

Exo 1  $f'_1 = 0,1 \text{ m}$   $f'_2 = 0,025 \text{ m}$   $O_1O_2 = 0,08 \text{ m}$   $AB = 0,5 \text{ m}$   $AO_1 = 100 \text{ mm}$ .

1°)  $A_1B_1$  quasiment dans le plan focal image de la première lentille

(car  $AO_1 \gg f'_1$ ) donc  $A_1 = F'_1$   $O_1A_1 = O_1F'_1 = 10 \text{ cm}$ .

Image renversée réelle de taille donnée par l'angle sous lequel on voyait  $AB$  depuis  $O_1$ :  $\alpha \approx \frac{AB}{d} = \frac{0,5}{100} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ .

soit  $A_1B_1 = -\alpha \times f'_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = -0,5 \text{ mm}$

2°) Cette image joue le rôle d'objet virtuel puisqu'elle est en aval de la seconde lentille.

On a alors autour de  $L_2$  la conjugaison:  $A_1 = F'_1 \xrightarrow{L_2} A'$

En utilisant Newton:  $F'_2F'_1 \cdot F'_2A' = -f'^2_2 \Leftrightarrow F'_2A' = \frac{-f'^2_2}{F'_2F'_1}$

avec  $F'_2F'_1 = 4,5 \text{ cm}$  et  $f'_2 = 2,5 \text{ cm}$ , on obtient:

$$F'_2A' = \frac{-(2,5)^2}{4,5} = -1,39 \text{ cm}$$

donc  $O_2A' = 2,5 - 1,39 = 1,11 \text{ cm} \rightarrow$  image réelle

3°) L'image finale est réelle et renversée.

Il faut alors qu'elle ne soit pas trop grande (ex de pellicule  $24 \times 36 \rightarrow \begin{cases} 24 \text{ mm} \\ 36 \text{ mm} \end{cases}$ )

Comme:  $O_2A_1 = O_2F'_1 = 2 \text{ cm}$

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O_2A'}{O_2A_1} = \frac{1,11}{2} = 0,55 \text{ soit } A'B' = 0,55 \times (-0,5 \text{ cm})$$

$$A'B' = -0,27 \text{ cm}$$

$$A'B' = -2,7 \text{ mm} (< 24 \text{ mm})$$

4°)  $\Delta$ : Il n'existe pas de lentille équivalente au système épais constitué par ces 2 lentilles.

On ne cherche donc pas cela!

On cherche une lentille positionnée entre l'objet et l'image finale qui donnerait le même résultat sur la pellicule.

Dans ce cas:  $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-2,7}{500} = \frac{O_iA'}{O_iA}$

( $O_i$ : position inconnue)

