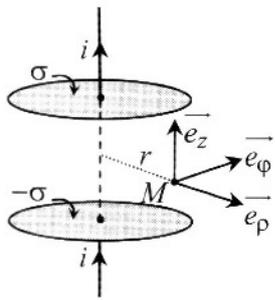


## TD Em2 : Régimes variables : ARQS et OPPH

### □ Exercice 5.1. Condensateur plan dans l'ARQS

On considère un condensateur plan formé de deux armatures métalliques circulaires de rayon  $a$ , de même axe ( $Oz$ ) et séparées l'une de l'autre par un diélectrique d'épaisseur  $e$  assimilable au vide (on prendra sa permittivité diélectrique relative égale à l'unité :  $\epsilon_r = 1$ ). Ce condensateur est soumis à une tension variable de façon sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  de sorte que l'armature supérieure porte une densité surfacique de charge positive  $\sigma(t)$  et l'armature inférieure porte une densité surfacique de charge négative  $-\sigma(t)$ . La variation temporelle du champ électrique crée un champ magnétique qui, à son tour, crée un champ électrique variable se superposant au premier et ainsi de suite... On fait pour l'instant l'hypothèse qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme



$$\vec{E}_0 = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z, \text{ hypothèse dont on cherche ici à déterminer le domaine}$$

de validité. On néglige les effets de bords et on se place dans les

coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  d'axe ( $Oz$ ) rapportées au trièdre  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ . On rappelle

qu'en cylindrique, l'opérateur divergence appliqué à  $\vec{E}$  s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

**1.** Justifier que le champ est axial et qu'il ne dépend, à priori, que de  $r$ . Quel est alors le cadre de validité de l'expression  $\vec{E}_0 = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$  du champ dans l'espace entre les armatures ?

**2. a)** On se place dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ électrique uniforme. Montrer que la variation au cours du temps du champ électrique  $\vec{E}_0$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_1(M, t)$ . En identifiant les sources de  $\vec{B}_1(M, t)$ , et en analysant précisément leurs symétries, déterminer la direction de  $\vec{B}_1(M, t)$ .

**b)** En intégrant  $\vec{B}_1(M, t)$  sur un contour fermé orienté, judicieusement choisi (il sera utile d'examiner les invariances des sources de  $\vec{B}_1$ ), donner l'expression de  $\vec{B}_1(M, t)$  en fonction de  $\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$ , en un point  $M$  à la distance  $r = OM$  de l'axe, en distinguant les cas  $r < a$  et  $r > a$ .

**c)** Dédurre de ce qui précède que tout se passe comme si le champ  $\vec{B}_1(M, t)$  était créé par un fil rectiligne d'axe ( $Oz$ ) parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  que l'on exprimera en fonction de  $a$  et de  $\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$  et dont on précisera le sens. Que peut-on en conclure quant à la continuité des lignes de courant dans l'ARQS dans un circuit comportant un condensateur ? On rappelle que dans l'ARQS, le champ magnétique créé au point  $M$  par un fil d'axe ( $Oz$ )

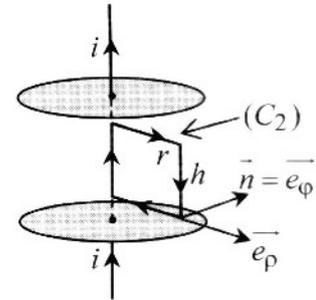
transportant un courant  $i(t)$  est donné par  $\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$  et que par conservation de la

charge, l'intensité du courant s'écrit  $i(t) = -\frac{dq}{dt}$  où  $q$  désigne la charge de l'armature de laquelle le courant « sort ».

3. On cherche à présent la condition de validité de l'hypothèse d'uniformité du champ électrique. Pour cela, on tient compte du champ électrique induit par la variation temporelle de  $\vec{B}_1(M, t)$ . Ce champ apporte, par rapport au champ  $\vec{E}_0(t)$  uniforme, une correction  $\vec{E}_2(M, t)$  que l'on désire évaluer. On note  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$  le champ total entre les armatures. On néglige le champ magnétique créé par la variation temporelle de  $\vec{E}_2$ , de sorte que le champ magnétique se réduit en première approximation à  $\vec{B}_1(M, t)$ .

