

TD Em2 (B) : Champs variables. Ondes électromagnétiques

EXERCICE 1 : Champ électromagnétique d'un LASER à gaz

Un faisceau LASER émet une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon Oz qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction Ox' inclinée de 60° par rapport à l'axe Ox.

- Ecrire les composantes du vecteur d'onde \vec{k} , du champ \vec{E} , du champ \vec{B} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$
- Calculer leurs normes dans le cas d'un LASER à Argon ionisé ($\lambda_0 = 488\text{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1 mm^2 de section et de puissance moyenne 1 W.

EXERCICE 2 : Détermination des grandeurs caractéristiques d'une Oem

Dans les unités SI, le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par la relation :

$$\vec{E}(M,t) = \left(-3 \cdot 10^4 \vec{e}_x + 3\sqrt{3} \cdot 10^4 \vec{e}_y \right) \cdot \cos \left[\frac{\pi}{3} \cdot (2\sqrt{3}x + 2y) \cdot 10^7 - 9,42 \cdot 10^{15} t \right]$$

Déterminer l'état de polarisation de cette onde, l'amplitude du champ électrique, la direction de propagation de l'onde, les valeurs numériques du module du vecteur d'onde, du nombre d'onde, de la longueur d'onde, la fréquence, la période et la pulsation, la vitesse de propagation, l'amplitude du champ magnétique. Est-ce une onde plane ? progressive ? monochromatique ?

EXERCICE 3 : Superposition de deux ondes planes progressives harmoniques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le vide respectivement selon les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &\equiv \sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_z \\ \vec{u}_2 &\equiv -\sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_z \end{aligned}$$

- Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde ?
- Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à \vec{u}_y , et qu'ils sont en phase dans le plan $x=0$, donnez leur expression sous forme complexe.
- En déduire l'expression du champ électrique total (réel). Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?
- Donner la forme du champ magnétique total (réelle). Commentez.
- En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

EXERCICE 4 : L'induction de Faraday (PTSI) et les courants de Foucault.

Montrer que la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday donne la loi de Faraday de première année.

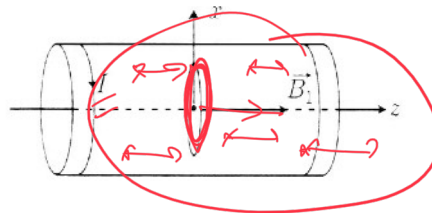
Induction

Une bobine plate de N spires, de section S , de résistance R et d'inductance négligeable est placée à l'intérieur d'un solénoïde idéal comportant n spires par unité de longueur, parcouru par un courant I constant.

Un opérateur fait tourner la bobine à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe parallèle à (Ox) , portant le diamètre de la bobine et perpendiculaire à l'axe (Oz) du solénoïde.

$\vec{M} = i(t) \vec{S}$
 ↓
 magnétique.

$$\vec{M} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

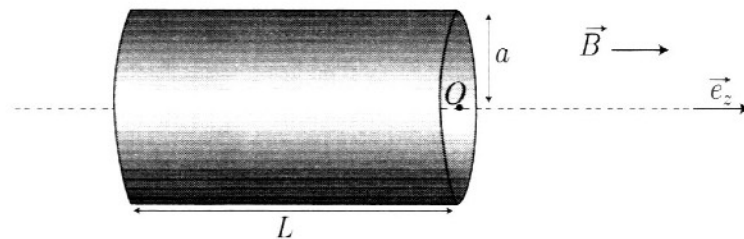


$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

1. Décrire qualitativement ce qui se passe dans la bobine.
2. Exprimer le courant induit dans la bobine.
3. Exprimer les actions mécaniques du solénoïde sur la bobine.

Induction

On place un cylindre de rayon a , de longueur L , d'axe (Oz) et de conductivité γ dans un champ magnétique uniforme :

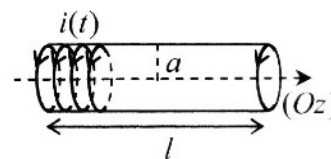


$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

1. Quel dispositif permet d'obtenir un tel champ ?
2. Justifier qu'il va apparaître dans le milieu un champ électrique.
3. En admettant que ce dernier est orthoradial, l'exprimer en fonction de B_0 , r et ω pour $r < a$.
4. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le matériau.