avec  $AA' = 100 + 0,08 + 0,011 \approx 100 \text{ mm}!$

$$100 = AO_i + O_iA' \Rightarrow AO_i \left(1 + \frac{2,7}{500}\right) = 100$$

$$AO_i \approx 100 \text{ mm}$$

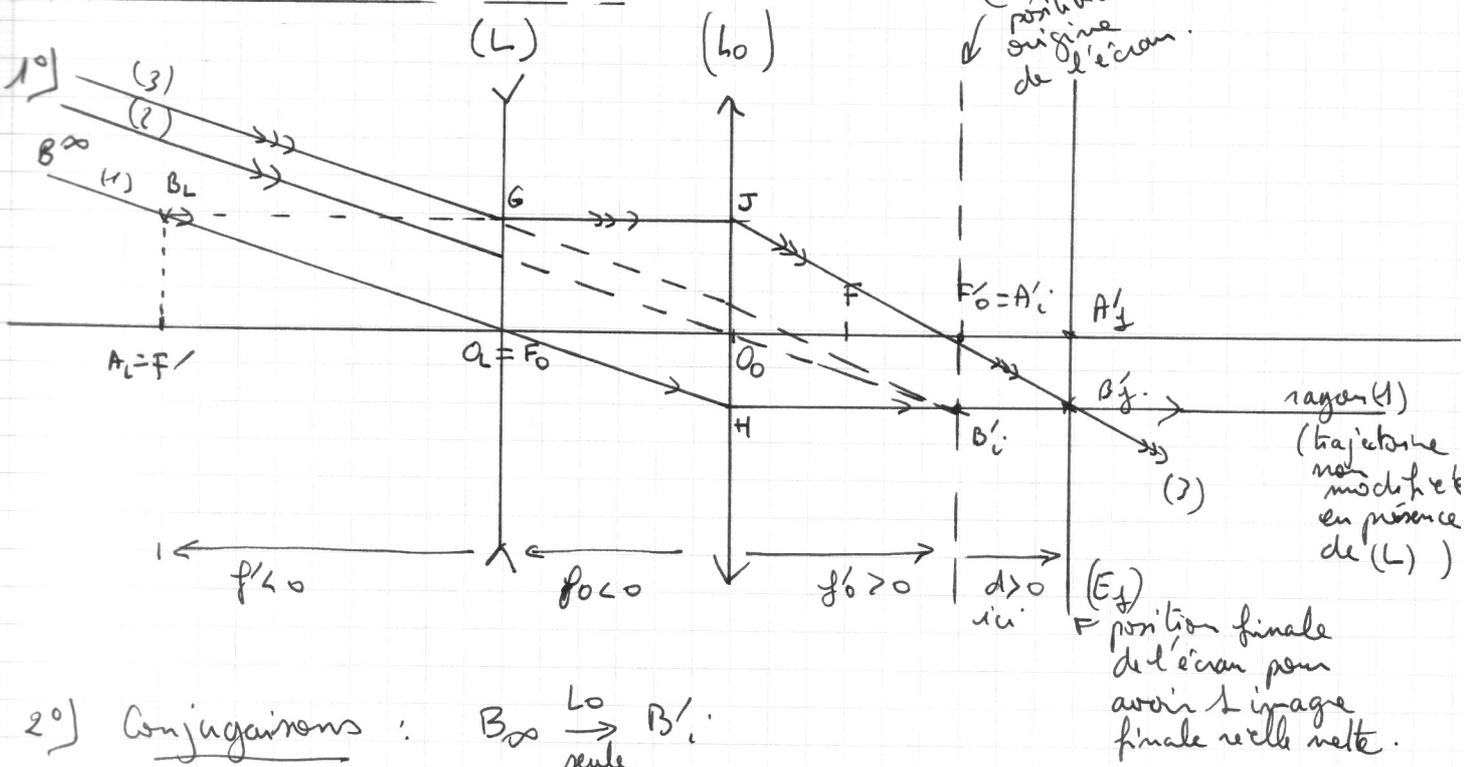
$$\text{et } O_iA' = \frac{2,7}{5} \approx 0,5 \text{ mm}$$

On trouve avec Descartes la focale de:  $f'_{\text{inc}} = \frac{O_iA' \cdot O_iA}{O_iA - O_iA'}$

$$f'_{\text{inc}} \approx \frac{5 \cdot 10^{-4} \times (-100)}{(-100)} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,5 \text{ mm}$$

5°)  $\rightarrow$  Rép trop faible pour être réalisable.

# Exercice 2 : Méthode de BADAL



2°) Conjugaisons :  $B_\infty \xrightarrow{L_0} B'_i$

$$\text{or}$$

$$\boxed{B_\infty \xrightarrow{L} B_L \xrightarrow{L_0} B'_f}$$

$$(A_\infty \xrightarrow{L} F' \leftarrow A_L \xrightarrow{L_0} A'_f)$$

\* méthode 1 : On se passe des formules de conjugaison en utilisant la figure et le théorème de THALES.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{O_0 J}}{\overline{B'_f A'_f}} &= \frac{f'_0}{d} \\ \text{or } \frac{\overline{A_L B_L}}{\overline{H O_0}} &= \frac{f'}{f_0} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \begin{cases} \overline{A_L B_L} = \overline{O_0 J} \\ \text{or} \\ \overline{H O_0} = \overline{B'_f A'_f} \end{cases}$$

donc :  $\frac{f'_0}{d} = \frac{f'}{f_0}$  et  $f' = -\frac{f_0'^2}{d}$

\* méthode 2 : On utilise la formule de conjugaison adaptée i.e. ici celle de Newton avec origines aux foyers.

$$F' = A_L \xrightarrow{L_0} A'_f \Rightarrow \overline{F_0 F'} \cdot \overline{F_0' A'_f} = \overline{F_0 O_0} \cdot \overline{F_0' O_0} = -f_0'^2$$

