TD Ec1 : Réponses temporelle et fréquentielle de filtres

EXERCICE 1 : Test de linéarité

On envoie à l'entrée de différents systèmes un signal $e(t)$ dont le spectre est donné sur la figure 3.24.

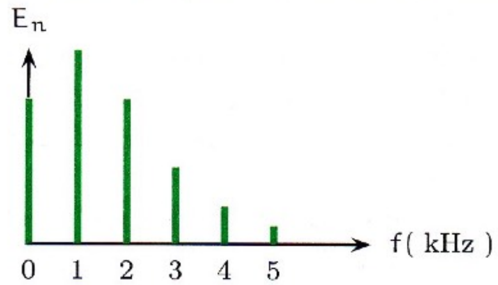


FIG. 3.24. Spectre du signal d'entrée.

Les spectres des signaux de sortie des différents systèmes sont représentés sur la figure 3.25.

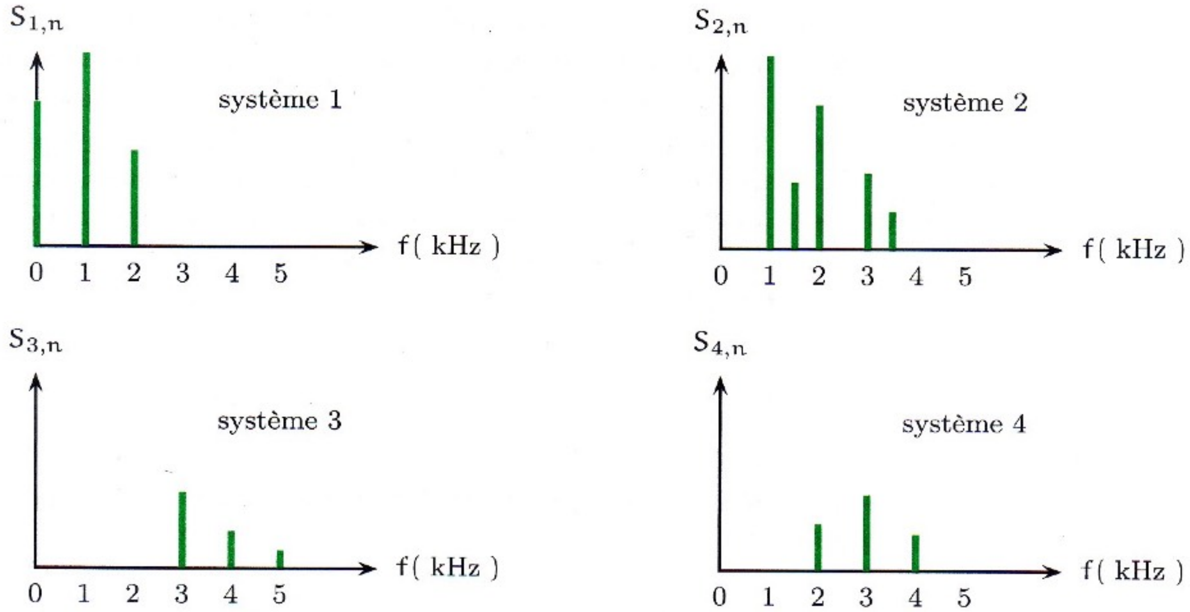


FIG. 3.25. Spectre des signaux de sortie.

1. Déterminer si les systèmes utilisés sont linéaires ou non.
2. Déterminer les natures des systèmes identifiés comme linéaires ainsi que leurs bandes passantes.

EXERCICE 2 : Action d'un filtre sur un signal périodique

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H(j\omega)} = \dfrac{-1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\sqrt{5}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = 1{,}2.10^5 \ \text{rad.s}^{-1}$

Nature du filtre ? Fréquence de coupure à -3dB ?

