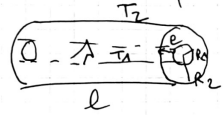


④ Résistance thermique d'une gaine cylindrique.

TD Tphys ④



a) Régime Permanent (RP) $\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = 0$
 Bilan d'énergie $\mathcal{U}$: (espace entre r et $r+dr$)
 $\frac{\partial U}{\partial t} = 0 = \phi(r) - \phi(r+dr) + \left(\frac{\delta U^P}{\delta t} \right)$

pas de production $\Rightarrow 0$

Ann: $\phi(r) = \phi(r+dr) = C = \phi$
 $\phi = \phi(r) = 2\pi r l \times j_H(r)$ (intégration sur la surface traversée)

$\Rightarrow j_H(r) = \frac{\phi}{2\pi r l}$

loi de Fourier: $\vec{j}_H = j_H(r) \vec{e}_r = -\lambda \vec{\nabla} T$

Soit dans la situation à symétrie cylindrique (grandeurs ne dépendant que de r et non de θ et z)

$\Rightarrow j_H(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\phi}{2\pi r l}$

Qui donne par intégration de $r=R_1$ à R_2 :

$-\lambda (T(R_2) - T(R_1)) = \frac{\phi}{2\pi l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

soit: $\left| \phi = \frac{\lambda (T_1 - T_2) \times 2\pi l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right|$

A.N: $\phi = \frac{1 \times 12 \times 2\pi \times 1}{\ln\left(\frac{25}{10}\right)} \approx 378 \text{ W}$

b) $R_{H(e)} \equiv \frac{T_1 - T_2}{\phi} \stackrel{\text{A.N}}{=} \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\lambda 2\pi l} \stackrel{\text{A.N}}{=} 35,7 \text{ mK.W}^{-1}$

(analogie avec la résistance électrique: $R = \frac{V_A - V_B}{\Phi_{AB} = I_{AB}}$)

c) Les résistances thermiques des gaines seront parcourues par le même flux de quantité de chaleur: elles sont donc "en série".
 Diviser les "parts" par 10 consiste à multiplier la résistance thermique par 10 (à m diff de T) donc la résistance du second matériau doit valoir 9x la précédente.

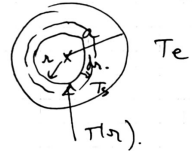
on en déduit:

$R_{H'} = 9 R_H$ soit $\ln\left(\frac{R_2 + e'}{R_2}\right) = 9 \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$\Rightarrow \frac{R_2 + e'}{R_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^9 = \left(\frac{5}{4}\right)^9 = 1,10$
 $\Rightarrow e' = 0,1 \times 25 = 2,5 \text{ cm}$

⑤ Sphère radioactive

symétrie sphérique: toutes les grandeurs dépendent spatialement
 a) exclusivement de r (ni de θ ni de φ).



Bilan d'énergie $\mathcal{U}$ dans 1 coquille sphérique entre r et $r+dr$
 $\frac{d(\delta U)}{dt} = \phi(r) - \phi(r+dr) + \underbrace{\rho \times 4\pi r^2 dr}_{\text{production en W}}$
 car RP $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow 0 = 4\pi r^2 j_H(r) - 4\pi (r+dr)^2 j_H(r+dr) + \rho \times 4\pi r^2 dr$

$0 = 4\pi r^2 \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) - 4\pi (r+dr)^2 \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho \times 4\pi r^2 dr$

$0 = -4\pi \lambda \left[-\frac{\partial (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} \right] dr + \rho \times 4\pi r^2 dr$

$\Rightarrow 0 = \lambda \frac{\partial (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} + \rho r^2$

$\Rightarrow \left[\frac{\partial (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} = -\frac{\rho r^2}{\lambda} \right]$

b) $\Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho r^3}{\lambda 3} + C_1$

$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho r}{\lambda 3} + \frac{C_1}{r^2}$

or $\left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0$ (extremum local) $\Rightarrow C_1 = 0$
 ($j_H(r)$ doit y être nul!)