$\begin{matrix} f' \leftarrow & & \downarrow \\ & d & \text{with } \end{matrix}$ 
 $f' = \frac{-f_0'^2}{d}$

⊕ méthode 3 : Formule de conjugaison de DESCARTES (très peu adaptée)

$$\frac{1}{O_0 A'_f} - \frac{1}{O_0 F'} = \frac{1}{f'_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'_0 + d} - \frac{1}{f_0 + f'} = \frac{1}{f'_0} \Leftrightarrow f' = \frac{-f_0'^2}{d}$$

à développer.

## Applications Numériques:

$$(L_1): d_1 = +28 \text{ cm} = +0,28 \text{ m} \quad \text{et} \quad V_0 = +1,68$$

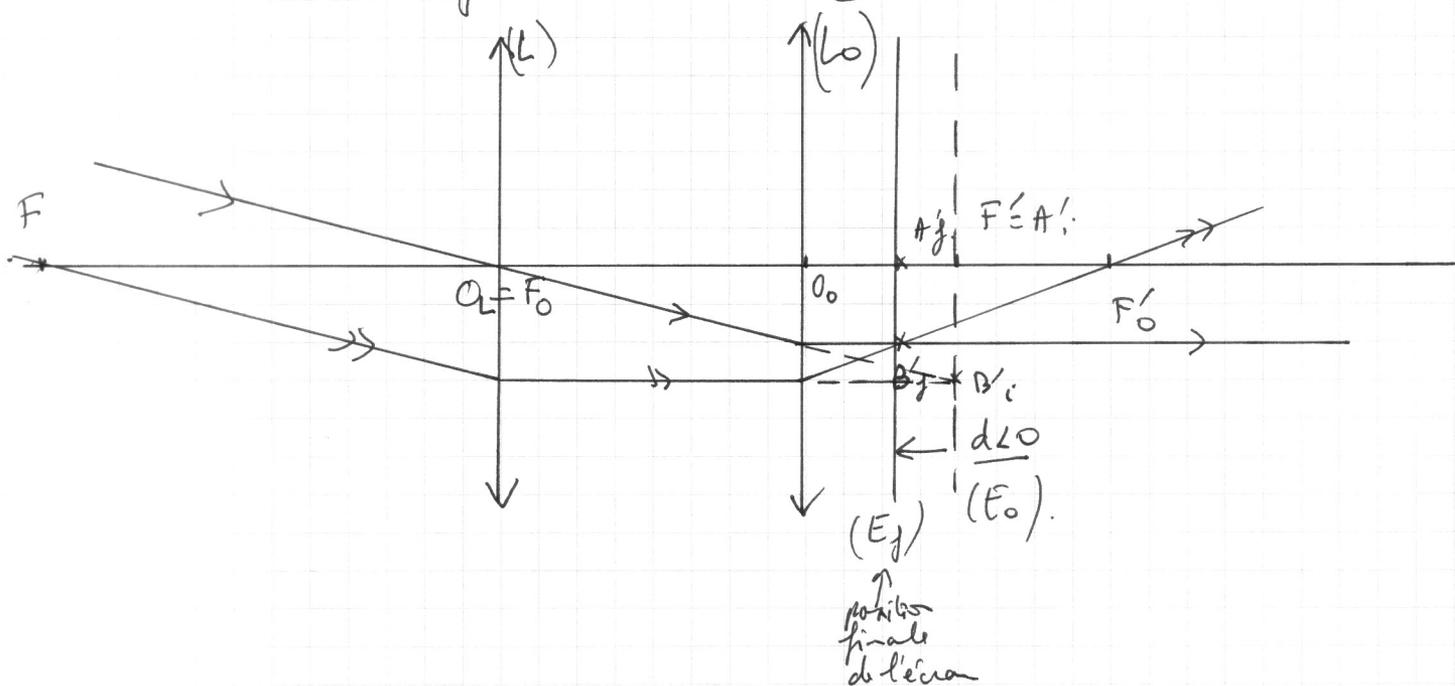
$$\Rightarrow f'_1 = -\frac{1}{0,28 \times (1,6)^2} = -1,4 \text{ m}. \quad (V_1 = -0,725).$$