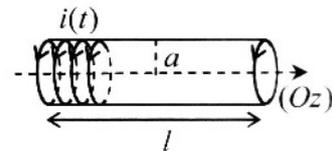
a) Écrire l'équation de Maxwell-Faraday dans l'espace entre les armatures. En déduire que  $\vec{E}_2$  est axial. Justifier, de plus, qu'il ne dépend que de  $r$ .

b) On désigne par  $(C_2)$  le contour rectangulaire contenu dans un plan méridien et orienté de sorte que la normale à la surface rectangulaire s'appuyant sur ce contour soit  $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$ . Justifier le choix de ce contour. En évaluant la circulation de  $\vec{E}_2$  sur  $(C_2)$ , donner l'expression de  $\vec{E}_{tot}$  en fonction de  $\vec{E}_0(t)$ ,  $\vec{E}_2(r=0, t)$  et  $\omega$ . À quelle condition sur  $\omega$  le champ total est-il uniforme ? Quel est le cadre de cette approximation, quelle différence peut-on faire par rapport au régime stationnaire ? Pour un condensateur à 1 MHz avec des armatures de rayon  $a = 1$  cm, le champ est-il uniforme ? Conclure sur la validité de la notion de capacité d'un condensateur dans le cadre de cette approximation.



#### □ Exercice 5.4. Solénoïde dans l'ARQS

On considère une portion de longueur  $l$  d'un solénoïde infini d'axe  $(Oz)$  comportant  $n$  spires jointives par unité de longueur. On négligera la résistance de cette bobine. On note  $a$  le rayon de ces spires parcourues, en régime variable, par un courant d'intensité  $i(t)$ . On se place en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$   $(r, \varphi, z)$  rapportées au trièdre  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ . On admet que



les champs magnétique et électrique, dans l'espace intérieur à la bobine, sont respectivement donnés (par une démarche analogue à celle explicitée dans l'exemple de la méthode 11.2) en notation complexe par :

$$\vec{B}(r, t) = B_0 \exp(i\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{r\omega}{2c} \right)^{2k} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(r, t) = -ic B_0 \exp(i\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)(k+1)!} \left( \frac{r\omega}{2c} \right)^{2k+1} \vec{e}_\varphi$$

1. On pose  $X = \frac{r\omega}{c}$ . On se place dans le cadre de l'ARQS, avec  $X \ll 1$ . Montrer qu'en

négligeant les termes d'ordre supérieure ou égal à deux dans les développements ci-dessus, le champ magnétique est uniforme (comme en statique), mais qu'il existe au même niveau d'approximation (et contrairement au cas statique) un champ électrique. Donner les expressions de ces champs (réels) en fonction des variables d'intérêt du problème. Pourquoi parle-t-on, dans ce cas, d'ARQS magnétique ?

2. Montrer que la contribution électrique à l'énergie électromagnétique dans la bobine est négligeable devant la contribution magnétique.

3. a) Exprimer, dans le cadre de l'ARQS, les champs  $\vec{B}(r, t)$  et  $\vec{E}(r, t)$  en fonction de l'intensité  $i(t)$  et de sa dérivée première. Montrer ainsi qu'au même niveau d'approximation, le

vecteur de Poynting a pour expression  $\vec{R}(r, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right) \vec{e}_r$ .

b) Montrer que la variation d'énergie magnétique stockée dans une portion de solénoïde de longueur  $l$  s'identifie à l'opposé de la puissance rayonnée à travers la surface qui la limite. On rappelle que dans le cadre de la magnétostatique, le coefficient de *self inductance* d'une telle portion de bobine de rayon  $a$  a pour expression :  $L = \mu_0 n^2 a^2 \pi l$ .

c) Ce résultat est-il conforme au bilan local de puissance électromagnétique dans la portion de bobine envisagée ?

### EXERCICE 3 : Champ électromagnétique d'un LASER à gaz

Un faisceau LASER émet une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon Oz qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction Ox' inclinée de 60° par rapport à l'axe Ox.

- Ecrire les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$ , du champ  $\vec{E}$ , du champ  $\vec{B}$  et du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$
- Calculer leurs normes dans le cas d'un LASER à Argon ionisé ( $\lambda_0 = 488nm$ ) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1 mm<sup>2</sup> de section et de puissance moyenne 1 W.

