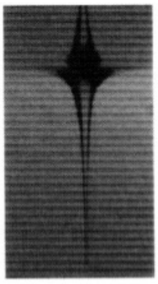
TD MF2 : Fluides en écoulement

EXERCICE 1 : Vortex de vidange

On modélise, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le tourbillon de vidange d'un lavabo (encore appelé *Vortex*) par un cœur cylindrique de rayon a et d'axe (Oz) dans lequel la vitesse est donnée par $\vec{v} = r\omega\vec{e_\theta}$ où ω est la vitesse angulaire du fluide. Dans la zone périphérique qui entoure le cœur, le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = \frac{C}{r}\vec{e_\theta}$, où C est une constante. On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, l'expression du rotationnel est :



$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_z}.$$

1. Tracer l'allure de v en fonction de r. En déduire l'expression de la constante C.

2. Montrer que le vecteur tourbillon n'est non nul que dans une région que l'on précisera. L'exprimer par deux méthodes différentes.

3. On se place dans la zone périphérique du tourbillon. Donner l'allure des lignes de courants dans un plan orthogonal à (Oz). Montrer que la vitesse dérive d'un potentiel φ et donner l'allure des équipotentielles. Décrire brièvement le mouvement d'un bouchon placé à la surface de l'eau dans cette zone. Le bouchon tourne-t-il sur lui-même ? Tourne-t-il autour de l'axe du tourbillon ?

EXERCICE 2 : Torricelli : temps de vidange

Déterminer la durée nécessaire pour vider en totalité un réservoir de grande section S rempli initialement d'eau sur une hauteur h, la vidange s'effectuant par un petit trou à sa base de section s.

On analysera avec soin les conditions de pertinence des hypothèses effectuées.

EXERCICE 3 : Dépression par effet Venturi

a) Un capteur destiné à mesurer le débit d'un fluide est constitué d'un étranglement (Fig. 17). On note S_0 et S_1 les sections au niveau des points A_0 et A_1 situés sur une ligne de courant moyenne.

Un tube coudé vient se brancher latéralement sur la conduite, il contient une certaine quantité de mercure (masse volumique $\mu_{Hg} = 1{,}36.10^4$ kg.m^{-3}), qui se déplace lorsque le capteur est parcouru par le fluide.

En régime stationnaire, le dénivelé entre les points B_0 et B_1 situés sur les deux surfaces de mercure est Δh.

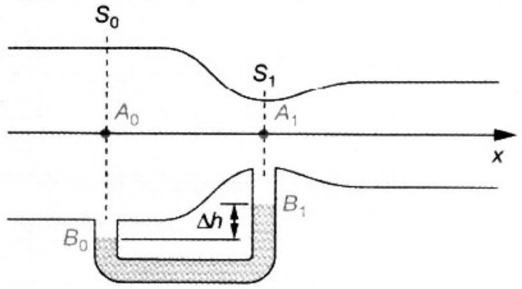


Figure 17

Le fluide qui traverse le capteur est supposé incompressible, de masse volumique $\mu \ll \mu_{Hg}$, on le considère parfait.

Appliquer la formule de Bernoulli entre les points A_0 et A_1 et relier les vitesses v_0 et v_1 à la différence des pressions P_0 et P_1 entre ces points.

b) On admet que la formule utilisable dans le cadre de la statique des fluides s'applique entre les points A_0 et B_0, ainsi qu'entre A_1 et B_1 (trajets perpendiculaires à un écoulement laminaire).

En déduire une relation entre P_0, P_1 et Δh.

c) Que peut-on dire de la répartition des vitesses sur chacune des sections S_0 et S_1 ? En déduire une relation entre le débit volumique et le dénivelé Δh.

d) En pratique, cette loi n'est pas très bien suivie, pour quelles raisons ?

e) On retient néanmoins la proportionnalité du débit à Δh^α. Quelle valeur de l'exposant α suggère l'étude idéale ? Comment obtenir en pratique un capteur exploitable ?