$$(L_2): d_2 = -42 \text{ cm}$$

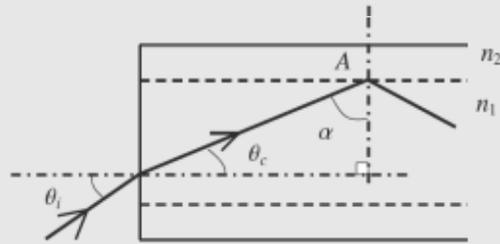
$$\Rightarrow f'_2 = +\frac{1}{0,42 \cdot (1,6)^2} = +0,93 \text{ m}. \quad (V_2 = 1,075)$$

3°) Comme on ne peut pas reculer l'écran de plus de  $f'_0$   
( $d = -f'_0$ ) pour trouver une image réelle :  $0 > d > -f'_0$ .  
Correspondant à :  $0 > -\frac{f'_0{}^2}{d} > -f'_0$

$$\text{soit: } \frac{f'_0}{f'_1} < 1 \Rightarrow \boxed{f'_0 < f'_1}$$



1. Pour qu'on ait réflexion totale à l'interface cœur-gaine, il faut qu'on passe dans un milieu moins réfringent c'est-à-dire que  $n_1 > n_2$ .



2. a) La condition de réflexion totale en A a lieu si le rayon réfracté en A avec un angle de réfraction  $\beta$  ne peut mathématiquement exister. Or la loi de Descartes en A donne  $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$  soit  $\sin(\beta) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha)$ . L'angle  $\beta$  n'existe pas si :

$$\sin(\beta) > 1 \implies \frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha) > 1 \implies \sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$$

On a réflexion totale pour :

$$\sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$$

avec  $\alpha$  l'angle de réflexion à l'interface cœur-gaine.

Or  $\sin(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_c)$  et  $\theta_c = \frac{\pi}{2} - \alpha$  (on a un triangle rectangle) d'où :

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

soit

$$\sin(\theta_i) = n_1 \cos(\alpha) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

donc  $\sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$  implique

$$1 - \sin^2(\alpha) < 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

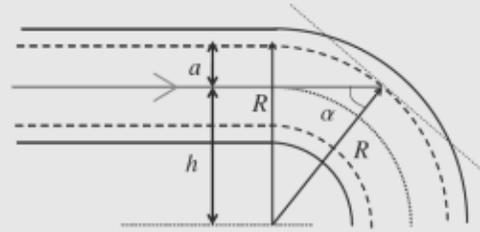
et

$$\sin(\theta_i) < n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

soit

$$\sin(\theta_i) < \sin(\theta_a) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

b) On en déduit  $O.N. = \sin(\theta_a) = 0,21$  soit un angle d'incidence maximal  $\theta_a \approx 12,2^\circ$ .



3. D'après le schéma,  $a = R - h = R - R \sin(\alpha)$  et  $\sin(\alpha) = 1 - \frac{a}{R}$  et comme d'autre part on a la relation  $\sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$ , on aboutit à la condition de propagation :

$$1 - \frac{a}{R} > \frac{n_2}{n_1} \implies R > R_m = \frac{a}{1 - \frac{n_2}{n_1}} = a \frac{n_1}{n_1 - n_2}$$

Ici comme  $\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)$ , on a  $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 - 2\Delta}$  soit en faisant un développement limité au premier ordre en  $\Delta = 1,0 \cdot 10^{-2} \ll 1$  soit  $\frac{n_2}{n_1} \approx 1 - \Delta$  d'où :

$$R_m = \frac{a}{1 - \frac{n_2}{n_1}} = \frac{a}{\Delta} = 2,5 \text{ mm}$$

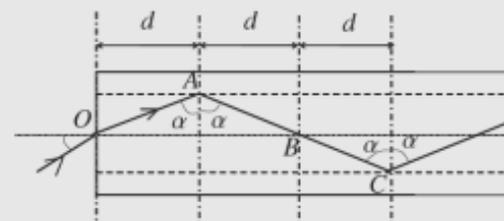
En pratique, la courbure ne pose pas de problème.

