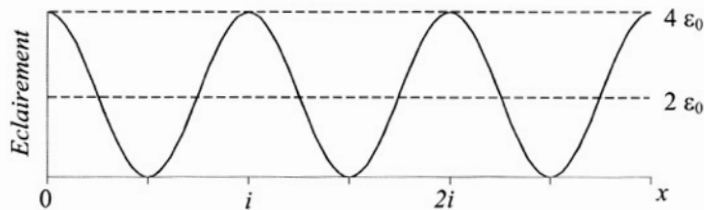


1. L'objectif d'une lunette astronomique est une lentille convergente, celui d'un télescope est un miroir sphérique (ce dernier a en particulier l'avantage de ne pas donner d'aberrations chromatiques). Dans les deux cas l'objectif permet d'obtenir, d'un objet situé à l'infini, une image réelle projetée dans son plan focal image (observée par un oculaire ou une caméra).

2. L'image d'un point à l'infini sur l'axe optique se forme au point focal image, situé à la distance focale f de l'objectif.

3. Il s'agit de franges d'interférences dues à la superposition des faisceaux lumineux issus des deux trous. Comme pour les trous d'Young, on obtient des franges rectilignes équidistantes, de direction perpendiculaire à l'axe (Ox) des deux trous, donc parallèles à (Oy). L'éclairement dans le plan image est $\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon_0 [1 + \cos(2\pi\delta/\lambda_0)]$, où ε_0 est l'intensité que donnerait un seul des deux trous et $\delta = ax/f$ la différence de marche.

Ceci se réécrit $\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{f}\right) \right] = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{x}{i}\right) \right]$ en faisant apparaître l'interfrange $i = \lambda_0 f/a$. Si la distance a entre les trous augmente, l'interfrange i diminue : les franges se resserrent.

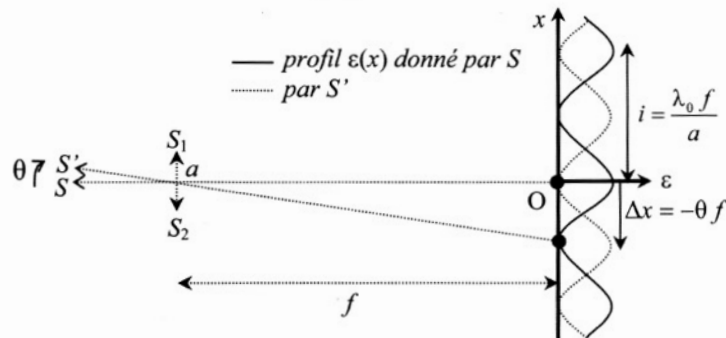
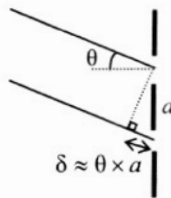


4. Si les rayons arrivent sous un angle θ , le plan des deux trous n'est pas un plan d'onde, il faut donc ajouter une différence de marche supplémentaire $\delta' = \theta \times a$ (voir schéma ci-contre). On a alors :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta + \delta')\right) \right] = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f} + \theta a\right)\right) \right], \text{ ce qui se}$$

réécrit $\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{x + \theta f}{i}\right) \right]$: la figure d'interférences est la

même qu'avant, traduite de $\Delta x = -\theta f$ comme l'image géométrique de l'étoile (comme le montre par homothétie le schéma ci-dessous).



5. Les deux étoiles n'interagissent pas, donc les ondes qu'elles émettent ont un déphasage aléatoire entre elles. Les deux étoiles sont donc considérées comme deux sources incohérentes, elles ne peuvent pas interférer l'une avec l'autre : l'éclairement donné par ces deux étoiles est égal à la somme des éclairements donnés par chaque étoile prise individuellement.

6. L'éclairement dû aux deux étoiles, situées dans la direction $\theta = \pm \frac{\alpha}{2}$ par rapport à l'axe optique de l'objectif, est la somme de deux sinusôides identiques (cf. courbe tracée question 3)

translatées de $\pm \frac{\alpha}{2} f$ donc décalées l'une par rapport à l'autre de $\Delta x = \alpha f$. Ce décalage a pour effet de diminuer la visibilité des franges d'interférences (il n'y a plus d'annulation totale de l'éclairement : les franges sombres ne sont plus noires). La visibilité des franges devient nulle si les deux sinusôides sont en opposition de phase (franges brillantes d'une étoile superposées aux franges sombres de l'autre), c'est-à-dire si ce décalage est égal à un nombre impair de demi-période $\frac{i}{2}$ (cf. courbes tracées question 4). La valeur la plus faible $\Delta x = \frac{i}{2}$ conduit à $a = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$.