EXERCICE 4: Fluide PARFAIT à un embranchement horizontal puis vertical

Une conduite d'adduction d'eau présente une fourche, afin d'alimenter deux utilisateurs (Fig. 19) ; on raisonne en régime stationnaire.

Le liquide est admis au point E avec un débit volumique D, l'écoulement est alors divisé en deux branches conduisant aux points de sortie S_1 et S_2.

Le diamètre d de chaque portion est identique et on suppose ici qu'il est possible de négliger tous les phénomènes dissipatifs (viscosité, frottement pariétal).

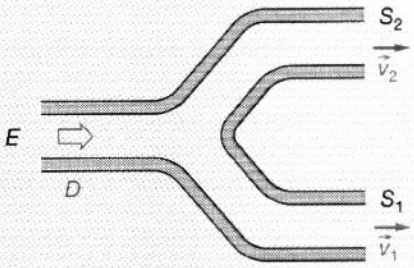


Figure 19

A. Adduction horizontale

On envisage dans un premier temps le dispositif horizontal

a) On note D_1 et D_2 les débits au niveau des sorties. Quelle relation les concernant peut-on écrire en régime stationnaire ?

b) On note v_0, v_1 et v_2 la vitesse moyenne de l'écoulement en entrée et sur chaque sortie, exprimer ces vitesses.

c) En considérant que la relation de Bernoulli s'applique, exprimer la pression au niveau du point d'entrée E, sachant que chacune des sorties se trouve à la pression atmosphérique P_a.

B. Prise en compte de dénivelés

La sortie 1 est située à une hauteur h_1 sous le point E, tandis que la sortie 2 est située à une hauteur h_2 au-dessus de E (Fig. 20).

On adopte les valeurs numériques $d = 4$ cm, $D = 2.10^{-3}$ m^3.s^{-1}, $h_1 = 5$ cm $h_2 = 3$ cm, $g = 9{,}8$ m.s^{-2}, $P_a = 10^5$ Pa.

a) Effectuer un bilan de débit et en déduire une relation entre les vitesses v_0, v_1 et v_2.

b) Utiliser la relation de Bernoulli entre l'entrée et chacune des sorties, et en déduire une nouvelle relation entre les vitesses, faisant intervenir g, h_1 et h_2.

c) Déterminer les vitesses de sortie.

d) Comparer les débits.

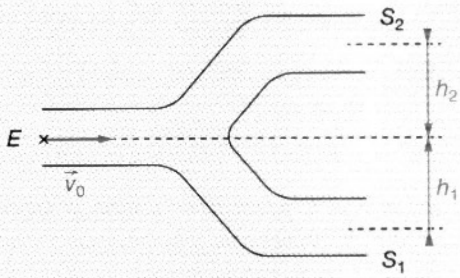


Figure 20

EXERCICE 5 : Lubrification

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle du dessus possède la vitesse constante v_0 (Fig. 29).

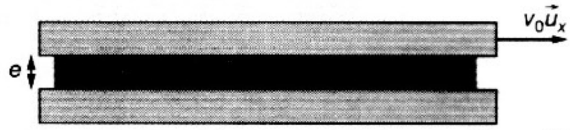


Figure 29

a) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ?

b) Proposer la forme la plus simple possible de champ des vitesses vérifiant ces conditions.

c) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure ?

Un bloc métallique parallélépipédique, de surface carrée de côté $a = 10$ cm et de masse $m = 1$ kg, est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité (dynamique) η. La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l'écoulement de l'huile peut être modélisé de la même manière qu'au début de cet exercice, avec une épaisseur $e = 1$ mm d'huile. Le champ de pesanteur est noté $g \simeq 9{,}8$ m.s^{-2}.

d) En déduire l'équation du mouvement du bloc.

e) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur $v_f = 0{,}5$ m.s^{-1}. En déduire la viscosité η de l'huile.

f) Quelle est la durée du régime transitoire ?