4. a) Le premier rayon qui arrive en incidence normale donc avec un angle d'incidence par rapport à la normale nul n'est pas dévié de part la loi de Descartes  $\sin(\theta_i) = \sin(0) = 0 = n_1 \sin(\theta_c)$  soit  $\theta_c = 0$ . Il continue donc son chemin en ligne droite à vitesse  $v = \frac{c}{n_1}$  en parcourant la distance  $l$ . Il met donc un temps  $t_1$  tel que :

$$t_1 = \frac{l}{v} = \frac{n_1 l}{c}$$

Le second rayon a une trajectoire en lignes brisées comme représentée ci-après et arrive en A ou C selon l'angle critique

$\alpha_{lim} = \text{Arcsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  :



On peut alors décomposer le trajet  $L$  du rayon :

$$L = OA + AB + BC + \dots$$

$$L = \frac{d}{\sin(\alpha_{lim})} + \frac{d}{\sin(\alpha_{lim})} + \frac{d}{\sin(\alpha_{lim})} + \dots$$

$$L = \frac{1}{\sin(\alpha_{lim})} (d + d + d + \dots) = \frac{l}{\sin(\alpha_{lim})}$$

d'où

$$L = \frac{n_1}{n_2} l > l$$

et allant à la même vitesse  $v$  que le rayon précédent, il met donc un temps :

$$t_2 = \frac{L}{v} = n_1 \frac{L}{c} = \frac{n_1 l}{c} \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{n_1 l}{c} \frac{1}{1 - \Delta} \approx \frac{n_1 l}{c} (1 + \Delta)$$

$$t_2 = t_1 (1 + \Delta)$$

L'écart entre les deux temps d'arrivée est donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_1 \Delta = \frac{\Delta n_1 l}{c}$$

b) A.N :  $\Delta t = 50 \text{ ns}$ .

c) Ainsi la durée minimale entre deux impulsions est au moins  $\Delta t$  ce qui permet d'envoyer une impulsion au maximum tous les  $\Delta t$  soit une fréquence de  $\frac{1}{\Delta t}$  impulsions par seconde soit pour une fibre de 1,0 km un débit de 20 Mégabits ou 2,5 Mégaoctets par seconde (puisque 1 octet équivaut à 8 bytes ou 8 bits, un bit correspondant dans le système binaire à un 0 ou un 1). C'est trop peu par rapport aux débits actuellement utilisés (la fibre à gradient d'indice permet un meilleur débit).

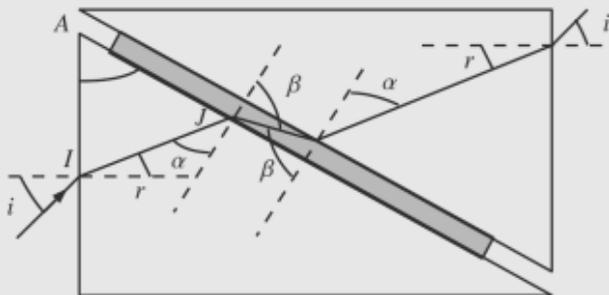
1. La relation de Descartes relative à la réfraction s'écrit  $n \sin i = n' \sin i'$ . On a réfraction du milieu d'indice  $n$  vers le milieu d'indice  $n'$  si  $i'$  existe soit  $|\sin i'| \leq 1$  soit  $|\sin i| \leq \frac{n'}{n}$ .

Si  $n' \geq n$ , on a  $|\sin i| \leq 1 \leq \frac{n'}{n}$  donc l'inégalité est toujours vérifiée et il n'y a donc pas de réflexion totale.

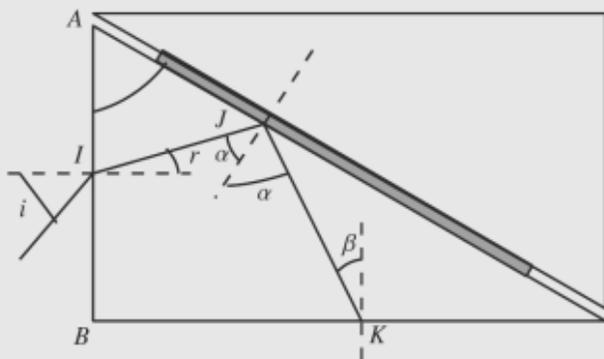
2. Si  $n' < n$ , l'inégalité précédente impose  $\sin i < \frac{n'}{n}$  pour des angles géométriques compris entre  $0,0^\circ$  et  $90^\circ$ . On en déduit  $i < i_\ell = \text{Arcsin} \frac{n'}{n}$ ,  $i_\ell$  est l'angle de réfraction limite.