7. La variation de différence de marche d'une étoile ponctuelle à l'autre, espacées d'un angle α , est $\Delta\delta = \alpha a$, ce qui conduit à la variation d'ordre d'interférences $\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda_0} = \frac{\alpha a}{\lambda_0}$. Le critère de

visibilité des interférences $\Delta p < \frac{1}{2}$ conduit donc à $a < \frac{\lambda_0}{2\alpha}$: on retrouve le résultat précédent.

⇒ Méthode 10.7

Notons que la condition $\Delta p = \frac{1}{2}$ correspond à un décalage $\Delta x = \frac{i}{2}$ des deux figures d'interférences : ces deux critères sont équivalents, mais la formulation utilisant l'ordre d'interférences permet d'aboutir plus rapidement au résultat puisqu'elle évite d'avoir à exprimer l'éclairement.

8. Pour pouvoir mesurer $\alpha = 5 \times 10^{-9}$ rad, il faut pouvoir mettre les télescopes à la distance $a = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100$ m ! Pour obtenir la même résolution avec un télescope simple, il faudrait un diamètre d tel que $\frac{\lambda_0}{d} \approx 5 \times 10^{-9}$ donc $d \approx 200$ m...

✍ Cet exercice s'intéresse au cas d'une étoile double, modélisée par deux sources ponctuelles, ce qui conduit à un contraste des franges qui s'annule et réapparaît périodiquement à chaque fois que le décalage Δx varie d'une interfrange. Pour traiter le cas d'une source étendue, il faut considérer une assemblée continue de sources ponctuelles incohérentes distribuées sur toute la largeur angulaire α de l'étoile, et non juste deux points aux extrémités. Ceci conduit à intégrer l'éclairement calculé pour une source ponctuelle vue sous l'angle θ en variant θ de $-\alpha/2$ à

$\alpha/2$, donc à calculer $\varepsilon_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\theta \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f} + a\theta \right) \right)$. On trouve alors des franges

d'interférences toujours de même interfrange $i = \lambda_0 f/a$ (ne dépend que de la distance a entre les trous, pas de la dimension α de la source) dont le contraste s'annule pour $\alpha = \lambda_0/a$ (résultat identique à celui du doublet d'étoiles ponctuelles, au facteur 2 près), avec d'autres annulations périodiques mais un contraste qui diminue globalement quand la source devient grande.

EXERCICE (4) : Anneaux de Newton

[DV]

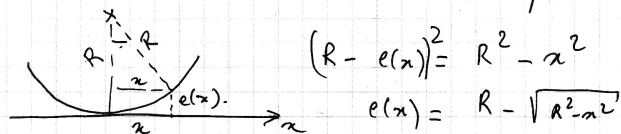
- 1°) $x \ll R$ courbure faible $\Rightarrow$ (incidence normale $\Rightarrow$ réflexion quasi-normale)
 (cohérent avec 1 observation de la figure d'interférence à l' ∞)
 $S \equiv$ (marche avec réflexion sur le miroir M) - (marche avec réflexion sur la face inférieure de la lentille L)
 $S = 2 \times$ épaisseur des coins d'air "emprisonné" - marche.

Il faut ensuite réfléchir aux marches supplémentaires dues aux réflexions :
 - sur M $\rightarrow$ marche supplémentaire de $\frac{1}{2}$
 - sur L $\rightarrow$ on passe d'un milieu plus réfringent ($n > 1$) à 1 moins réfringent.
 $\Rightarrow$ pas de marche supplémentaire de réflexion!

$$\text{donc : } S = S_{\text{marche}} + \frac{1}{2}$$

$$S = 2 \times \text{épaisseur locale} + \frac{1}{2}$$

Calculons alors cette épaisseur locale ; (en exagérant la courbure pour le dessin).



$$(R - e(x))^2 = R^2 - x^2$$

$$e(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

comme $x \ll R$, on approchera $e(x)$ à :

$$e(x) = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right) \approx R \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right) \right)$$

$$e(x) \approx \frac{x^2}{2R} \quad (\text{approximation parabolique du cercle})$$

$$\Rightarrow S \approx \frac{x^2}{R} + \frac{1}{2}$$

Anneaux lumineux pour : $S = k \lambda = \frac{x^2}{R} + \frac{1}{2}$
 (anneau sombre au centre).

