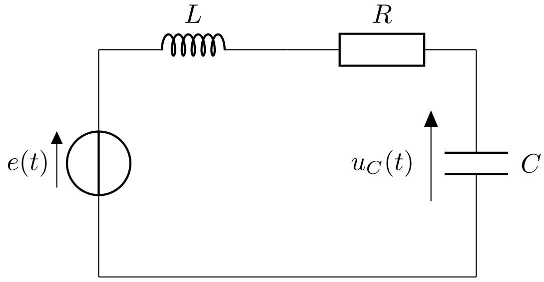
6.3 Question de cours/exercice – Résonance en tension du circuit RLC série [●○○]

On étudie le circuit ci-contre. Le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



1 - Donner l'expression de l'impédance complexe totale $\underline{Z}$ du circuit.

Dans quel domaine de pulsations cette impédance est-elle de type inductive ? De type capacitif ?

2 - On cherche $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$.

Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

3 - Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_{Cm}$ de u_c en fonction de R, L, C, E_m et ω.

Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{U}_{Cm} = \dfrac{E_m}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

4 - En déduire l'expression de l'amplitude U_{Cm} du courant en fonction de x.

Pour quelles valeurs du facteur de qualité y-a-t'il résonance en tension ? Pour quelle pulsation la résonance a-t-elle alors lieu ? Quelle est alors la valeur de la tension ?

Tracer l'allure de la courbe $U_{Cm} = f(x)$ dans le cas où il y a résonance et dans le cas où il n'y a pas résonance.

5 - En déduire également l'expression de la différence de phase φ entre $u_C(t)$ et la tension d'alimentation en fonction de x.

Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de φ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.

6 - À partir de quelle valeur du facteur de qualité la pulsation de résonance et la pulsation propre sont-elles proches à moins de 1% ?

7 - On s'intéresse à la bande passante dans le cas où il y a résonance. Rappeler la définition de la bande passante.

Pour simplifier l'étude, on suppose $Q \gg 1$.

Quelle est alors l'expression de x à la résonance ? De $U_{C\max}$?

Établir l'expression de la bande passante Δx en fonction de Q. On pourra à un moment donné utiliser le développement limité $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$ pour $\epsilon \ll 1$.

En déduire l'expression de la bande passante $\Delta\omega$. Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?

8 - L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance.

Donner son expression en fonction du facteur de qualité.

Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en tension ?

Représenter U_{Cm} en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de Q.

9 - Application numérique pour $C = 4.0\,\mathrm{nF}$, $R = 2.0\,\mathrm{k\Omega}$, et $L = 4.0\,\mathrm{mH}$.

Donner la valeur de la pulsation à la résonance, de la largeur de la bande passante et de l'acuité.

6.3 – Correction

2 - *$u_c(t) = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{u}_c = \underline{U}_{Cm} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_{Cm} = U_{Cm} e^{j\varphi}$.*

3 - *On applique un diviseur de tension :*

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{E}_m \times \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + R}$$

$$= \frac{E_m}{1 + (jL\omega)(jC\omega) + RjC\omega}$$

$$\boxed{\underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}},}$$

avec $x = \omega/\omega_0$, $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

4 - On en déduit $\boxed{U_{Cm} = \dfrac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}.}$

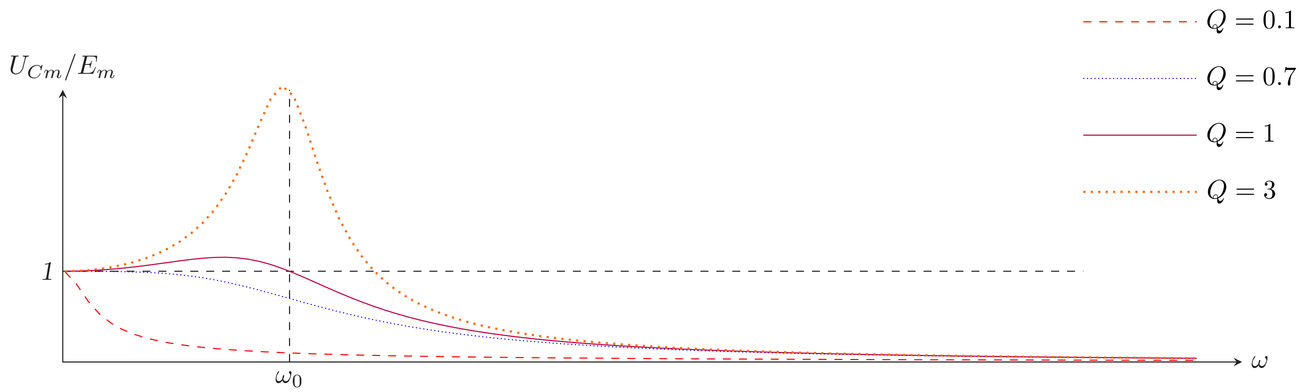
Il y a résonance si $U_{Cm}(x)$ admet un maximum pour une valeur de $x \in]0, +\infty[$. Le numérateur ne dépendant pas de x, ceci est équivalent au fait que le dénominateur admette un minimum. On regarde donc si la dérivée de $(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ s'annule.

On trouve que c'est toujours le cas en $x = 0$ (c'est alors un maximum ou un minimum, mais ce n'est jamais la résonance car c'est en 0), et qu'il y a une seconde possibilité en $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$, mais seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La résonance a donc lieu seulement si $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}},}$ *à la pulsation* $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}.}$

La tension à la résonance vaut $U_{C\max} = U_{Cm}(x_r) = \dfrac{QE_m}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$.