Expressions de $v_s(t)$ en régime permanent pour les signaux d'entrée suivants :

(v_0,v_1,v_2 et E sont des constantes)

➡ $v_e(t) = v_1.\cos(\omega_0 t)$

➡ $v_e(t) = v_0 + v_1.\cos(\omega_0 t)$

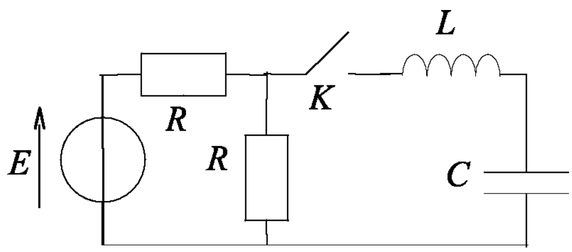
➡ $v_e(t) = v_1.\cos(\omega_0 t) + v_2.\cos(2\omega_0 t)$

➡ $v_e(t) = \dfrac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{2E}{\pi(2p+1)}.\sin\left((2p+1).2\pi \dfrac{t}{T}\right)$ avec T=1 ms

➡ $v_e(t) = \dfrac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{2E}{\pi(2p+1)}.\sin\left((2p+1).2\pi \dfrac{t}{T}\right)$ avec T=10 μs

EXERCICE 3 : Réponse temporelle critique

Dans le montage schématisé ci-contre, l'interrupteur étant ouvert depuis très longtemps, on le ferme à $t = 0$.



Sachant que $R^2C = 16L$, déterminer l'équation différentielle dont la charge du condensateur est solution, puis donner son expression en fonction du temps et tracer le graphe correspondant.

EXERCICE 4 : Réponses temporelles

On s'intéresse au circuit de la figure 1.9.

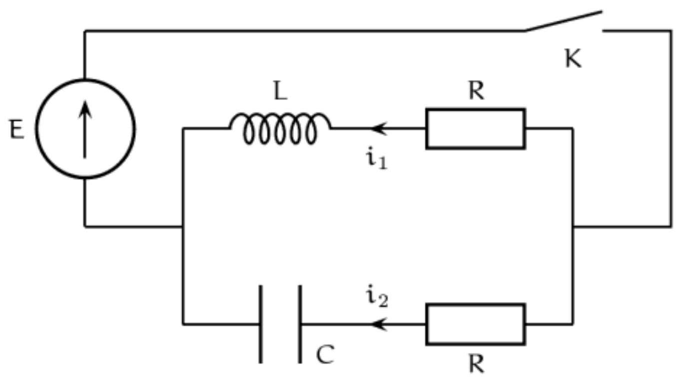


Fig. 1.9. Circuit étudié.

1. L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps, on le ferme à $t = 0$.

(a) Préciser sans calcul $i_1(t \to \infty)$ et $i_2(t \to \infty)$.

(b) Déterminer $i_1(t)$ et $i_2(t)$; on introduira les temps caractéristiques τ_1 et τ_2.

2. On attend que le régime permanent précédent soit établi et on ouvre l'interrupteur K à un instant que l'on choisira comme nouvelle origine des temps. On décide d'utiliser $i(t) = i_1(t)$ pour l'intensité du circuit ainsi réalisé.

(a) Établir l'équation différentielle relative à l'intensité du courant $i(t)$ du nouveau circuit.