Calculons l'ordre en périphérie du faisceau : $P_{\ell} \lambda = \frac{x^2}{R} + \frac{1}{2}$

Ainsi : $P_{\ell} = \frac{x^2}{R \lambda} + \frac{1}{2}$ A.N : $P_{\ell} = 679,6$

l'ordre du dernier anneau lumineux est 679
 il y a donc 679 anneaux observables dans 1 rayon de 2 cm !

- 2°) le 1^{er} maillage de franges due à l'anticoincidence entre les figures d'interférences de deux sources de nombre d'onde séparés de $\Delta \sigma$ est obtenu pour 1 différence de marche de $\frac{1}{2 \Delta \sigma}$.

Démonstration : L'ordre d'interférence est de zéro au "centre" quel que soit la longueur d'onde.
 Progressivement l'ordre d'interférence se décale pour 1 différence de marche puisque les longueurs d'onde sont différentes.

On atteint la différence d'ordre d'interférence $\Delta P_{(\Delta \sigma)} = \frac{1}{2}$
 (et donc l'anticoincidence) pour 1 différence de marche telle que : $k_2 (\lambda + \Delta \lambda) = k_1 \lambda = \left(k_2 + \frac{1}{2} \right) \lambda$ ($\Delta \lambda > 0$).

$$\text{d'où : } k_2 \Delta \lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Soit un ordre du 1^{er} maillage de : $k_{b1} = \frac{1}{2 \Delta \lambda}$

qui donne numériquement : $k_{b1} = \frac{589}{2 \times 96} \approx 491$

Comme, dans cette expérience "théorique", on observe jusqu'à l'ordre 679, on verra ce premier maillage... si les anneaux ne sont pas trop serrés!

$$R_q : \sigma = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \Rightarrow \Delta \sigma = \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$$

au 1^{er} maillage, on a montré que : $k_{b1} = \frac{1}{2 \Delta \lambda} = \frac{1}{2 \Delta \sigma \lambda}$

donc $k_{b1} \times \lambda = \frac{1}{2 \Delta \sigma} \approx S_{b1}$
 la différence de marche au 1^{er} maillage.

3°) bonillage au centre pour: $\int_{\text{centre}} = 2z_{b1} + \frac{1}{2} = h_{b1}(1 + \Delta)$
 $= (h_{b1} + \frac{1}{2}) \cdot 1$
 $= S_{b1}$

$2z_{b1} + \frac{1}{2} = h_{b1} + \frac{1}{2}$
 $z_{b1} = \frac{h_{b1}}{2} \approx \frac{491 \times 589 \cdot 10^{-6}}{2} \text{ mm} \approx 0,145 \text{ mm}$
 (question précédente.)

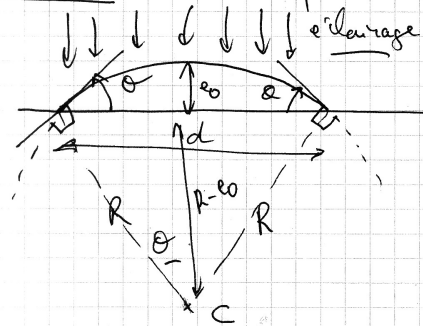
Or la différence de différence de marche entre deux bonillages successifs est de $\frac{1}{\Delta\sigma}$ correspondant aux ordres successifs: 491 + 982, 491 + 2x982, etc.

Calculons encore l'ordre d'interférence en périphérie du faisceau:

$2z_{b1} + \frac{1}{2} + \frac{r^2}{R} = p' \times \lambda$ (pour 1).
 $\frac{2z_{b1}}{491} + \frac{1}{2} + \frac{r^2}{679,6} = p' < 491 + 982$
 donc on ne verra pas de second bonillage.

Rq: Experimentalement invérifiable (exercice complètement théorique!).

EXERCICE ② : Goutte liquide sur 1 substrat.



Rq: la réflexion se fait sur la face supérieure $\Rightarrow$ indice 1 à 1,47 $\Rightarrow$ déphasage supplémentaire de π

② la réflexion se fait sur le dioptré plan $\Rightarrow$ indice de 1,47 à 3,88 $\Rightarrow$ déphasage supplémentaire de π .