Il reste à intégrer encore 1 fois:

$$T(a) - T(0) = -\frac{\pi}{3\lambda} \left(\frac{a^2}{2} - 0 \right) = T_s - T(0)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 température $\uparrow$ température
 en surface. au centre

et, comme demandé: $T(r) - T_s = -\frac{\pi}{3\lambda} \left(\frac{r^2 - a^2}{2} \right)$

$\uparrow$
 T_s

c) Loi de Newton: (en surface).

$$j_{th}(r=a) = h(T_s - T_e).$$

On peut alors utiliser la continuité de j_{th} sur 1 interface:

$$j_{th}(r=a^-) = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a^-} = j_{th}(r=0) = h(T_s - T_e)$$

$$\text{or } \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a^-} = -\frac{\pi a}{3\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi a}{3} = h(T_s - T_e) \Leftrightarrow T_s = T_e + \frac{\pi a}{3h}$$

ce qui donne pour la température au centre ($r=0$):

$$T(0) = T_s + \frac{\pi a^2}{6\lambda} = T_e + \frac{\pi a}{3h} + \frac{\pi a^2}{6\lambda}$$

Commentaires: de forte forte conducto-convection. ($h \rightarrow \infty$)

entraînent bien $T_s = T_e$
 - 1 forte conductivité du matériau ($\lambda \rightarrow \infty$)
 entraîne bien 1 uniformité de la température dans la boule $\Rightarrow T(0) \approx T_s \approx T_e$.

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\lambda \rightarrow \infty$ $h \rightarrow \infty$

d) On peut en effet calculer la puissance évacuée par la sphère à sa surface:

calcul ①: $P_{th}(r=a) = \iint_{\text{sphère}} j_{th}(a) \times dS = \frac{\pi a}{3} \times 4\pi a^2$

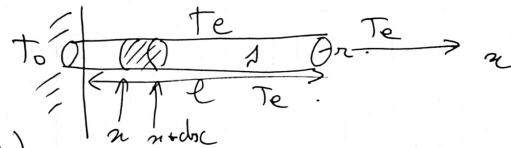
$\uparrow$
 sphère de rayon a

calcul ②: (c'est aussi la puissance totale produite dans la sphère au même moment (RP)).

$$\Rightarrow P_{th}(r=a) = \iiint_{\text{volume sphère}} \pi \times d\tau = \pi \times \frac{4}{3} \pi a^3$$

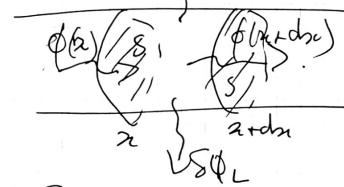
$\uparrow$
 volume sphère $\uparrow$ résultat identique

6) Expérience de Ingen Housz



a)

On propose de faire le bilan d'énergie interne (ou enthalpique) sur 1 tranchette de matériau entre x et $x+dx$:



$$RP: \frac{d(SU)}{dt} = 0$$

Bilan: $0 = \phi(x) - \phi(x+dx) - \delta Q_L \rightarrow$ conducto-convection latérale

$$0 = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x \times S + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} \times S - h \times 2\pi x dx \times (T(x) - T_e)$$

(avec $S = \pi x^2$)

$$\text{ainsi: } \lambda \times \pi x^2 \times \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx = \lambda \times 2\pi x dx \times (T(x) - T_e)$$

$$\Rightarrow \lambda x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2h(T(x) - T_e)$$

$$\text{or } \frac{d^2 T}{dx^2} = \left(\frac{2h}{\lambda x} \right) (T(x) - T_e)$$

car $T(x)$ dépendait que de x en RP et dans notre modèle.