□ Exercice 5.4. Solénoïde dans l'ARQS

On considère une portion de longueur l d'un solénoïde infini d'axe (Oz) comportant n spires jointives par unité de longueur. On négligera la résistance de cette bobine. On note a le rayon de ces spires parcourues, en régime variable, par un courant d'intensité $i(t)$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) (r, φ, z) rapportées au trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. On admet que



les champs magnétique et électrique, dans l'espace intérieur à la bobine, sont respectivement donnés (par une démarche analogue à celle explicitée dans l'exemple de la méthode 11.2) en notation complexe par :

$$\vec{B}(r,t) = B_0 \exp(i\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^{2k} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(r,t) = -ic B_0 \exp(i\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!(k+1)!)} \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^{2k-1} \vec{e}_\varphi$$

1. On pose $X = \frac{r\omega}{c}$. On se place dans le cadre de l'ARQS, avec $X \ll 1$. Montrer qu'en négligeant les termes d'ordre supérieure ou égal à deux dans les développements ci-dessus, le champ magnétique est uniforme (comme en statique), mais qu'il existe au même niveau d'approximation (et contrairement au cas statique) un champ électrique. Donner les expressions de ces champs (réels) en fonction des variables d'intérêt du problème. Pourquoi parle-t-on, dans ce cas, d'ARQS magnétique ?

2. Montrer que la contribution électrique à l'énergie électromagnétique dans la bobine est négligeable devant la contribution magnétique.

3. a) Exprimer, dans le cadre de l'ARQS, les champs $\vec{B}(r, t)$ et $\vec{E}(r, t)$ en fonction de l'intensité $i(t)$ et de sa dérivée première. Montrer ainsi qu'au même niveau d'approximation, le

vecteur de Poynting a pour expression
$$\vec{R}(r,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2(t) \right) \vec{e}_r.$$

b) Montrer que la variation d'énergie magnétique stockée dans une portion de solénoïde de longueur l s'identifie à l'opposé de la puissance rayonnée à travers la surface qui la limite. On rappelle que dans le cadre de la magnétostatique, le coefficient de *self inductance* d'une telle portion de bobine de rayon a a pour expression : $L = \mu_0 n^2 a^2 \pi l$.

c) Ce résultat est-il conforme au bilan local de puissance électromagnétique dans la portion de bobine envisagée ?

EXERCICE 6 : Cable coaxial (CCP PSI 2011)

Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.

Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial et les phénomènes de réflexion d'ondes lorsque le câble est connecté sur une charge.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : $R_1 = 0,25$ mm, $R_2 = 1,25$ mm et $l = 100$ m.

I] Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

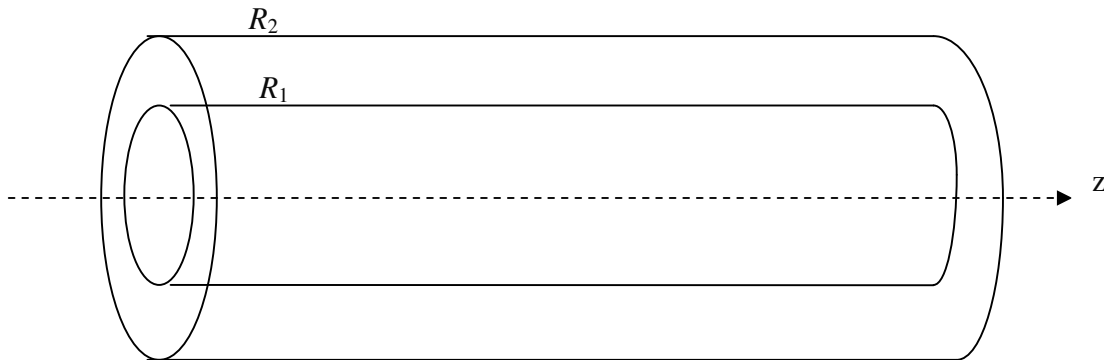


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

Aucune connaissance particulière n'est requise pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble.

A] Capacité linéique C :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

- 1) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, dans l'espace inter-conducteur.
- 2) Pour $R_1 < r < R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l, r, Q et ϵ_0 .
- 3) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 , constants. Par un calcul de circulation, exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q, l, R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 4) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l, R_1, R_2 et ϵ_0 , puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 5) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 3,1$. On a alors $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.

Déterminer la valeur numérique de C .

B] Inductance linéique L :

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\vec{j}_{s_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} \vec{u}_z$. On note : \vec{j}_{s_2} la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

- 6) Préciser l'expression et l'unité de \vec{j}_{s_2} .
- 7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.
- 8) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction I_0 , r et μ_0 .
- 9) On note : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0 , μ_0 , R_1 , R_2 et l .
- 10) On rappelle que $W_m = \frac{L_l I_0^2}{2}$. Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l , en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 et de l .
- 11) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0 , R_1 , R_2 . Déterminer la valeur numérique de L .