$\Rightarrow$ on peut donc oublier les déphasages supplémentaires aux réflexions sur chaque face puisqu'ils se compensent.

1°) Franges d'égal épaisseur (idem coin d'air). Elles sont localisées au voisinage de la surface silicium.

2°) $r_1 \approx 0,03 \text{ mm}$.
 $r_2 \approx 0,06 \text{ mm}$.
 $r_3 \approx 0,085 \text{ mm}$.
 (question précédente compte tenu de l'échelle et la précision de lecture).

3°) Comptons les anneaux "sombres" sur la figure. (grâce au défaut d'alignement latéral). $\Rightarrow 16$.

($\Rightarrow$ Cette figure est vraisemblablement le négatif de la figure) observée $\rightarrow 16$ anneaux lumineux

À la périphérie de la goutte, l'ordre d'interférence est nul. (Donc si on oublie la remarque précédente sur le "négatif" on ne voit pas l'anneau brillant qui entoure l'ensemble)

Dans cette hypothèse (certainement inexacte) le premier anneau sombre en périphérie correspondrait à 1 différence de marche de $\frac{\lambda_0}{2}$, le suivant (en allant vers le centre) à $\frac{3\lambda_0}{2}$ etc.

L'ordre d'interférence au centre serait alors de $\frac{\frac{\lambda_0}{2} + 15\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2}}{1\lambda_0}$

soit 1 ordre d'interférence au centre de 16
 et donc 1 épaisseur au centre de $\frac{16 \times \lambda_0}{2n} \approx 30 \mu\text{m}$

4°) $(R - e_0)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = R^2$
 $-2Re_0 + e_0^2 + \frac{d^2}{4} = 0 \Rightarrow R \approx \frac{d^2}{8e_0}$ (à l'ordre 1 en $\frac{e_0}{R}$).
 A.N.: $R = \frac{(9,45 \cdot 10^{-3})^2}{8 \times 3 \cdot 10^{-6}}$
 $R = 8,4 \mu\text{m}$

et $\tan \theta = \frac{d/2}{R} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{d}{2R}\right)$ A.N.: $\theta \approx 90268 \text{ rad}$
 $\theta \approx 1,5^\circ$

EXERCICE (8) : Réseau en réflexion.

$n = 500$ traits/mm

1°) la différence de marche entre deux rayons successifs vaut:
 $S = a \sin i + a \sin \theta = \frac{1}{n} (\sin i + \sin \theta)$

2°) Max de luminosité pour les ordres $p =$ entiers.
 $k \lambda_0 \approx 2a \sin \theta_k = \frac{2}{n} \sin \theta_k$

$\sin \theta_k = \frac{n k \lambda_0}{2} \Rightarrow$

k	θ_k
$k=1$	$\theta_1 = 0,147 \text{ rad } (8,3^\circ)$
$k=2$	$\theta_2 = 0,29 \text{ rad } (16,8^\circ)$
$k=3$	$\theta_3 = 0,45 \text{ rad } (25,6^\circ)$
$k=4$	$\theta_4 = 0,60 \text{ rad } (35,2^\circ)$
$k=5$	$\theta_5 = 0,806 \text{ rad } (46,2^\circ)$

$x_{11} = f' \tan \theta_{11}$
 $x_{12} = f' \tan \theta_{12}$

} approx des petits angles (pour le 1^{er} ordre).
 $\Rightarrow \Delta x \approx f' \Delta \theta$

avec $\theta_{1(1)} = 0,14476$
 $\theta_{1(2)} = 0,14526$

$\Delta \theta = 0,0005$
 $\Rightarrow \Delta x \approx 0,5 \text{ mm}$

EXERCICE (9) : Série de Balmer de la lampe à hydrogène.

$S = k \lambda_0 = \frac{1}{n} (\sin \theta - \sin i)$ (i.e. sur le dessin).

1°) diffraction par les traits + interférences à N ordres de m
 amplitude et déphasés de $\varphi = \frac{2\pi S}{\lambda_0}$ à l'ordre.

2°) $k \lambda_0 = \frac{1}{n} (\sin \theta_k - \sin i)$ (on peut faire 1 dessin justifiant l'expression du déphasage)

3°) $D_k = \theta_k - i$ (avec les angles algébriques) (i.e. sur la figure).