Il est alors pratique d'introduire la fonction $\Theta(x)$ écart de température avec l'extérieur en x : $\Theta(x) \equiv T(x) - T_e$

qui vérifie: $\frac{d^2 \Theta}{dx^2} = \left(\frac{1}{d_c^2} \right) \Theta(x)$

avec $d_c \equiv \sqrt{\frac{\lambda x}{2h}}$

distance caractéristique de l'évolution spatiale de $\Theta(x)$

les formes littérales solutions de ce type d'équa. diff. sont:

(*) formes exponentielles réelles:

$$\Theta(x) = A e^{\frac{x}{dc}} + B e^{-\frac{x}{dc}} \quad (1)$$

(*) formes hyperboliques:

$$\Theta(x) = A' \operatorname{ch}\left(\frac{x}{dc}\right) + B' \operatorname{sh}\left(\frac{x}{dc}\right) \quad (2)$$

On peut alors se placer dans le cas où: $l \gg dc \equiv \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$
 Dans ce cas, on peut considérer le milieu semi-infini (en fait la décroissance de $\Theta(x)$ la fait tendre vers zéro au bout de 5 dc environ).

En optant pour la forme exponentielle (1) on en déduit que $A=0$ (sinon l'écart augmenterait exponentiellement au bout de quelques dc, ce qui est physiquement inacceptable).

$$\Rightarrow \Theta(x) = B e^{-\frac{x}{dc}}$$

soit, comme $\Theta(x=0) = T_0 - T_e$, $\Theta(x) = (T_0 - T_e) e^{-\frac{x}{dc}}$

$$\text{et donc: } T(x) \equiv \Theta(x) + T_e$$

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) e^{-\frac{x}{dc}}$$

b) $T_{\text{fusion paraffine}} \equiv T_f = 333 \text{ K}$ (ça n'existe pas! c'est la fusion pâteuse).

les distances du point de "fusion" veniront donc:

$$\frac{T_f - T_e}{T_0 - T_e} = e^{-\frac{x_f}{dc}} = \frac{dc}{x_f}$$

$$\text{soit: } \frac{x_{1f}}{dc_1} = \frac{x_{2f}}{dc_2} \Rightarrow \frac{x_{1f}}{\sqrt{\lambda_1 r}} = \frac{x_{2f}}{\sqrt{\lambda_2 r}}$$

$$\text{et donc: } \lambda_2 = \lambda_1 \times \left(\frac{x_{1f}}{x_{2f}}\right)^2 = 390 \times \left(\frac{6,4}{1,6}\right)^2 \approx \underline{66 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

(Peut-être 1 fonte? 1 acier?) le platine?

On peut en déduire h par:

$$\ln\left(\frac{T_0 - T_e}{T_f - T_e}\right) = \frac{x_{1f}}{dc_1} = \frac{x_{1f}}{\sqrt{\frac{\lambda_1 r}{2h}}}$$

mais quel intérêt? ...

c) Si la condition du a) n'est pas vérifiée, alors il faut faire intervenir la seconde condition aux limites spatiales: en $x=l$, il doit y avoir continuité du flux et donc continuité de j_{th} dans ce modèle.

$$\text{Ainsi: CLS (1)} \Rightarrow T(0) = T_0 \quad (\Theta(0) = T_0 - T_e)$$

$$\hookrightarrow \text{CLS (2)} \Rightarrow -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_l = h \Theta(l)$$

$\underbrace{\quad}_{j_{th} \text{ en "film de boue"}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{à l'interface.}}$

En adoptant la forme hyperbolique (2) (pour changer):

$$\Theta(x) = A' \operatorname{ch}\left(\frac{x}{dc}\right) + B' \operatorname{sh}\left(\frac{x}{dc}\right)$$

$$\text{soit } \frac{d\Theta}{dx} = A' \operatorname{sh}\left(\frac{x}{dc}\right) + B' \operatorname{ch}\left(\frac{x}{dc}\right)$$

$$\text{qui appliqué en } x=l \text{ donne: } \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_l = A' \operatorname{sh}\left(\frac{l}{dc}\right) + B' \operatorname{ch}\left(\frac{l}{dc}\right)$$

$$\text{et par continuité: } \left\{ \begin{array}{l} A' \operatorname{sh}\left(\frac{l}{dc}\right) + B' \operatorname{ch}\left(\frac{l}{dc}\right) \\ \text{CLS (2)} \quad = -\frac{h}{\lambda} \left[A' \operatorname{ch}\left(\frac{l}{dc}\right) + B' \operatorname{sh}\left(\frac{l}{dc}\right) \right] \end{array} \right.$$

$$\text{alors que CLS (1) donne: } A' = T_0 - T_e$$

bon le reste ne vous appartient rien pour l'épreuve de physique de PT.

to be continued.
 by M.P.S!