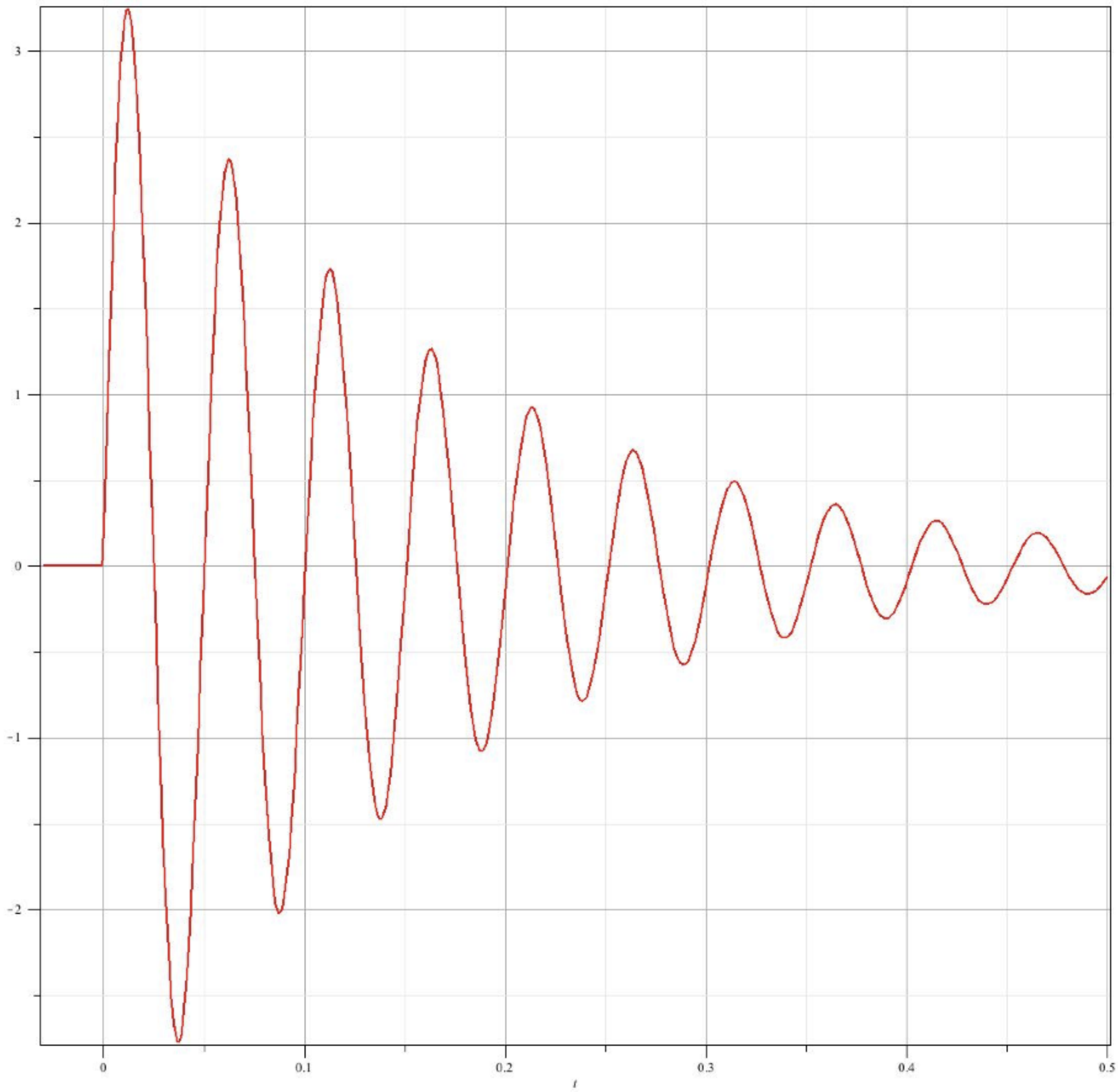
(b) Préciser les différents régimes possibles à l'aide d'une condition sur R.

(c) On se place dans le cas où $\tau_1 = \tau_2 = \tau$: de quel type de régime s'agit-il ?

Montrer que $i(0^+) = \dfrac{E}{R}$ et $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{0^+} = -\dfrac{E}{L}$. Déterminer $i(t)$ en fonction de E, R, τ et t pour $t > 0$.

EXERCICE 5 : De la réponse temporelle à la réponse fréquentielle.