### EXERCICE 4 : Détermination des grandeurs caractéristiques d'une Oem

Dans les unités SI, le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par la relation :

$$\vec{E}(M,t) = (-3 \cdot 10^4 \vec{e}_x + 3\sqrt{3} \cdot 10^4 \vec{e}_y) \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{3} \cdot (2\sqrt{3}x + 2y) \cdot 10^7 - 9,42 \cdot 10^{15} t \right]$$

Déterminer l'état de polarisation de cette onde, l'amplitude du champ électrique, la direction de propagation de l'onde, les valeurs numériques du module du vecteur d'onde, du nombre d'onde, de la longueur d'onde, la fréquence, la période et la pulsation, la vitesse de propagation, l'amplitude du champ magnétique. Est-ce une onde plane ? progressive ? monochromatique ?

### EXERCICE 5 : Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le vide respectivement selon les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .

$$\vec{u}_1 \equiv \sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_2 \equiv -\sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_z$$

- Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde ?
- Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à  $\vec{u}_y$ , et qu'ils sont en phase dans le plan  $x=0$ , donnez leur expression sous forme complexe.
- En déduire l'expression du champ électrique total (réel). Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?
- Donner la forme du champ magnétique total (réelle). Commentez.
- En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvaient-on deviner sa direction ?

## EXERCICE 6 : Effet de peau

On considère un conducteur ohmique homogène de conductivité  $\gamma = 5.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ , qui occupe le demi-espace défini par  $z \geq 0$ .

Le conducteur est parcouru par des courants de densité volumique :  $\vec{j} = j(z,t)\vec{e}_y$ , et on se limitera aux fréquences industrielles et radio.

1) Etablir l'équation différentielle satisfaite par  $\vec{j}$  ; résoudre cette équation en cherchant des solutions à variations sinusoïdales dans le temps (on pourra s'intéresser à la signification physique des autres solutions).

On fera apparaître une distance caractéristique  $\delta$  dont on donnera l'interprétation physique.

A.N.: calculer  $\delta$  pour  $f_1 = 50Hz$  et  $f_2 = 100MHz$  ; conclure.

2) Exprimer en fonction de  $\delta$ ,  $a$  et  $j_0$  (=amplitude de  $\vec{j}$  en  $z=0$ ) l'intensité efficace  $I$  du courant qui parcourt la région du conducteur définie par :  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ .

**Rq** : on rappelle la définition de la valeur efficace d'un courant  $i(t)$  de période  $T$  :

$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$  ; en anglais, la valeur efficace est notée : « **R.M.S** » = « Root Mean Square »,

et donne aux étudiants la suite des opérations à mener pour la calculer...

3) Exprimer en fonction de  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la région du conducteur définie par :  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$  et :  $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ .

En déduire une interprétation énergétique de la grandeur  $\delta$ .

**Rq** : on donne une primitive de :  $\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)$ , soit :

$$-\frac{\delta}{2} \exp(-z/\delta) [\cos(\omega t - z/\delta) + \sin(\omega t - z/\delta)]$$

## EXERCICE 7 : Cable coaxial (CCP PSI 2011)

*Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.*

*Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial et les phénomènes de réflexion d'ondes lorsque le câble est connecté sur une charge.*

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur  $l$ , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon  $R_1$ , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a :  $R_1 = 0,25 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 1,25 \text{ mm}$  et  $l = 100 \text{ m}$ .

## I] Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon  $R_1$ , le conducteur (2) a un rayon  $R_2$  (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur  $l$ . Vu que  $l \gg R_2$ , on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