Compléments de corrigés du TD Tphy1 : exercices 7, 8, 11**Exercice 7****1. Dissipateur thermique**

2. L'analogie de la loi des tensions appliquée au schéma thermique équivalent donne :

$$T_j - T_a = T_j - T_b + T_b - T_a$$

$$T_j - T_a = R_{th(j-fb)} \cdot P_{watt} + R_{th(fb-a)} \cdot P_{watt}$$

$R_{th(j-fb)}$: résistance de l'interface jonction-boîtier

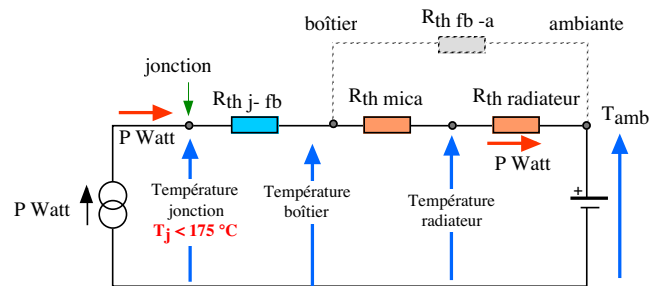
$R_{th(fb-a)}$: résistance de l'interface boîtier-air ambiant

L'utilisation d'une température de boîtier implique que celle-ci est supposée uniforme dans le boîtier qui, de fait, n'oppose pas de résistance thermique en dehors de ses faces en contact avec l'air ambiant et la jonction silicium.

3. Dissipateur

3.1. Le mica doit être un bon isolant électrique mais un bon conducteur thermique pour éviter de rajouter trop de résistance thermique au transfert de chaleur.

3.1.1. Nouveau circuit thermique :



3.1.1.1. La température du boîtier n'est pas modifiée car elle est fixée par

$$T_j - T_{boîtier} = R_{th(j-fb)} \cdot P_{watt}$$

Pour que l'ajout de la rondelle de mica et du dissipateur permette un transfert thermique plus élevé, il faut que la somme des deux résistances soit à la fois très inférieure à la résistance de l'interface jonction-boîtier et à la résistance de l'interface boîtier-atmosphère ambiant. En effet, elle est en parallèle avec la dernière et l'ensemble en série avec la première. Ainsi les ordres de grandeur de R_{mica} et $R_{radiateur}$ sont inférieurs à celui de $R_{th fb-a}$ et dans ce cas, on omettra cette branche en parallèle.

$$3.1.2. T_j - T_a = R_{th(j-fb)} \cdot P_{watt} + R_{th(mica)} \cdot P_{watt} + R_{th(radiateur)} \cdot P_{watt}$$

La somme des résistances en série vaut $\frac{80}{1,2} = 67^\circ\text{C} / \text{W}$

donc une résistance maximale du dissipateur de $67 - 38 - 1 = 28^\circ\text{C} / \text{W}$.

En l'absence de radiateur, la température de jonction serait de : $20 + 1,2 \cdot (238) = 326^\circ\text{C}$! **Destruction.**

3.2. Régime transitoire.

3.2.1. L'ensemble composant-boîtier est assimilé à une seule entité thermique de capacité mc_p ayant une température moyenne assimilée à celle de la jonction. Seule subsiste alors la résistance thermique de l'interface avec l'atmosphère.

$$3.2.2. P = mc_p \cdot \frac{dT_j}{dt} + \frac{T_j - T_a}{R_{th(j-a)}} \quad (\text{loi équivalente à la loi des noeuds})$$