La réponse d'un filtre du second ordre à un échelon de tension de 5V est la suivante :



1. Montrer qu'il ne peut s'agir que d'un passe-bande (penser aux théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale)

2. Déterminer les constantes de cette forme canonique :

$$H(p) := \frac{H0 \cdot \frac{\tau \cdot p}{Q}}{1 + \frac{\tau \cdot p}{Q} + p^2 \cdot \tau^2}$$

(utiliser des abaques ou les formules du cours sans qu'aucune démonstration de celles-ci ne soit nécessaire)

3. En déduire l'allure du diagramme de Bode de ce filtre (asymptotes et points caractéristiques).

Rappel : $\delta \equiv \frac{1}{n} Ln\left(\left|\frac{s(t) - H_0}{s(t+nT) - H_0}\right|\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ avec $T \equiv \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$

EXERCICE 6 : Lissage d'une tension « hachée »

1. Étude d'une cellule de filtrage

On considère le montage de la figure 3.29 pour lequel $L = 200$ mH et $C = 20$ μF.

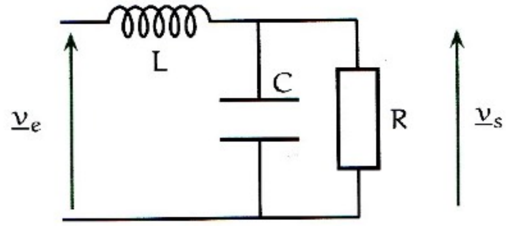


FIG. 3.29. Cellule de lissage d'une tension hachée.

(a) Déterminer la nature du filtrage réalisé par le circuit de la figure 3.29 sans faire de calcul.

(b) Déterminer $\underline{\mathcal{H}} = \dfrac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$ et la mettre sous la forme $\underline{\mathcal{H}} = \dfrac{\mathcal{H}_0}{1 + \dfrac{jx}{Q} + (jx)^2}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

On déterminera $\mathcal{H}_0$, ω_0 et Q en fonction des paramètres.

(c) Quelle valeur faut-il donner à R pour que $G(x) = |\underline{\mathcal{H}}| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}$?

On garde cette valeur particulière pour la suite.

(d) Déterminer la pulsation de coupure ω_c du circuit.

2. Lissage d'une tension hachée

Le filtre est alimenté par la tension périodique $e(t)$ de la figure 3.30 issue d'un hacheur, de fréquence $f = 1\,000$ Hz ; on pose $\alpha = \dfrac{T_f}{T}$, c'est le rapport cyclique.

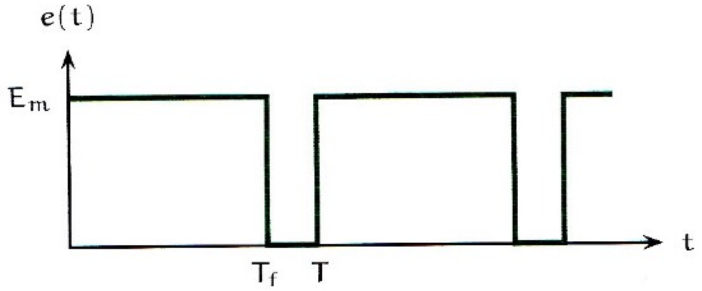


FIG. 3.30. Tension hachée.

On peut montrer que $e(t) = \alpha E_m + \dfrac{2E_m}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|\sin(\pi n \alpha)|}{n} \cos(n\omega t + \phi_n)$.

(a) Quelle est la signification physique du terme constant αE_m ? Vérifier sa valeur par un calcul simple.

(b) Expliquer pourquoi la tension $v_s(t)$ est pratiquement constante et déterminer sa valeur S_0.

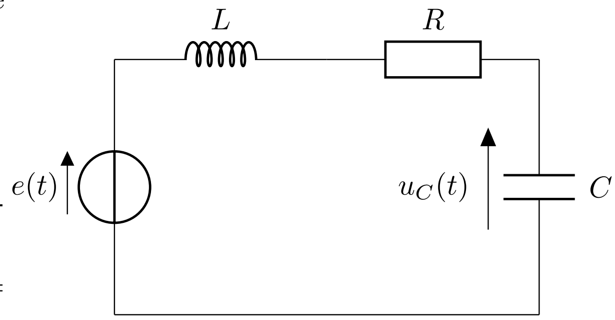
(c) On s'intéresse à l'ondulation résiduelle, c'est-à-dire aux petites fluctuations de $v_s(t)$ autour de sa valeur moyenne S_0. Comparer les amplitudes des harmoniques $n = 1$ et $n = 2$ en sortie pour $\alpha = 0{,}8$. Montrer qu'en première approximation il est possible de ne garder que le terme fondamental de la série de Fourier du signal de sortie.