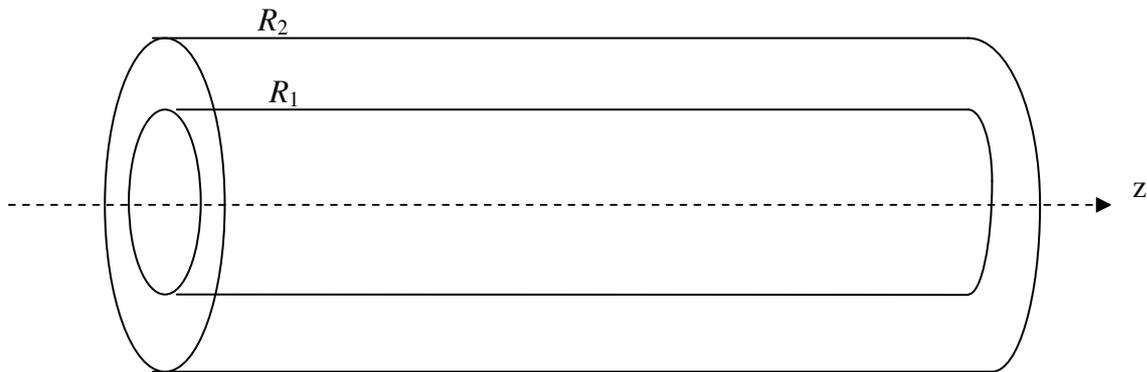


Figure 1 : Portion de câble

On note  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  la base en coordonnées cylindriques.

Aucune connaissance particulière n'est requise pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble.

## A] Capacité linéique $C$ :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives  $Q$  et  $-Q$ . Elles sont uniformément réparties en surface.

- 1) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ , dans l'espace inter-conducteur.
- 2) Pour  $R_1 < r < R_2$ , en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer  $E(r)$  en fonction de  $l, r, Q$  et  $\epsilon_0$ .
- 3) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$ , constants. Par un calcul de circulation, exprimer  $V_1 - V_2$  en fonction de  $Q, l, R_1, R_2$  et  $\epsilon_0$ .
- 4) On définit la capacité  $C_l$  du câble de longueur  $l$  par  $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ . Exprimer  $C_l$  en fonction de  $l, R_1, R_2$  et  $\epsilon_0$ , puis la capacité linéique  $C$  du câble coaxial en fonction de  $R_1, R_2$  et  $\epsilon_0$ .
- 5) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative  $\epsilon_r = 3,1$ . On a alors  $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$ .

Déterminer la valeur numérique de  $C$ .

## B] Inductance linéique $L$ :

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller  $I_0$ , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour  $-I_0$ .

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant :  $\vec{j}_{s_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} \vec{u}_z$ . On note :  $\vec{j}_{s_2}$  la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

- 6) Préciser l'expression et l'unité de  $\vec{j}_{s_2}$ .
- 7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique  $\vec{B}$ . Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ .
- 8) Pour  $R_1 < r < R_2$ , par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer  $B(r)$  en fonction  $I_0$ ,  $r$  et  $\mu_0$ .
- 9) On note :  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique  $W_m$  du câble coaxial en fonction de  $I_0$ ,  $\mu_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $l$ .
- 10) On rappelle que  $W_m = \frac{L_l I_0^2}{2}$ . Exprimer l'inductance  $L_l$  du câble de longueur  $l$ , en fonction de  $\mu_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et de  $l$ .
- 11) En déduire l'inductance linéique  $L$  du câble coaxial en fonction de  $\mu_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Déterminer la valeur numérique de  $L$ .

## II] Onde électromagnétique et impédance du câble coaxial :

### A] Détermination de l'onde électromagnétique :

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des  $z$ . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région  $R_1 < r < R_2$ , assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique :

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \text{ où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

On lui associe le champ électrique complexe :  $\underline{\vec{E}}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_r$ .

On a :  $\vec{E}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(r, z, t))$  où Re signifie partie réelle.

De même, il existe un champ magnétique  $\vec{B}(r, z, t)$  auquel on associe le champ complexe :  $\underline{\vec{B}}(r, z, t)$ , avec  $\vec{B}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{B}}(r, z, t))$ .

- 12) L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
- 13) On note  $E_0$  l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de  $E_0$  et exprimer  $\underline{\vec{E}}(r, z, t)$  en fonction de  $E_0$ ,  $r$ ,  $z$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $t$  et  $R_1$ .

- 14) Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles.
- 15) A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant  $k$  et  $\omega$ . Le milieu est-il dispersif ?
- 16) Déterminer en fonction de  $E_0, r, t, \omega, k$  et  $R_1$ , l'expression du champ magnétique complexe  $\vec{B}(r, z, t)$  associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

### B] Puissance transportée :

- 17) On désigne par  $\vec{\pi}$  le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de  $\vec{\pi}$  en fonction de  $E_0, R_1, r, k, \omega, z, t$  et  $\mu_0$ .
- 18) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée  $P$ , par le câble en fonction de  $E_0, R_1, R_2, c$  et  $\mu_0$ .  
Application numérique : en déduire l'amplitude  $E_0$  du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.