II] Onde électromagnétique et impédance du câble coaxial :

A] Détermination de l'onde électromagnétique :

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des z . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique :

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \text{ où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

$$\text{On lui associe le champ électrique complexe : } \underline{\vec{E}}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_r.$$

$$\text{On a : } \vec{E}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{E}}(r, z, t)) \text{ où Re signifie partie réelle.}$$

De même, il existe un champ magnétique $\vec{B}(r, z, t)$ auquel on associe le champ complexe : $\underline{\vec{B}}(r, z, t)$, avec $\vec{B}(r, z, t) = \text{Re}(\underline{\vec{B}}(r, z, t))$.

- 12) L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
- 13) On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\underline{\vec{E}}(r, z, t)$ en fonction de E_0 , r , z , k , ω , t et R_1 .

- 14) Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles.
- 15) A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω . Le milieu est-il dispersif ?
- 16) Déterminer en fonction de E_0, r, t, ω, k et R_1 , l'expression du champ magnétique complexe $\vec{B}(r, z, t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

B] Puissance transportée :

- 17) On désigne par $\vec{\pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\vec{\pi}$ en fonction de $E_0, R_1, r, k, \omega, z, t$ et μ_0 .
- 18) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P , par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0 .
Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.

C] Etude de l'interface $r = R_1$:

- 19) Rappeler l'équation de passage du champ électrique à la traversée d'une surface chargée. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur (1), en déduire l'expression de la densité surfacique de charge sur le conducteur (1), en fonction de $E_0, \epsilon_0, k, \omega, z$ et t .
- 20) Rappeler l'équation de passage du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant. Par application de cette relation de passage, et en remarquant que le champ magnétique est nul dans le conducteur (1), en déduire que le conducteur intérieur est parcouru par une densité surfacique de courant \vec{j}_{s1} qu'on exprimera en fonction de $E_0, \mu_0, c, \omega, k, t$ et z . On remarquera que \vec{j}_{s1} est contenu dans le plan tangent au conducteur puisqu'il s'agit d'un courant surfacique.

D] Détermination de l'impédance caractéristique du câble coaxial :

- 21) En un point de cote z donné, par un calcul de circulation, déterminer la différence de potentiel $u(z, t) = V_1(z, t) - V_2(z, t)$ entre l'âme et la gaine, en fonction de $E_0, R_1, R_2, k, z, \omega$ et t .
On admettra éventuellement que le potentiel vecteur $\vec{A}(r, z, t)$ dont dérive $\vec{B}(r, z, t)$ est porté par le vecteur \vec{u}_z .
- 22) Pour z donné, déterminer le courant $i(z, t)$ véhiculé par l'âme du câble coaxial, en fonction de $E_0, R_1, k, z, \omega, t, \mu_0$ et c .
- 23) On définit l'impédance caractéristique du câble : $Z_c = \frac{u(z, t)}{i(z, t)}$. Exprimer Z_c en fonction de μ_0, c, R_1 et R_2 , puis de μ_0, ϵ_0, R_1 et R_2 , puis en fonction de l'inductance linéique L et de la capacité linéique C du câble à structure « air ou vide », c'est-à-dire de permittivité diélectrique ϵ_0 .

24) Compte tenu de l'isolant séparant l'âme de la gaine, on a, en pratique :

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Application numérique : déterminer la valeur de Z_c .

III] Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :

La gaine est maintenant reliée à la masse ($V_2 = 0$), et l'âme, portée au potentiel $V_1(z,t) = V(z,t)$, est parcourue par le courant $i(z,t)$. On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur dz de la figure 2 où L et C désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

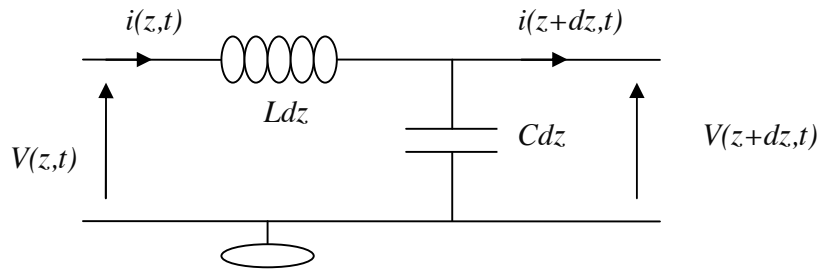


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

25) A quelle(s) condition(s) sur les matériaux peut-on modéliser ainsi la portion de câble coaxial ?