(d) Déterminer le taux d'ondulation résiduel du signal de sortie défini par $\eta_s = \dfrac{S_{max} - S_{min}}{S_0}$.

Commenter le résultat obtenu sachant que le hacheur alimente un moteur.

EXERCICE 7 : Résonance en « tension condensateur » du RLC série

On étudie le circuit ci-contre. Le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



1 - Donner l'expression de l'impédance complexe totale $\underline{Z}$ du circuit.

Dans quel domaine de pulsations cette impédance est-elle de type inductive ? De type capacitif ?

2 - On cherche $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$.

Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

3 - Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_{Cm}$ de u_c en fonction de R, L, C, E_m et ω.

Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{U}_{Cm} = \dfrac{E_m}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

4 - En déduire l'expression de l'amplitude U_{Cm} du courant en fonction de x.

Pour quelles valeurs du facteur de qualité y-a-t'il résonance en tension ? Pour quelle pulsation la résonance a-t-elle alors lieu ? Quelle est alors la valeur de la tension ?

Tracer l'allure de la courbe $U_{Cm} = f(x)$ dans le cas où il y a résonance et dans le cas où il n'y a pas résonance.

5 - En déduire également l'expression de la différence de phase φ entre $u_C(t)$ et la tension d'alimentation en fonction de x.

Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de φ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.

6 - À partir de quelle valeur du facteur de qualité la pulsation de résonance et la pulsation propre sont-elles proches à moins de 1% ?

7 - On s'intéresse à la bande passante dans le cas où il y a résonance. Rappeler la définition de la bande passante.

Pour simplifier l'étude, on suppose $Q \gg 1$.

Quelle est alors l'expression de x à la résonance ? De $U_{C\max}$?

Établir l'expression de la bande passante Δx en fonction de Q. On pourra à un moment donné utiliser le développement limité $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$ pour $\epsilon \ll 1$.

En déduire l'expression de la bande passante $\Delta\omega$. Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?

8 - L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance.

Donner son expression en fonction du facteur de qualité.

Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en tension ?

Représenter U_{Cm} en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de Q.

9 - Application numérique pour $C = 4.0\,\mathrm{nF}$, $R = 2.0\,\mathrm{k\Omega}$, et $L = 4.0\,\mathrm{mH}$.

Donner la valeur de la pulsation à la résonance, de la largeur de la bande passante et de l'acuité.

EXERCICE 8 :

I.E – On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur s est égale à $j\omega$ où ω est la pulsation des signaux sinusoïdaux et $j^2 = -1$.

I.F – Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés figure 5, $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ la tension d'entrée.

Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.