EXERCICE 6 : Pertes de charge régulière et singulière

Calcul d'une perte de charge régulière

On s'intéresse à un écoulement d'eau liquide dans une conduite de diamètre $d = 32$ mm (1" = 1 pouce) avec un débit volumique constant $D_V = 5\,\text{m}^3.\text{h}^{-1}$ (Fig. 9).

On énonce généralement une règle d'usage simple, dans ce cas particulier : « la perte de charge correspond à 0,1 mètre par unité de longueur de canalisation ».

On désire confronter cette règle de calcul très simple à ce que l'utilisation d'une loi plus élaborée permet de prévoir.

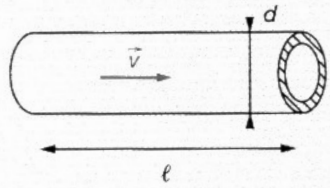


Figure 9

a) Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement et en déduire son nombre de Reynolds défini par $\text{Re} = \dfrac{v d \mu}{\eta}$, avec $\mu = 10^3$ kg.m^{-3} et $\eta = 10^{-3}$ Pl.

b) Pour des écoulements dont le nombre de Reynolds est compris entre 2 000 et 10^5, la perte de charge peut être calculée par la formule de Blasius :

$$\Delta P_C = 0{,}316\,\text{Re}^{-0{,}25}\,\frac{\ell}{d}\,\mu\,\frac{v^2}{2},$$

où ℓ est la longueur de canalisation.

Déterminer la perte de charge par unité de longueur de canalisation $\dfrac{\Delta P_C}{\ell}$ dans le cas envisagé et vérifier l'ordre de grandeur proposé par la règle simple : $\dfrac{\Delta z_C}{\ell} = 0{,}1$.

c) La règle d'usage convient-elle pour un débit allant de $2\,\text{m}^3.\text{h}^{-1}$ à $7\,\text{m}^3.\text{h}^{-1}$?

Perte de charge dans un élargissement

Une conduite cylindrique parcourue par un écoulement incompressible et stationnaire présente un changement de section (Fig. 10). Le diamètre aval est le double du diamètre amont : $d' = 2d$. On ne prend pas en compte les effets de pesanteur.

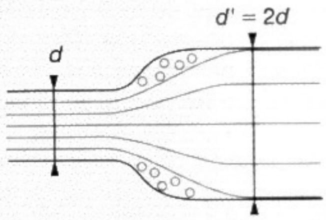


Figure 10

a) Lorsqu'on suppose le fluide parfait et les conditions d'application de la formule de Bernoulli réunies, déterminer la variation de pression $P - P'$ entre amont et aval, en fonction de l'énergie cinétique volumique du fluide en amont $e_{c,v} = \mu \dfrac{v^2}{2}$.

Commenter le signe.

b) Une étude plus précise de l'écoulement met en évidence l'existence d'une zone morte (zone de fluide immobile) sur la partie latérale située juste derrière l'élargissement. On montre alors que la différence de pression entre l'amont et une section située en aval de cette zone s'écrit : $P - P' = \mu v'(v' - v)$ (théorème de Bélanger). En déduire, dans le cadre de l'application de cette relation, la nouvelle expression de la différence de pression $P - P'$ en fonction de $e_{c,v}$.

c) Quel est l'écart relatif entre les deux résultats ? Commenter.

d) Proposer une expression pour la perte de charge singulière ΔP_C, en fonction de $e_{c,v}$, dans le cas de l'élargissement de section envisagé ici. Commenter le signe du résultat.

EXERCICE 7 : Système artériel : nombre d'artères et d'artérioles

À la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon $a_0 = 1$ cm. Le débit volumique est $D_V = 6$ L.min^{-1} et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. La viscosité du sang est $\eta \approx 4.10^{-3}$ Pl et sa masse volumique vaut $\mu = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3}.

a) Quelle est la vitesse v du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite.