### C] Etude de l'interface $r = R_1$ :

- 19) Rappeler l'équation de passage du champ électrique à la traversée d'une surface chargée. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur (1), en déduire l'expression de la densité surfacique de charge sur le conducteur (1), en fonction de  $E_0, \epsilon_0, k, \omega, z$  et  $t$ .
- 20) Rappeler l'équation de passage du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ magnétique est nul dans le conducteur (1), en déduire que le conducteur intérieur est parcouru par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_{s1}$  qu'on exprimera en fonction de  $E_0, \mu_0, c, \omega, k, t$  et  $z$ . On remarquera que  $\vec{j}_{s1}$  est contenu dans le plan tangent au conducteur puisqu'il s'agit d'un courant surfacique.

### D] Détermination de l'impédance caractéristique du câble coaxial :

- 21) En un point de cote  $z$  donné, par un calcul de circulation, déterminer la différence de potentiel  $u(z, t) = V_1(z, t) - V_2(z, t)$  entre l'âme et la gaine, en fonction de  $E_0, R_1, R_2, k, z, \omega$  et  $t$ .  
On admettra éventuellement que le potentiel vecteur  $\vec{A}(r, z, t)$  dont dérive  $\vec{B}(r, z, t)$  est porté par le vecteur  $\vec{u}_z$ .
- 22) Pour  $z$  donné, déterminer le courant  $i(z, t)$  véhiculé par l'âme du câble coaxial, en fonction de  $E_0, R_1, k, z, \omega, t, \mu_0$  et  $c$ .
- 23) On définit l'impédance caractéristique du câble :  $Z_c = \frac{u(z, t)}{i(z, t)}$ . Exprimer  $Z_c$  en fonction de  $\mu_0, c, R_1$  et  $R_2$ , puis de  $\mu_0, \epsilon_0, R_1$  et  $R_2$ , puis en fonction de l'inductance linéique  $L$  et de la capacité linéique  $C$  du câble à structure « air ou vide », c'est-à-dire de permittivité diélectrique  $\epsilon_0$ .

24) Compte tenu de l'isolant séparant l'âme de la gaine, on a, en pratique :

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Application numérique : déterminer la valeur de  $Z_c$ .

### III] Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :

La gaine est maintenant reliée à la masse ( $V_2 = 0$ ), et l'âme, portée au potentiel  $V_1(z,t) = V(z,t)$ , est parcourue par le courant  $i(z,t)$ . On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur  $dz$  de la figure 2 où  $L$  et  $C$  désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

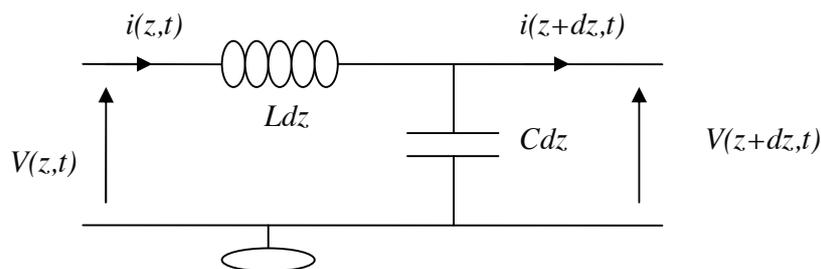


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

25) A quelle(s) condition(s) sur les matériaux peut-on modéliser ainsi la portion de câble coaxial ?

#### A] Equation de propagation :

26) Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions  $V(z,t)$  et  $i(z,t)$ .

27) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction  $V(z,t)$  d'une part, puis par la fonction  $i(z,t)$  d'autre part. Quelle est la forme la plus générale de la fonction  $V(z,t)$  ?

#### B] Phénomène de réflexion en bout de câble :

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation  $\omega$ .

On posera  $V(z,t) = V_i(z,t) + V_r(z,t)$ .

Avec  $V_i(z,t) = V_{im} \cos(\omega t - kz + \varphi)$  et  $V_r(z,t) = V_{rm} \cos(\omega t + kz + \psi)$ .