4°) pour 1 longueur d'onde donnée λ_0 , 1 ordre donné k et 1 pas fixe $\frac{1}{n}$

$n k \lambda_0 = d \sin \theta_k \rightarrow d(k \lambda_0) = 0 = d(\sin \theta_k) - d(\sin i)$
 $0 = \cos \theta_k d \theta_k - \cos i di$

$\Rightarrow \frac{d \theta_k}{di} = \frac{\cos i}{\cos \theta_k}$ (pour d'1 "point")
 (à donner à donner)

$\Rightarrow \frac{d D_k}{di} = \frac{d \theta_k}{di} - 1 = \frac{\cos i}{\cos \theta_k} - 1$

extremum si $\frac{d D_k}{di} = 0 \Rightarrow \cos i = \cos \theta_k$

$\Rightarrow \begin{cases} i = \theta_k \Rightarrow \text{ordre } 0 \\ \text{ou} \\ i = -\theta_k \Rightarrow \text{réseau bisecteur des rayons.} \end{cases}$

$\Rightarrow k \lambda_0 = \frac{1}{n} (\sin(-i) - \sin i)$
 $d \lambda_0 = \frac{-2 \sin i}{n}$

et $\left[D_{k \text{ mini}} = -2i = \left[2 \arcsin\left(\frac{n \lambda_0 k}{2}\right) \right]$

ou $\left[\sin\left(\frac{D_{k \text{ mini}}}{2}\right) = \frac{n k \lambda_0}{2} \right]$

5°) $\lambda_0 = \frac{2 \sin\left(\frac{D_{k \text{ mini}}}{2}\right)}{n k}$

$\lambda_0 = 608,7 \text{ nm}$

$\frac{d \lambda_0}{d i} = \frac{d \sin\left(\frac{D_{k \text{ mini}}}{2}\right)}{n D_{k \text{ mini}}}$

$\frac{d \lambda_0}{d i} = \frac{d\left(\frac{D_{k \text{ mini}}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{D_{k \text{ mini}}}{2}\right)}$

si l'incertitude se limite à la répercussion de la précision de lecture d'angle à 1' d'angle près:

$$\Delta \lambda_0 = \frac{2 \sin\left(\frac{D \sin i_0}{2}\right)}{m k} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{D \sin i_0}{2}\right)} \frac{d D \sin i_0}{2}$$

$$\Delta \lambda_0 = \frac{\cos\left(\frac{D \sin i_0}{2}\right)}{m k} \Delta(D \sin i_0)$$

$$\Delta \lambda_0 = \frac{0,988}{500000 \times 1} \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}$$

$$(\Delta \lambda_0 \approx 0,6 \text{ nm})$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = [608,7 \pm 0,6] \text{ nm}$$

$$(i_0 = -\frac{D \sin i_0}{2} = -8^\circ 45')$$

$$6^\circ) \quad \lambda_{Hd} = -\frac{\sin i_0}{m}$$

$$\text{A.N.: } i_0 = \arcsin(-m \lambda_{Hd}) = \arcsin(-500000 \times 656,3 \cdot 10^{-9})$$

$$i_0 = \arcsin(-0,32811) = -0,334 \text{ rad}$$

$$(i_0 \approx -19^\circ)$$

$$-1 < \sin \theta_k < 1$$

$$-1 < m k \lambda_{Hd} + \sin i_0 < 1$$

$$-1 < m k \lambda_{Hd} - m \lambda_{Hd} < 1$$

$$-1 < (k-1) m \lambda_{Hd} < 1$$

$$1 - \frac{1}{m \lambda_{Hd}} < k < 1 + \frac{1}{m \lambda_{Hd}}$$

$$1 - \frac{1}{0,32811} < k < 1 + \frac{1}{0,32811}$$

$$-2,047 < k < 4,047$$

ordres
théoriquement
visibles $(-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$

7°/ la plaque photo doit être placée dans le plan focal image de la lentille (soit à 40 cm derrière).