3.2.3. L'évolution de la température de jonction correspond donc à une fonction de type :

$$T_j = T_a + R_{th(j-a)} \cdot P \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{mc_p R_{th(j-a)}}\right) \right)$$

temps caractéristique :

$$mc_p R_{th(j-a)}$$

$$\text{température finale : } T_a + R_{th(j-a)} \cdot P$$

11 Gel d'un lac

(masse volumique de la glace $\rho = 0,917 \text{ g/cm}^3$) $\neq 1 \text{ g/cm}^3$! 9% d'erreur

1°) hypothèse (H1) : continuité des températures à l'interface glace-air :

a) En régime quasi-stationnaire on néglige la durée ^{type} de modification du profil des températures dans l'épaisseur de glace $e(t)$ devant la durée caractéristique d'augmentation de cette épaisseur par solidification.

On garde donc (en unidimensionnel) le résultat d'un régime permanent soit le profil affine des températures dans la couche de glace.

Dans cette hypothèse + l'hypothèse (H4) :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_z = j_{th} = -\frac{\phi}{S} \vec{e}_z \quad (\text{pour avoir 1 flux } \phi \text{ positif}) \quad (3 \text{ dimensions})$$

(la température la plus chaude est $T_f > T_a$)

$$\text{soit } \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\phi}{\lambda S} = \frac{T_f - T_a}{e(t)}$$

$$\text{soit encore : } \phi(t) = S \lambda \frac{T_f - T_a}{e(t)}$$

b) la chaleur est produite par la solidification d'une épaisseur de d'eau liquide en glace (sous la couche) et à la température T_f .
le flux ϕ dissipé vers la couche de glace puis l'atmosphère est fournie à $z = e(t)$: $\phi = \frac{dm}{dt} \times L_f$

avec dm : l'augmentation de masse de glace.

$$dm = \rho S de$$

$$\text{soit : } \rho S L_f \frac{de}{dt} = S \lambda \frac{T_f - T_a}{e}$$

et en séparant les variables :

$$e de = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho L_f} (T_f - T_a)}_{\text{constante}} dt$$

et en intégrant entre 0 et t :

$$\frac{e(t)^2}{2} - \frac{e(0)^2}{2} = \frac{\lambda}{\rho L_f} (T_f - T_a) t$$

c) les relevés expérimentaux suggèrent : $\log \frac{e}{e_0} \approx \frac{1}{2} \log \frac{t}{t_0} + 0$

$$\text{soit : } \left(\frac{e}{e_0} \right)^2 \approx \frac{t}{t_0}$$

ce qui est cohérent si $e(t) \gg e_0$ et $t \gg t_0$.

d) la durée τ_e caractéristique de l'évolution de $e(t)$ correspond à la durée d'un $De = e$ soit :

$$e^2 \propto \frac{\lambda (T_f - T_a)}{\rho L_f} \tau_e$$

$$\Rightarrow \tau_e \propto \frac{\rho L_f e^2}{\lambda (T_f - T_a)}$$

et le temps caractéristique de diffusion thermique dans la couche de glace d'épaisseur $e(t)$ est donné par l'équation de diffusion unidimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{diff}} = D_{th} \times \frac{1}{e(t)^2}$$

$$\text{soit } \tau_{diff} = \frac{1}{D_{th}} e(t)^2$$

$$\tau_{diff} = \frac{\mu c}{\lambda} e^2(t)$$

$$\text{le rapport : } \frac{\tau_e}{\tau_{diff}(e)} = \frac{L_f}{c(T_f - T_a)} \quad \text{donne numériquement :}$$

$$\frac{\tau_e}{\tau_{diff}} = \frac{330}{2(T_f - T_a)} \approx 33 \quad \text{si } T_a = -5^\circ \text{C}$$

$$\approx 10 \quad \text{si } T_a = -16,5^\circ \text{C}$$

$$\approx 1 \quad \text{si } T_a = -16,5^\circ \text{C} ! ?$$

On en déduit que

l'ARQS est bien vérifiée pour des écarts de quelques degrés jusqu'à la 20^{ème} de degrés.