On a l'allure suivante :



5 - On a $\varphi = -\arg\left((1-x^2) + j\dfrac{x}{Q}\right)$.

On ne peut pas utiliser l'expression avec l'arctangente car la partie réelle, $1-x^2$, est parfois négative et parfois positive. Plusieurs façons de s'en sortir.

⋆ Soit on passe par une étude en certains points, ce qui est suffisant pour avoir l'allure.

Pour $x \to 0$: ...

Pour $x \to +\infty$: ...

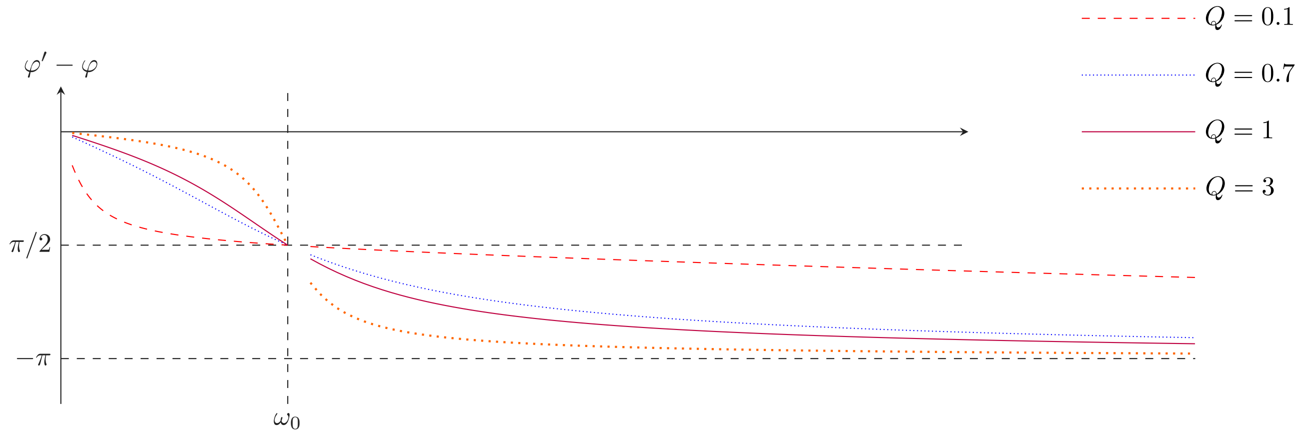
Pour $x = 1$: ...

⋆ Soit on factorise par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1-x^2) + j\frac{x}{Q}\right] \\
&= -\arg\left[j\left(-j(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= -\arg j - \arg\left(-j(1-x^2) + \frac{x}{Q}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

On a l'allure suivante :



Remarque : *Alternativement, on peut voir que* $\underline{U}_{Cm} = \dfrac{I_m}{jC\omega}$ *relation pour le condensateur), donc* $\varphi_{U_C} = \varphi_i - \pi/2$ *et utiliser l'expression de* φ_i *pour le courant de l'exercice précédent.*

6 -

7 - *On a à la résonance* $x_r \simeq 1$, $U_{C\max} \simeq QE_m$.

Pour déterminer les valeurs de x *qui délimitent la bande passante, il faut résoudre l'équation :*

$$\frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$$

$$(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = 2\frac{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}{Q^2}$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 + \frac{x^2}{Q^2} = 2\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \quad \textit{et on néglige le terme en } \frac{1}{4Q^4}$$

$$x^4 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)x^2 + 1 - \frac{2}{Q^2} = 0$$

C'est un trinome en x^2. *Le discriminant est :*

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{2}{Q^2}\right)\\ &= 4 - 4\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{Q^4} - 4 + \frac{8}{Q^2}\\ &= 4\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{Q^4} \quad \textit{et on néglige le terme en } \frac{1}{Q^4}\\ &= \frac{4}{Q^2}\end{aligned}$$

On a donc les solutions :

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{1}{2}\left[\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) \pm \frac{2}{Q}\right]\\ &= 1 - \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \quad \textit{et on néglige le terme en } \frac{1}{2Q^2}\\ &= 1 \pm \frac{1}{Q}\end{aligned}$$

Comme $Q \gg 1$, *les deux solutions sont positives, et il y a donc deux solutions pour* x *données par :*

$$x = \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}}$$

$$\boxed{x = 1 \pm \frac{1}{2Q}}$$

Enfin, la largeur de la bande passante est donnée par la différence des deux solutions, soit donc :

$$\Delta x = 1 + \frac{1}{2Q} - \left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{Q}.}$$

On a donc :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.}$$

Remarque : *Si on ne néglige aucun terme au cours du calcul (en supposant donc uniquement* $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.71$*), on trouve en fait :*

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}.}$$

Cependant le calcul n'est valide que si Q *est assez élevé, car s'il est trop petit alors une des deux solutions* $x^2 = ...$ *est négative et n'existe donc pas. On comprend en fait graphiquement que pour que les deux solutions* x *existent, il faut que* $\dfrac{U_{Cm,\max}/E_m}{\sqrt{2}}$ *soit supérieur à 1 (qui est la valeur de* U_{Cm}/E_m *en* $x = 0$*). On peut montrer que ceci est équivalent à* $Q^2 + \dfrac{1}{2Q^2} \geq 2$*, soit donc à* $\boxed{Q \geq \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 1.31.}$ *Pour des valeurs inférieures de* Q*, la bande passante n'est pas définie.*