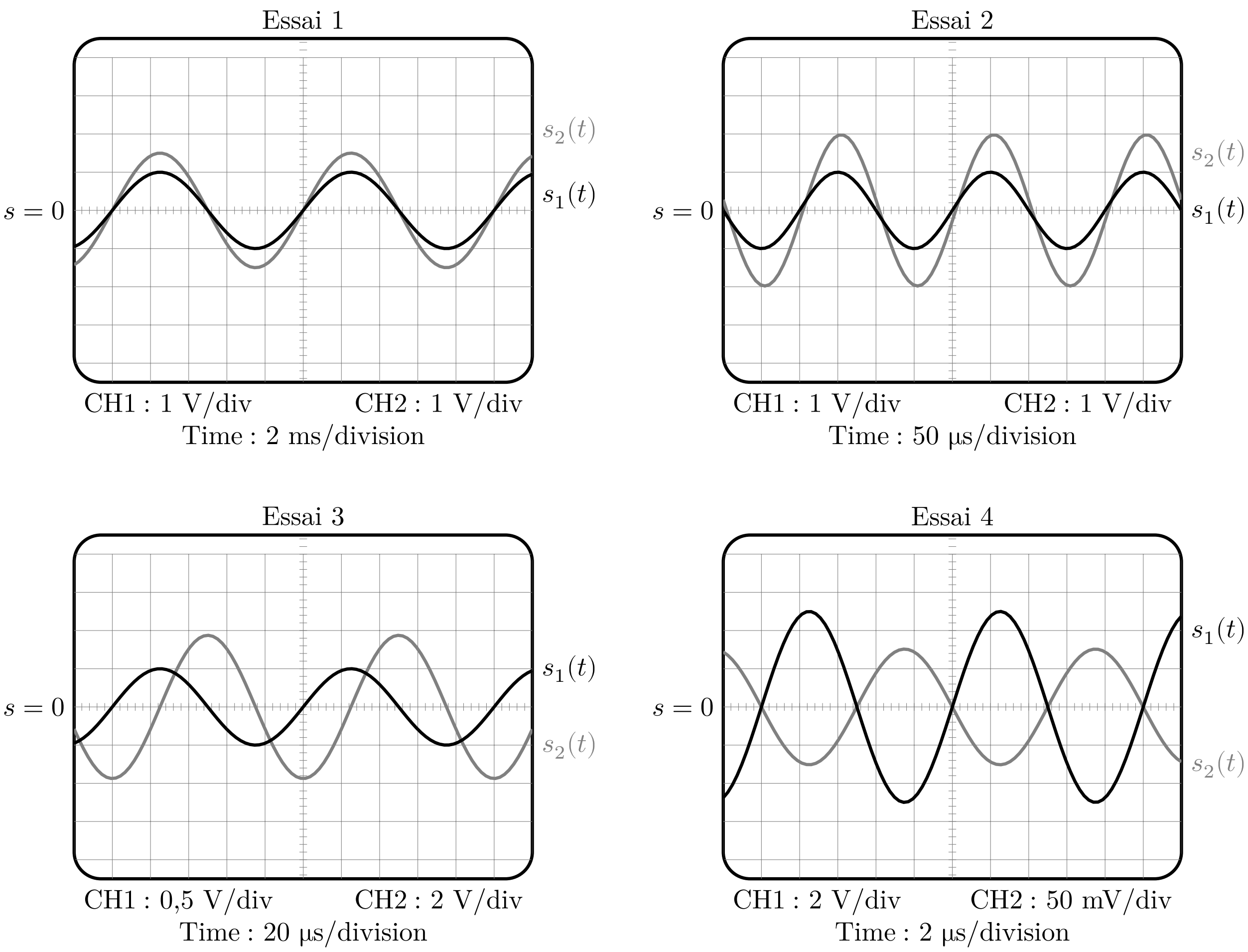
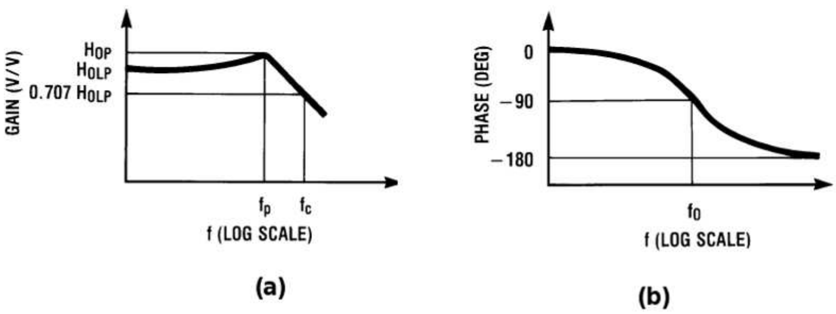


Figure 5

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP}\,\omega_O^2}{s^2 + \frac{s\omega_O}{Q} + \omega_O^2}$$



$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response