3. L'indice de l'air vaut 1,00 et celui du prisme  $n \geq 1,00$  donc il y a toujours réfraction à l'entrée du prisme par les résultats de la première question. Au niveau du liquide, on passe d'un milieu d'indice  $n$  à un milieu d'indice  $N$ . On doit discuter en fonction de la valeur de  $N$  par rapport à celle de  $n$  :

- si  $N > n$ , il y a toujours réfraction lors du passage prisme - liquide ; en revanche, il pourrait y avoir réflexion totale lors du passage liquide - prisme mais comme l'angle d'incidence à l'interface liquide - prisme est égal à l'angle de réfraction à l'interface prisme - liquide, on ne peut jamais vérifier la condition de réflexion totale : il y aura toujours réfraction et le rayon sort du dispositif avec un angle  $i$  par rapport à la normale de la face de sortie ;



- si  $n > N$ , la réflexion totale est possible à l'interface prisme - liquide.



4. D'après la question précédente, on est dans le cas où  $n > N$ , ce qui signifie qu'on aura réflexion totale pour  $\alpha < \text{Arcsin} \frac{N}{n}$  d'après les résultats de la question 2.

Or la somme des angles dans un triangle est égale à  $180^\circ$ , ce qui permet d'écrire  $\widehat{A} + (90^\circ - r) + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$  dans le triangle  $AJJ$ . On en déduit  $r = \widehat{A} - \alpha$ .

En utilisant les deux relations qui viennent d'être obtenues, la condition de réflexion totale sur  $\alpha$  et la relation entre  $r$  et  $\alpha$ , on obtient finalement  $r \geq \widehat{A} - \text{Arcsin} \frac{N}{n}$ .

Sur la face d'entrée du prisme, la relation de Snell-Descartes relative à la réfraction s'écrit  $\sin i = n \sin r$ , ce qui permet d'obtenir la condition

$$i \geq i_\ell = \text{Arcsin} \left( n \sin \left( \widehat{A} - \text{Arcsin} \frac{N}{n} \right) \right)$$

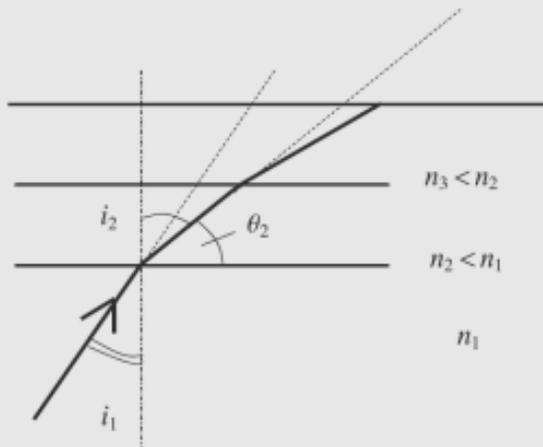
Remarque : on peut déterminer l'angle  $\beta$  en utilisant par exemple le fait que la somme des angles d'un quadrilatère est égale à  $360^\circ$ .

Ainsi  $90^\circ + (90^\circ + r) + (2\alpha) + (90^\circ - \beta) = 360^\circ$  dans  $IJKB$  soit  $\beta = 2\alpha + r - 90^\circ$  ou encore  $\beta = A + \alpha - 90^\circ$  en utilisant la relation  $A = \alpha + r$ .

5. De la relation donnant la valeur de l'angle limite  $i_\ell$ , on tire  $N = n \sin \left( \widehat{A} - \text{Arcsin} \frac{\sin i_\ell}{n} \right)$ .

6. Il suffit de faire l'application numérique avec  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $i_\ell = 26,6^\circ$  et  $n = 1,658$  pour obtenir  $N = 1,426$  comme valeur de l'indice du cyclohexane.