A] Equation de propagation :

- 26) Expliciter le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions $V(z,t)$ et $i(z,t)$.
- 27) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction $V(z,t)$ d'une part, puis par la fonction $i(z,t)$ d'autre part. Quelle est la forme la plus générale de la fonction $V(z,t)$?

B] Phénomène de réflexion en bout de câble :

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation ω .

On posera $V(z,t) = V_i(z,t) + V_r(z,t)$.

Avec $V_i(z,t) = V_{im} \cos(\omega t - kz + \varphi)$ et $V_r(z,t) = V_{rm} \cos(\omega t + kz + \psi)$.

A ces ondes réelles, on associe les ondes complexes : $\underline{V}(z,t) = \underline{V}_i(z,t) + \underline{V}_r(z,t)$ avec

$$\underline{V}_i(z,t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} \text{ et } \underline{V}_r(z,t) = \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)} \text{ où } \underline{V}_{im} = V_{im} e^{j\varphi} \text{ et } \underline{V}_{rm} = V_{rm} e^{j\psi}.$$

Le câble est relié à un générateur basses fréquences, qui délivre en $z = 0$, une tension sinusoïdale, de sorte que l'onde totale en $z = 0$ est sinusoïdale. Le choix de l'origine des temps nous permet de poser : $V(0,t) = V_0 \cos(\omega t)$, à laquelle on associe la forme complexe : $\underline{V}(0,t) = V_0 e^{j\omega t}$.

28) Le câble est en court circuit, ou refermé par une résistance nulle ($R = 0$) à l'extrémité située en $z = l$.

Expliciter la condition limite $\underline{V}(l,t)$ vérifiée par la fonction $\underline{V}(z,t)$ en $z = l$.

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifié par \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} .

Puis exprimer \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} en fonction de V_0 , k et l .

29) On définit le coefficient de réflexion r par : $r = \frac{V_r(l,t)}{V_i(l,t)}$.

Déterminer r dans le cas du court-circuit ($R = 0$).

30) Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ($R = +\infty$) à son extrémité située en $z = l$.

Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en $z = l$.

On admettra dans ce cas que $r = 1$.

31) Le câble est maintenant chargé à son extrémité en $z = l$, par une résistance R . En admettant que le coefficient de réflexion r est réel, justifier qu'il existe au moins une valeur critique de R notée R_c pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?

Dans la suite du problème, on admettra que $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

IV] Etude expérimentale :

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en $z = 0$, délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carré », entre les niveaux 0 et V_0 . L'autre extrémité du câble est refermée par une résistance R .

En plus des phénomènes de propagation et de réflexion éventuelle de l'onde, il y a un léger phénomène d'atténuation. On supposera que la valeur de la résistance R n'a aucune influence tant sur la durée de propagation que sur l'amortissement dû au chemin parcouru. On admet de plus qu'il n'y a pas de réflexions multiples.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en $z = 0$ la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie (figure 3). Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de R .

32) Donner une valeur approchée de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

A] Cas d'un court-circuit : $R = 0$.

L'extrémité $z = l$ est en court circuit : $R = 0$.

33) On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en $z = 0$, par la figure suivante :

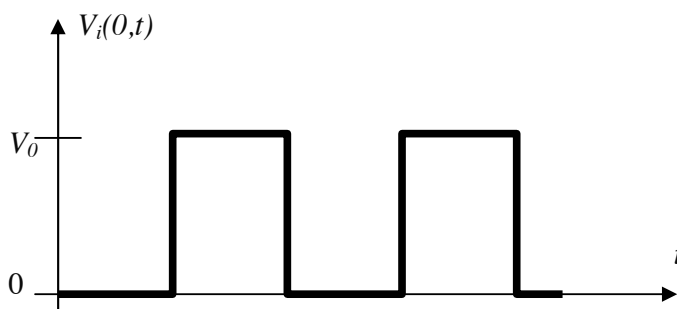


Figure 3 : Onde incidente

En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à $T/4$, où T est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées $V_r(0,t)$ et $V_{tot}(0,t)$ au point $z = 0$.

- 34) En utilisant l'oscillogramme correspondant à $R = 0$, déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble. Celle-ci est-elle en accord avec les valeurs de L et C obtenues précédemment ?
- 35) On définit le coefficient d'amortissement, noté K , au cours de la propagation globale, comme le rapport du module de l'amplitude de l'onde réfléchie une fois revenue en $z = 0$ sur le module de l'amplitude de l'onde incidente émise en $z = 0$. Déterminer une valeur approchée de K .