$$2^\circ) \phi_{cc} = h S (T_s - T_a)$$

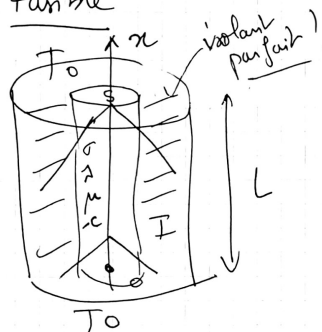
Dans ce cas le flux traversant la couche de glace à l'instant t serait désormais : $\phi = S \lambda \frac{(T_f - T_s)}{e} \quad (T_s \neq T_a)$

$$\text{et } \phi_{cc} = \phi \Rightarrow h(T_s - T_a) = \lambda \frac{(T_f - T_s)}{e}$$

$$\text{donc } T_s \rightarrow T_a \quad \forall \quad (T_f - T_s) \propto \frac{1}{eh} \ll 1$$

soit si $\boxed{h \gg \frac{\lambda}{e}}$ l'hypothèse d'autant plus valable que e est important.
(non vérifiée au début !).

⑨ Fusible



RP $\Rightarrow$ Énergie interne et températures constantes.

1°) "Rappel": $R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \ (\Omega)$

ou $P_J = RI^2$

donc pour 1 tranche d'épaisseur dx :

$dP_J = \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S} \times I^2$

2°) Bilan d'énergie interne en RP sur 1 tranche d'épaisseur dx (entre x et $x+dx$) de section S :

$0 = j_{th}(x) \times S - j_{th}(x+dx) \times S + \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S} \times I^2$

$0 = -\left(\frac{dj_{th}}{dx}\right) dx \times S + \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S} \times I^2$

$\frac{dj_{th}}{dx} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$

Loi de Fourier $\Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$

$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{2\sigma S^2}$

$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{2\sigma S^2} x + C_1$

or par symétrie de la situation en $x = \frac{L}{2} \Rightarrow j_{th}(\frac{L}{2}) = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right)_{\frac{L}{2}} = 0 = -\frac{I^2 L}{2\sigma S^2} + C_1$

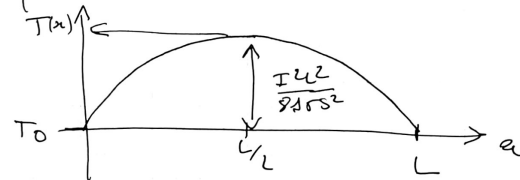
$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right) = -\frac{I^2}{2\sigma S^2} \left(x - \frac{L}{2}\right)$

que l'on intègre encore pour:

$$\left(T(x) - T_0 = -\frac{I^2}{4\sigma S^2} \frac{x^2}{2} + \frac{I^2 L}{4\sigma S^2} x \right)$$

 puisque $T(0) = T_0$ et on confirme $T(L) = T_0$

Représentation graphique:



car $T(\frac{L}{2}) = T_0 + \frac{I^2}{4\sigma S^2} \left(-\frac{(\frac{L}{2})^2}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right)$

$$= T_0 + \frac{I^2 L^2}{8\sigma S^2}$$

3°) Enchaîné de la rupture $\rightarrow$ la température atteignant 390 K $\Rightarrow$ au centre ($x = \frac{L}{2}$).

$\frac{I_{max}^2 L^2}{8\sigma S^2} = 100 \quad (= 390 - 290)$

$S^2 = \frac{(16)^2 (4 \times 10^{-2})^2}{800 \times 65 \times 1,2 \times 10^6}$

$(S \geq 1,6 \text{ mm}^2)$

4°) $PH(0) = j_{th}(0) \times S = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} \times S$

$PH(0) = -\lambda S \times \frac{L I^2}{2\sigma S^2} = -\frac{\lambda L I^2}{2\sigma S}$ (< 0 donc rendue à l'extérieur)

A.N: $PH(0) = -\frac{(4 \times 10^{-2})^2 \times 100}{2 \times 1,2 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-6}}$

$PH(0) = -\frac{4 \times 10^{-2}}{24 \times 10^6} \approx -0,65 \text{ W}$

(idem en L! par symétrie du pb).

