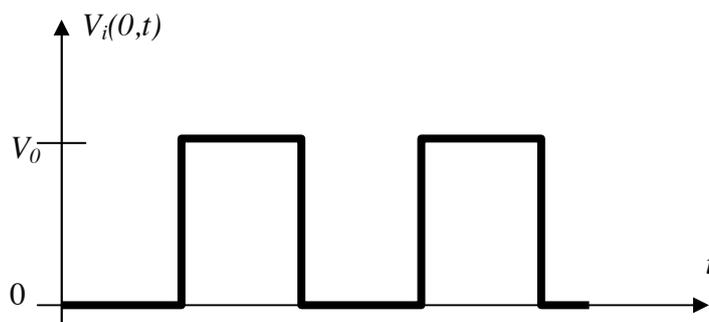


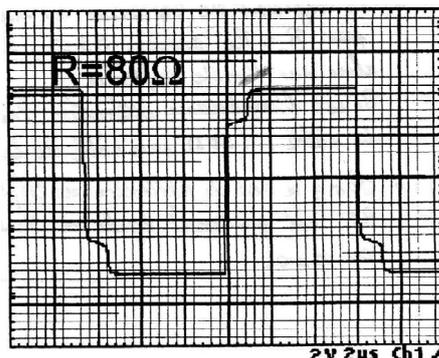
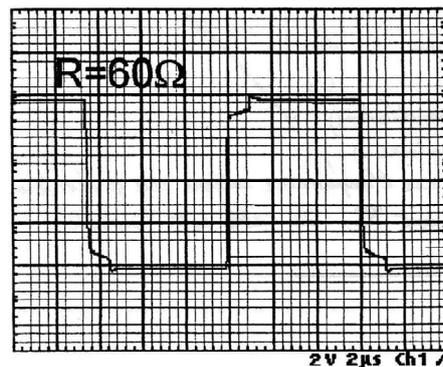
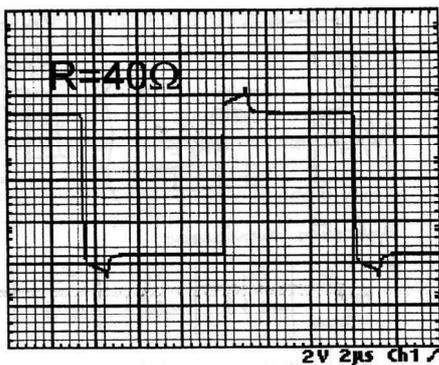
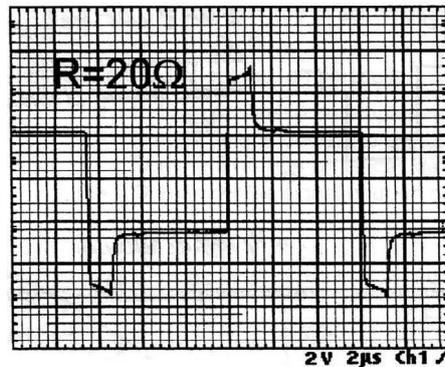
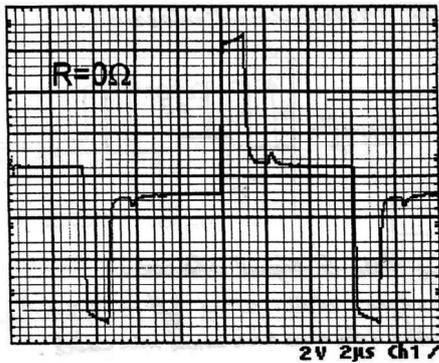
Figure 3 : Onde incidente

En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à $T/4$, où T est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées $V_r(0,t)$ et $V_{tot}(0,t)$ au point $z = 0$.

- 34) En utilisant l'oscillogramme correspondant à $R = 0$, déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble. Celle-ci est-elle en accord avec les valeurs de L et C obtenues précédemment ?
- 35) On définit le coefficient d'amortissement, noté K , au cours de la propagation globale, comme le rapport du module de l'amplitude de l'onde réfléchie une fois revenue en $z = 0$ sur le module de l'amplitude de l'onde incidente émise en $z = 0$. Déterminer une valeur approchée de K .

B] Cas général $R \neq 0$:

- 36) A partir des autres oscillogrammes de la figure 4, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion pour les différentes valeurs de R , à savoir : 20Ω , 40Ω , 60Ω et 80Ω .
- 37) Pour quelle valeur particulière R_c de R , n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ? Ceci est-il en accord avec les résultats obtenus lors des parties précédentes ? Pourquoi n'y a-t-il pas de réflexions multiples ?



Constantes physiques

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2} (a_r + 2 \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2} (a_\theta - 2 \frac{\partial a_r}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_\theta + (\Delta a_z) \vec{u}_z$$

$$\text{rot}[\text{rot}(\vec{a})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{a})] - \Delta \vec{a}$$