B] Cas général $R \neq 0$:

- 36) A partir des autres oscillogrammes de la figure 4, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion pour les différentes valeurs de R , à savoir : 20Ω , 40Ω , 60Ω et 80Ω .
- 37) Pour quelle valeur particulière R_c de R , n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ? Ceci est-il en accord avec les résultats obtenus lors des parties précédentes ? Pourquoi n'y a-t-il pas de réflexions multiples ?

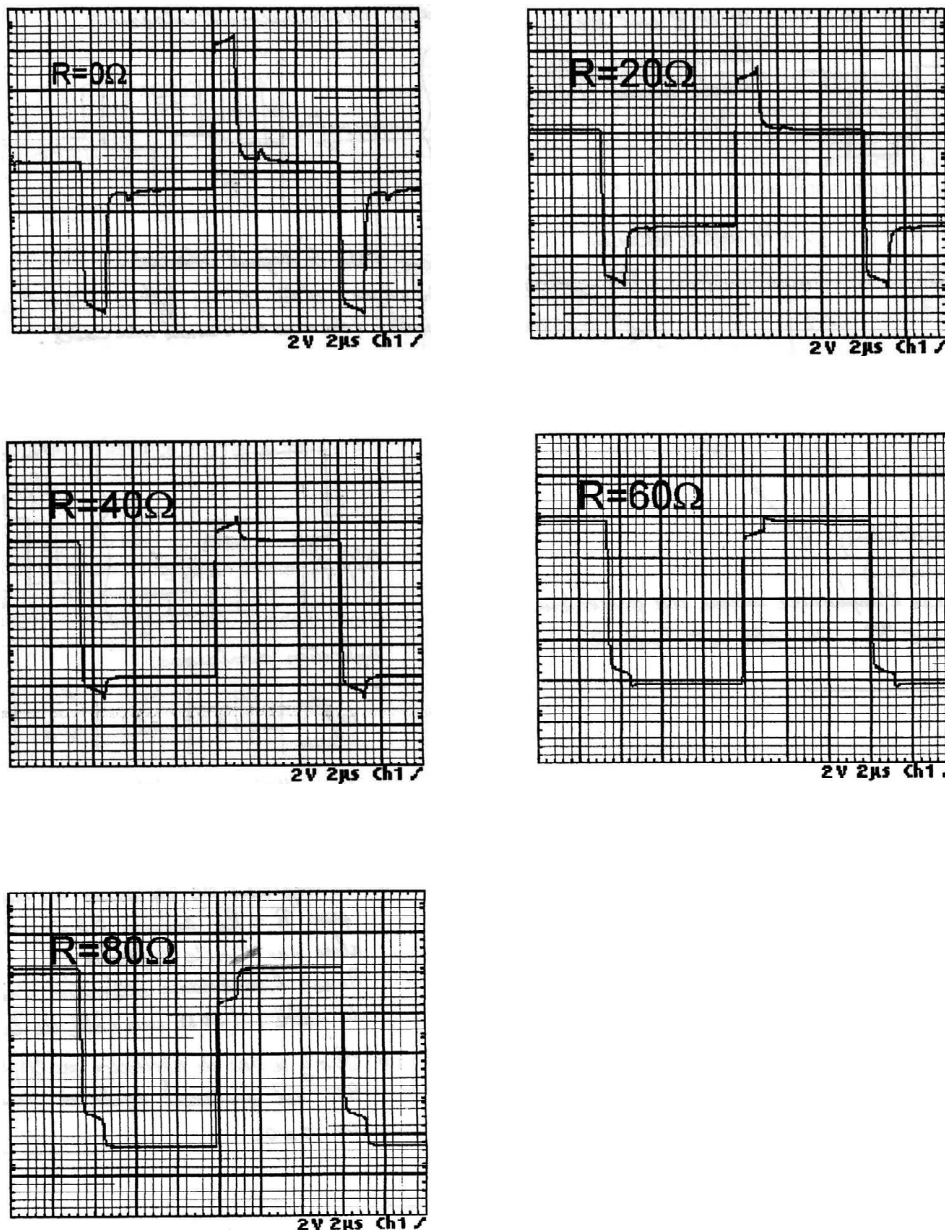


Figure 4 : Oscillogrammes

Constantes physiques

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta} E = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \right) \vec{e}_r + \dots$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (a_z)}{\partial z}$$

$$r \vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial (a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial (a_r)}{\partial z} - \frac{\partial (a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2} (a_r + 2 \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2} (a_\theta - 2 \frac{\partial a_r}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_\theta + (\Delta a_z) \vec{u}_z$$

$$r \vec{\text{rot}}[r \vec{\text{rot}}(\vec{a})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{a})] - \Delta \vec{a}$$

$$\vec{\Delta} E = \left(\Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} \right) \vec{u}_r + \dots$$