A l'ordre 1 on note: $\theta_{Hd}, \theta_{Hp}, \theta_{Hr}$ et θ_{Hs}
les angles relatifs à la normale au réseau.

$$\lambda_{Hp} = \frac{1}{m} (\sin \theta_{Hp} - \sin i_0)$$

$$\text{or } \sin i_0 = -m \lambda_{Hd}$$

$$\Rightarrow m (\lambda_{Hp} - \lambda_{Hd}) = \sin \theta_{Hp}$$

$$\text{A.N.: } \theta_{Hp} = \arcsin(m (\lambda_{Hp} - \lambda_{Hd})) \approx -0,085 \text{ rad } (-4,9^\circ)$$

$$\theta_{Hr} = \arcsin(m (\lambda_{Hr} - \lambda_{Hd})) \approx -0,111 \text{ rad } (-6,4^\circ)$$

$$\theta_{Hs} = \arcsin(m (\lambda_{Hs} - \lambda_{Hd})) \approx -0,123 \text{ rad } (-7,1^\circ)$$

PARTIE (c) de l'EXERCICE (4) : IDENTIFICATION D'INTERFÉROGRAMMES.

source de l'interférogramme (b) $\rightarrow$ LASER

car l'enveloppe ne varie pas
 $\Rightarrow$ monochromatique.

source de l'interférogramme (c) $\rightarrow$ Lampemercure émettant
la raie verte.

car on observe 1 décroissance
très lente (sans battement)
typique d'une source de profil
lorentzien assez monochromatique

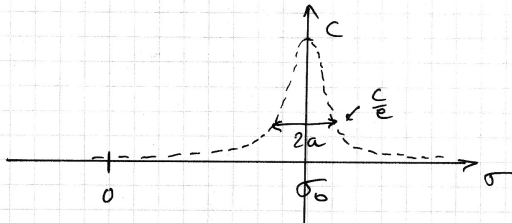
source des interférogrammes (a) et (d):

- Dans les deux cas on observe des battements de doublet source.
- la différence de marche entre deux autocoïncidences est plus importante sur l'interférogramme (a) $\rightarrow$ il s'agit donc de raies + proches dans le spectre (puisque $\Delta \delta = \frac{1}{\Delta \sigma}$)
 $\rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ doublet jaune sodium ($\Delta \lambda = 0,6 \text{ nm}$)
 $\rightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ doublet jaune mercure ($\Delta \lambda = 2 \text{ nm}$)
(+ l'écart des raies presque aussi importantes que l'écart entre elles)

CORRIGES Optique Exercice 2

EXERCICES (4)

- (A) Densité spectrale de la source: $\frac{dE_0}{d\sigma} \equiv f(\sigma) = C e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}}$
- 1°) - σ_0 est le nombre d'onde pour lequel la densité spectrale prend sa valeur maximale C .
- Deux nombres d'onde σ_1 et σ_2 possèdent une densité spectrale $\frac{C}{2}$ et $\Delta\sigma \equiv \sigma_2 - \sigma_1$ (donc $\sigma_2 - \sigma_0 = \sigma_0 - \sigma_1 = \frac{\Delta\sigma}{2}$) (symétrie autour de σ_0)
- Ainsi on peut écrire: $\frac{1}{2} = e^{-\frac{(\frac{\Delta\sigma}{2})^2}{a^2}}$
- $\Rightarrow \ln 2 = \frac{(\Delta\sigma)^2}{4a^2} \Leftrightarrow \Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}$.
- lorsque $|\sigma - \sigma_0| = a$, la densité vaut $\left(\frac{C}{e}\right)$ au lieu de $\frac{C}{2}$.
- le profil spectral est donc gaussien:



- 2°) On considère toujours une source polychromatique comme la superposition d'une infinité de sources monochromatiques (σ à $d\sigma$) produisant indépendamment leur figure d'interférences et dont on additionne donc les éclaircissements sur l'écran. (somme qui correspond alors à l'intégrale sur la totalité du spectre).

$$E(e) = \int_{\text{spectre}} dE(e) = \int_{\text{spectre}} \frac{dE_0}{d\sigma} d\sigma (1 + \cos(2\pi\sigma(2e)))$$

source polychromatique

différence de marche au centre pour 1 configuration de lame d'épaisseur e .

$$E(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{C e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}}}_{f(\sigma)} (1 + \cos(2\pi\sigma(2e))) d\sigma$$

soit: $E(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) \cos(\underbrace{4\pi\sigma e}_{2\pi\sigma x}) d\sigma$

$E(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) e^{2j\pi\sigma x} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) e^{-2j\pi\sigma x} d\sigma$