A ces ondes réelles, on associe les ondes complexes :  $\underline{V}(z,t) = \underline{V}_i(z,t) + \underline{V}_r(z,t)$  avec

$$\underline{V}_i(z,t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} \text{ et } \underline{V}_r(z,t) = \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)} \text{ où } \underline{V}_{im} = V_{im} e^{j\varphi} \text{ et } \underline{V}_{rm} = V_{rm} e^{j\psi}.$$

Le câble est relié à un générateur basses fréquences, qui délivre en  $z = 0$ , une tension sinusoïdale, de sorte que l'onde totale en  $z = 0$  est sinusoïdale. Le choix de l'origine des temps nous permet de poser :  $V(0,t) = V_0 \cos(\omega t)$ , à laquelle on associe la forme complexe :  $\underline{V}(0,t) = V_0 e^{j\omega t}$ .

28) Le câble est en court circuit, ou refermé par une résistance nulle ( $R = 0$ ) à l'extrémité située en  $z = l$ .

Expliciter la condition limite  $\underline{V}(l,t)$  vérifiée par la fonction  $\underline{V}(z,t)$  en  $z = l$ .

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifié par  $\underline{V}_{im}$  et  $\underline{V}_{rm}$ .

Puis exprimer  $\underline{V}_{im}$  et  $\underline{V}_{rm}$  en fonction de  $V_0$ ,  $k$  et  $l$ .

29) On définit le coefficient de réflexion  $r$  par :  $r = \frac{V_r(l,t)}{V_i(l,t)}$ .

Déterminer  $r$  dans le cas du court-circuit ( $R = 0$ ).

30) Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ( $R = +\infty$ ) à son extrémité située en  $z = l$ .

Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en  $z = l$ .

On admettra dans ce cas que  $r = 1$ .

31) Le câble est maintenant chargé à son extrémité en  $z = l$ , par une résistance  $R$ . En admettant que le coefficient de réflexion  $r$  est réel, justifier qu'il existe au moins une valeur critique de  $R$  notée  $R_c$  pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?

Dans la suite du problème, on admettra que  $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

#### IV] Etude expérimentale :

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en  $z = 0$ , délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carré », entre les niveaux 0 et  $V_0$ . L'autre extrémité du câble est refermée par une résistance  $R$ .

En plus des phénomènes de propagation et de réflexion éventuelle de l'onde, il y a un léger phénomène d'atténuation. On supposera que la valeur de la résistance  $R$  n'a aucune influence tant sur la durée de propagation que sur l'amortissement dû au chemin parcouru. On admet de plus qu'il n'y a pas de réflexions multiples.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en  $z = 0$  la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie (figure 3). Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de  $R$ .

32) Donner une valeur approchée de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

#### A] Cas d'un court-circuit : $R = 0$ .

L'extrémité  $z = l$  est en court circuit :  $R = 0$ .

33) On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en  $z = 0$ , par la figure suivante :

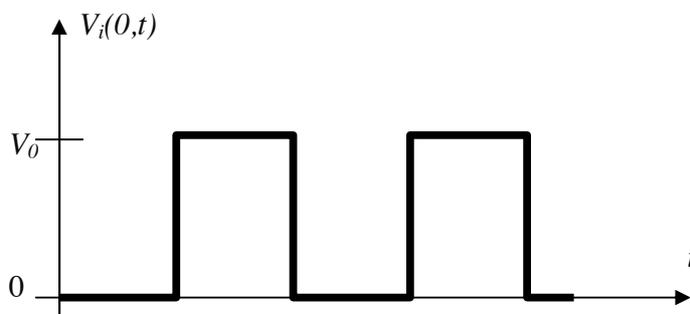


Figure 3 : Onde incidente

En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à  $T/4$ , où  $T$  est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées  $V_r(0,t)$  et  $V_{tot}(0,t)$  au point  $z = 0$ .

- 34) En utilisant l'oscillogramme correspondant à  $R = 0$ , déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble. Celle-ci est-elle en accord avec les valeurs de  $L$  et  $C$  obtenues précédemment ?
- 35) On définit le coefficient d'amortissement, noté  $K$ , au cours de la propagation globale, comme le rapport du module de l'amplitude de l'onde réfléchie une fois revenue en  $z = 0$  sur le module de l'amplitude de l'onde incidente émise en  $z = 0$ . Déterminer une valeur approchée de  $K$ .