1. Pour qu'il y ait guidage, il faut que l'indice décroisse quand  $r$  augmente, alors les rayons se courbent de plus en plus (vers les régions d'indice élevé comme on peut le voir pour les phénomènes de mirage). En décomposant en petites couches d'indice décroissant et sachant que l'angle du rayon réfracté est toujours plus grand que celui de l'incident (la loi de Descartes pour  $n_1 > n_2$  donne  $\sin(i_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(i_1) > \sin(i_1)$  soit  $i_2 > i_1$  puisque le sinus est croissant sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ) quand on passe dans un milieu moins réfringent et le rayon se courbe sans sortir de la fibre comme on peut l'intuiter sur le schéma suivant :

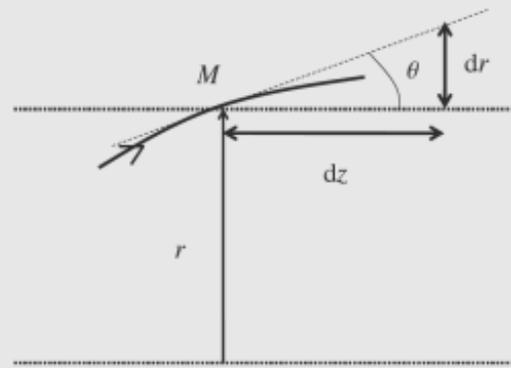


2. À chaque interface  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots$  soit  $n(r) \sin(i(r)) = \text{constante}$  et comme  $\theta(r) = \frac{\pi}{2} - i$ , on en déduit :

$$n(r) \cdot \cos(\theta(r)) = \text{constante}$$

3. a)  $\sin(\theta_i) = n_0 \sin(\theta_0)$  donc  $\sin(\theta_0) = \frac{1}{n_0} \sin(\theta_i)$  ce qui donne  $\theta_0 = 7,9^\circ$ .

b) On a, comme le montre le schéma ci-dessous,  $\tan(\theta) = \frac{dr}{dz}$  :



et comme  $\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \tan^2(\theta)}$ , on en déduit la relation :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}$$

Et comme  $n(r) \cdot \cos(\theta(r)) = n_0 \cos(\theta_0)$  constante implique

$$\frac{1}{\cos(\theta(r))} = \frac{n(r)}{n_0 \cos(\theta_0)}, \text{ on obtient :}$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 = \frac{n^2(r)}{n_0^2 \cos^2(\theta_0)} - 1$$

En dérivant cette relation par rapport à  $z$ , on a :

$$2 \cdot \frac{dr}{dz} \cdot \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1}{n_0^2 \cos^2(\theta_0)} \cdot \frac{dn^2(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dz}$$

$$\text{car } \frac{dn^2(r)}{dz} = \frac{dn^2(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dz}$$

d'où

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2(\theta_0)} \cdot \frac{dn^2(r)}{dr}$$

et avec  $n(r) = n_0 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2}$ , il vient

$$n^2(r) = n_0^2 - 2n_0^2 \Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

soit :

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2(\theta_0)} \cdot \left(-4\Delta n_0^2 \frac{r}{a^2}\right) = -\frac{2\Delta}{a^2 \cos^2(\theta_0)} r$$

soit une équation du type :

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{2\Delta}{a^2 \cos^2(\theta_0)} r = 0$$

et une solution de la forme :

$$r(z) = A \cos\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cos(\theta_0)} z\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cos(\theta_0)} z\right)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes déterminées par les conditions initiales

$r(0) = 0$  et  $\left(\frac{dr}{dz}\right)_0 = \tan(\theta_0)$ , il vient :

$$r(0) = A = 0 \text{ et } \left(\frac{dr}{dz}\right)_0 = \tan(\theta_0) = B \cdot \frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cos(\theta_0)}$$

donc

$$B = \frac{a \sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}}$$

d'où

$$r(z) = \frac{a \sin(\theta_0)}{\sqrt{2\Delta}} \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a \cos(\theta_0)} z\right)$$

4. a) A.N. :  $\sin(\theta_0) = 0,1386$  donc  $\cos(\theta_0) = 0,9903$  et  $\Delta' = 2,35 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

b) Alors le débit  $D'_m = \frac{1}{\Delta'} = 4,25 \cdot 10^9$  soit 4,3 gigabits ou 531 Mégaoctets par seconde. C'est 200 fois plus que la fibre à saut d'indice pour la même ouverture numérique.