$E(e) = E\left(\frac{x}{2}\right) = \hat{f}(0) + \frac{1}{2} \hat{f}(2e) + \frac{1}{2} \hat{f}(-2e)$

$\hat{f} \rightarrow$ transformée de Fourier

3°) $\int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}} e^{2j\pi\sigma x} d\sigma$

$= e^{2j\pi\sigma_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} e^{2j\pi x(\sigma-\sigma_0)} d(\sigma-\sigma_0)$

avec $\begin{cases} u = \sigma - \sigma_0 \\ du = d\sigma \end{cases}$

$= C e^{2j\pi\sigma_0 x} \times a \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 x^2}$

d'après l'intégrale du tableau.

On en déduit donc:

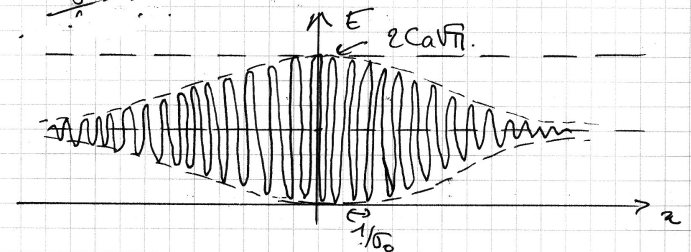
$$E(e) = E\left(\frac{x}{2}\right) = C a \sqrt{\pi} \left[1 + \frac{1}{2} e^{2j\pi\sigma_0 x} e^{-\pi^2 a^2 x^2} + \frac{1}{2} e^{-2j\pi\sigma_0 x} e^{-\pi^2 a^2 x^2} \right]$$

avec $x = 2e$.

$$E(e) = \underbrace{C a \sqrt{\pi}}_{\text{éclairage moyen}} \left[1 + \underbrace{e^{-\pi^2 a^2 x^2}}_{\text{facteur de visibilité ou contraste}} \times \cos(2\pi\sigma_0 x) \right]$$

(avec $x = 2e$)

Alors:



la visibilité des franges évolue en quarré de x depuis 1 en $x=0$. Elle est divisée par e pour $x = \frac{1}{\pi a}$.
(exp(1) = 2.72)

soit par $e = \frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{\Delta\phi}$
opacité de lame.

On peut également écrire qu'en $x^* = \frac{1}{\Delta\phi}$

$$e^{-\frac{\pi^2 a^2}{\Delta\phi^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{4 \ln 2}} \approx 0.028$$
 de visibilité.

Pour aller jusqu'en $x = x^* = \frac{1}{\Delta\phi}$ on doit faire diffuser $\left(\frac{1}{\Delta\phi}\right) = \frac{50}{\Delta\phi}$ franges lumineuses. $\left(\frac{e^*}{\Delta\phi} = \frac{1}{2\Delta\phi}\right)$
opacité

(B) - limite de résolution spectrale par la "course" maximale.

1°) Une course entre $l=0$ et $l=L$ correspond à 1 différence de marche variant de $\Delta = 2l = 0$ à $\Delta_{\max} = 2L$.
 ($\Delta = 2l$ de manière générale (diffraction au centre)).

2°) Dans le cas d'une raie monochromatique :

$$I(\Delta) = I_{\text{moy}} \times \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_0}\right)\right)$$

ou $= I_{\text{moy}} \times \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\Delta\right)\right)$ avec $\frac{1}{\lambda_0} = \frac{v_0}{c} = \frac{\omega_0}{2\pi c}$

d'où une expression de la transformée :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} I_{\text{moy}} \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\Delta\right)\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta\right) d\Delta$$

$$F(\omega) = I_{\text{moy}} \frac{c}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta_{\max}}{c}\right) + I_{\text{moy}} \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega \Delta}{c}\right) d\Delta$$

$$F(\omega) = I_{\text{moy}} \times \Delta_{\max} \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{\Delta_{\max}} \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega \Delta}{c}\right) d\Delta \right]$$

et on linéarise : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
 dans l'intégrale restante.