**B] Cas général  $R \neq 0$  :**

- 36) A partir des autres oscillogrammes de la figure 4, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion pour les différentes valeurs de  $R$ , à savoir :  $20 \Omega$ ,  $40 \Omega$ ,  $60 \Omega$  et  $80 \Omega$ .
- 37) Pour quelle valeur particulière  $R_c$  de  $R$ , n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ? Ceci est-il en accord avec les résultats obtenus lors des parties précédentes ? Pourquoi n'y a-t-il pas de réflexions multiples ?

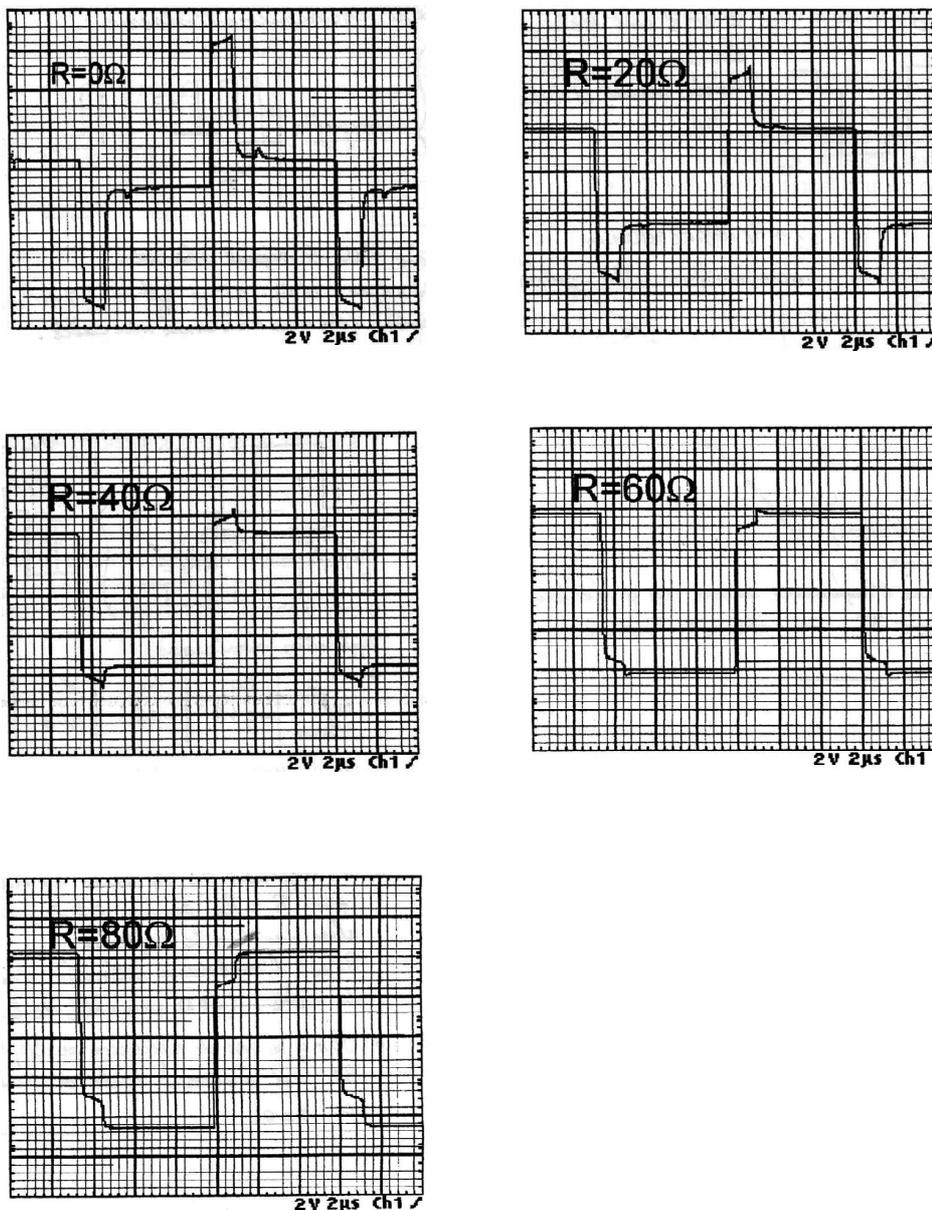


Figure 4 : Oscillogrammes