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise ensuite en N_a artères de rayon a_a, puis en N'_a artérioles de rayon $a'_a = 20\,\mu$m (Fig. 30). Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{V,a} = 2.10^{-6}$ m^3.s^{-1}.

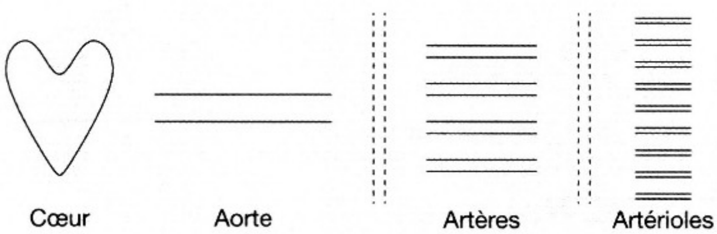


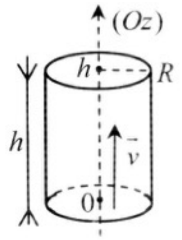
Figure 30

b) Calculer le nombre N_a d'artères.

c) Faire de même avec celui N'_a sachant que la vitesse du sang dans une artériole est $v'_a = 5\ \mathrm{mm.s^{-1}}$.

d) L'écoulement est-il laminaire dans une artériole ?

EXERCICE 8 : Système artériel : Perte de charge



Le sang qui est ici assimilé à un fluide incompressible de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η s'écoule dans une artère modélisée par un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h. On se place en régime laminaire permanent. La vitesse du fluide est de la forme : $\vec{v} = v(r)\vec{e_z}$. En $z = h$ la pression est prise égale à P_1 et en $z = 0$ elle vaut $P_1 + \rho g h + \Delta P$ où ΔP est la surpression imposée par le cœur à la base du cylindre permettant l'écoulement du fluide malgré la viscosité.

1. Appliquer le théorème de la résultante cinétique au fluide contenu dans un cylindre de rayon r inférieur à R et de hauteur h sachant que l'on est en régime permanent. Pour fixer le signe de la force de cisaillement subie par le fluide, on remarquera que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$, la vitesse étant nulle sur la paroi de l'artère en $r = R$. En déduire $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ puis $v(r)$.

2. En déduire le débit massique D_m en fonction de ΔP et des autres données (loi dite de Poiseuille).

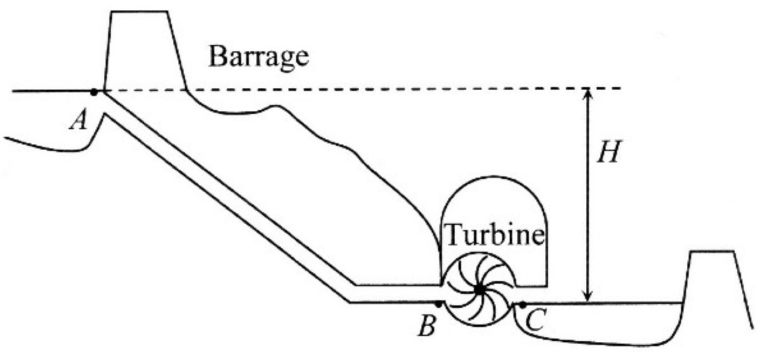
3. a) Calculer ΔP dans une artère de longueur h = 0,50 m, de rayon R = 4,0 mm où le débit massique du sang est $D_m = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. La masse volumique du sang sera prise égale à $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et la viscosité dynamique à $\eta = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$.

b) Le rayon de l'artère est divisé par 2, ΔP étant donné. Par quel facteur est divisé le débit massique de sang ?

c) Exprimer le nombre de Reynolds R_e de l'écoulement en fonction de ρ, R, ΔP, η et h. Le calculer numériquement. L'écoulement est-il plutôt laminaire ou turbulent ?