Ainsi :

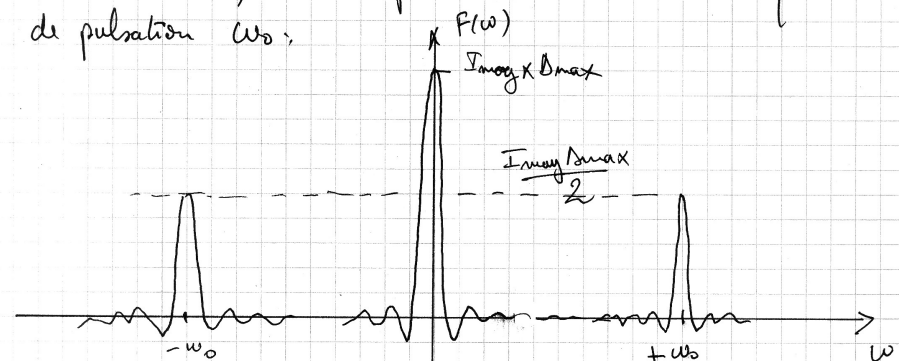
$$F(\omega) = I_{\text{moy}} \times \Delta_{\max} \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{2\Delta_{\max}} \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{(\omega_0 + \omega)\Delta}{c}\right) d\Delta + \frac{1}{2\Delta_{\max}} \int_0^{\Delta_{\max}} \cos\left(\frac{(\omega_0 - \omega)\Delta}{c}\right) d\Delta \right]$$

ou :

$$F(\omega) = I_{\text{moy}} \Delta_{\max} \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{c}{2\Delta_{\max}(\omega_0 + \omega)} \sin\left(\frac{(\omega_0 + \omega)\Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{c}{2\Delta_{\max}(\omega_0 - \omega)} \sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)\Delta_{\max}}{c}\right) \right]$$

$$F(\omega) = I_{\text{moy}} \times \Delta_{\max} \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{(\omega_0 + \omega)\Delta_{\max}}{c}\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{(\omega_0 - \omega)\Delta_{\max}}{c}\right) \right]$$

Il s'agit donc de 3 fonctions "sinus cardinal" centrées sur la pulsation 0, sur la pulsation $(-\omega_0)$ et sur la pulsation (ω_0) .
 L'allure de $F(\omega)$ est donc pour 1 onde monochromatique de pulsation ω_0 :



1 sinus cardinal s'annulant pour la première fois quand son argument vaut π soit autour de ω par exemple :

$$\omega = \pm \frac{\pi c}{\Delta_{\max}} \quad (\text{à l'écart autour de } \omega_0 \text{ ou } -\omega_0)$$

(avec $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\Delta_{\max}$ de l'ordre de plusieurs cm $\Rightarrow 10^{11} \# \left(\frac{\omega_0}{10^9}\right)$)

ainsi la "fin" du pic du sinus cardinal autour de ω_0 est inférieure au millièrme.

3°) donné dans l'énoncé (fin).

4°) On considère que deux pulsations sont discriminées si le sinus cardinal centré en ω_1 devient nul en ω_2 et inversement.

ainsi: $\Delta \omega_{\lim} = \frac{\pi c}{\Delta \omega_{\max}} = \Delta \omega_R$ donc $\boxed{R = \frac{\omega_0 \Delta \omega_{\max}}{\pi c}}$

5°) Et l'interféromètre enregistre 1 maximum local d'intensité lorsque $\cos\left(\frac{\omega_0 \Delta}{c}\right) = 1$ soit avec 1 périodicité en Δ de $\frac{2\pi c}{\omega_0}$. Donc en arrivant à $\Delta_{\max}$ on aura eu

$$N_{\max} = \left\lfloor \frac{\Delta_{\max}}{\left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\omega_0 \Delta_{\max}}{2\pi c} \right\rfloor$$

↑
partie entière.

Comme le nombre $N_{\max}$ est élevé on pourra approcher $N_{\max}$ à sa partie entière et donc: $N_{\max} \approx \frac{\omega_0 \Delta_{\max}}{2\pi c}$

soit $\boxed{R \approx 2 N_{\max}}$

6°) Il faudra bien sûr que la forme de "courbe en cloche" due, non pas à la raie véritable, mais à la courbe limitée en différence de marche ($\Rightarrow$ pic de sinus cardinal).

On imagine donc aisément que, chaque "tranche infinitésimale" du spectre de la raie produisant 1 sinus cardinal de largeur $\Delta \omega_R$, il faudra que la largeur de la raie étudiée $\Delta \omega \gg \Delta \omega_R (= \frac{\omega_0}{2 N_{\max}})$.

(C) $\rightarrow$ PARTIE à rédiger en devoir de vacances.