EXERCICE 9 : Turbine d'un Barrage

Lors de la phase de vidange du barrage de Grand' Maison, l'eau s'écoule dans une conduite forcée reliant le lac de retenue en amont de Grand' Maison à la retenue du Verney en aval. La conduite a une longueur de 1450 mètres. Elle se termine par un coude la ramenant à l'horizontal pour alimenter une turbine Pelton qui assure la conversion d'une partie de l'énergie potentielle de l'eau en énergie cinétique de rotation sur l'arbre de la turbine. La conduite a un diamètre constant de 3 mètres et se caractérise par une perte de charge Δh exprimée en hauteur d'eau. La vitesse dans la conduite est $v = 3{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



La viscosité dynamique de l'eau dans la conduite est prise égale à $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa} \cdot s$, sa masse volumique est $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. La hauteur de chute est prise égale à $H = 922$ mètres.

1. En utilisant le diagramme de Moody présenté dans la méthode 6, estimer les pertes de charge régulière par unité de longueur de conduite sachant que sa rugosité absolue ε est de l'ordre de 1 mm . En déduire la perte de charge totale de la conduite Δh exprimée en hauteur d'eau. Commenter.

2. Exprimer la perte de charge en hauteur d'eau Δh_{coude} provoquée par le passage du coude terminal avant l'entrée dans la turbine Pelton. Le coefficient de perte de charge singulière sera pris égal à $K \approx 1{,}5$. Commenter.

3. En un point A à la surface de la retenue amont, la vitesse est supposée nulle. Exprimer la pression en hauteur d'eau équivalente $\dfrac{P_B}{\rho g}$ au point B en entrée de la turbine. Application numérique.

4. On suppose, pour simplifier, qu'en sortie de la Pelton au point C, la pression est égale à la pression atmosphérique et la vitesse est négligeable. En considérant que la turbine Pelton a un rendement de 75 %, quelle est la puissance disponible sur l'arbre de la turbine ?

EXERCICE 10 : Pompage pour une installation horizontale

On veut alimenter en eau avec un débit volumique constant D_v un village distant de L = 10 km dans un plan horizontal, à l'aide de tuyaux de section circulaire. La loi de Poiseuille $\Delta P = \dfrac{8\eta D_v L}{\pi R^4}$ donne la perte de charge ΔP pour l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η dans une conduite circulaire horizontale de rayon R de longueur L avec un débit volumique D_v.

1. Quelle est le rayon minimal de la canalisation si on veut une perte de charge maximale de 0,10 bar avec un débit volumique D_v = 0,10 m^3/s sur la longueur L = 10 km ? Pour l'eau à la température moyenne d'étude, la viscosité dynamique vaut : $\eta = 1{,}5.10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$.

2. Quelle est la puissance $\mathcal{P}_1$ nécessaire fournie par une pompe pour provoquer ce déplacement et la puissance $\mathcal{P}_2$ dissipée par les frottements ?

3. Par analogie électrique, on peut assimiler le débit volumique D_v à l'intensité. Quelle grandeur serait l'analogue du potentiel électrique ? Exprimer la résistance hydraulique de la conduite R_H. La calculer dans le cas de la question 1. On précisera son unité.

4. Si la canalisation a d'abord un rayon R_1 sur la longueur L_1 puis le rayon R_2 sur la longueur L_2, quelle est sa résistance hydraulique totale R_H' ? Le débit étant supposé inchangé D_v, que vaut en fait la nouvelle perte de charge totale $\Delta P'$? R_1 = 10 cm, L_1 = 4,0 km, R_2 = 20 cm, L_2 = 6,0 km. Quelle partie de la canalisation contribue le plus à la résistance hydraulique? Commenter.

5. Si la canalisation est constituée de deux tuyaux identiques en parallèle de rayons R_3 et de longueurs L, calculer la résistance hydraulique de l'ensemble R_H''. En déduire la perte de charge totale $\Delta P''$ pour le débit volumique D_v. R_3 = 10 cm. Comparer avec le cas où on aurait un seul tuyau de rayon R_3.

6. De façon générale, pensez-vous qu'il vaut mieux un gros tuyau ou plusieurs petits tuyaux pour minimiser les pertes ?