5°) P_e étant la puissance électrique reçue par le fusible et le régime étant permanent, la totalité de cette puissance "normale" par les 2 extrémités et on aura donc:

$P_e + P_{th}(0) + P_{th}(L) = 0$ soit $P_e = \left(\frac{L}{\sigma S}\right) I^2$

On reconnaît l'écriture de la puissance dissipée par effet joule dans le fusible.

10 Ondes thermiques dans le sol.

(*) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

- a) Les oscillations de variations de température autour de la moyenne (T_0) sont 1 superposition d'ondes de période 1 jour (variations jour-nuit) et de période 1 an (variations saisonnières).

$$T_1 = 24 \times 3600 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$T_2 = 365,25 \times 24 \times 3600 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} < \omega_1$$

(Rq: les variations annuelles semblent être de 2x l'amplitude des variations jour-nuit).

b) $\theta(x,t) \equiv T(x,t) - T_0$

(*) est 1 équation diff linéaire donc vérifie le "principe de superposition". On peut donc rechercher les réponses en température indépendamment puis les additionner ensuite.

On propose donc 1 forme sinusoïdale seule:

$$\theta(0,t) = \frac{\Delta T}{2} \cos(\omega t).$$

ΔT est alors l'amplitude "crête à crête" de variations sinusoïdales à ω des écarts de température à la moyenne.

c) $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ avec a en $m^2 \cdot s^{-1}$ ω en $s^{-1} \Rightarrow \delta$ en m.

δ est 1 longueur caractéristique du phénomène de diffusion dans ce milieu de diffusivité a et à la pulsation ω .

- d) La forme proposée correspond à 1 réponse sinusoïdale du temps à la même pulsation que l'excitation en température en surface - (équation diff linéaire).

On insère alors la proposition dans l'éq de diffusion (*)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{a} f(x) i\omega e^{i\omega t}$$

soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{a} f(x) i\omega e^{i\omega t} \quad \forall x \text{ et } \forall t$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{a} i\omega f(x)$.

On cherche alors les racines de l'équation caractéristique du second degré:

$$r^2 = \frac{i\omega}{a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{a}$$

$$\Rightarrow r = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{a}}$$

$$\text{et donc: } f(x) = A e^{-\alpha \sqrt{\frac{\omega}{a}}} e^{-i\alpha \sqrt{\frac{\omega}{a}}} + B e^{+\alpha \sqrt{\frac{\omega}{a}}} e^{+i\alpha \sqrt{\frac{\omega}{a}}}$$

correspondant à l'expression proposée avec $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$

Ce qui donne: $\theta(x,t) = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i(\frac{x}{\delta} - \omega t)} + B e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\frac{x}{\delta} + \omega t)}$

donc la partie réelle en $x=0$ $\forall t$ doit vérifier:

$$\forall t \quad \theta(0,t) = \frac{\Delta T}{2} \cos(\omega t) = A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

mais comme la solution physique ne doit jamais diverger ni si $x \rightarrow \infty$, on ne peut avoir que $B=0$ dans la solution générale.

Ainsi: $A = \frac{\Delta T}{2}$ et $\theta(x,t) = \frac{\Delta T}{2} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)$

soit $T(x,t) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)$

e) Comme $\delta(w) = \sqrt{\frac{2a}{w}}$ pour 1 matériau de diffusivité a .

il faut vérifier: $\frac{\delta_{annuel}}{\delta_{quotidien}} = \sqrt{\frac{w_{quot.}}{w_{annuel}}} = \sqrt{\frac{T_{annuel}}{T_{quotid.}}}$

$\Rightarrow \frac{\delta_{annuel}}{\delta_{quotidien}} = \sqrt{365,25} \approx 19,1$

Roc: $\frac{20,7}{1,10} = 18,6$
 Angle Humide: 18,9
 Sable Humide: 18,1
 Angle sèche: 16,3
 Sable sec: 15.

confuse? BOF?!
 aucune comparaison possible sans les incertitudes-type!

À plus de 5 m sous terre, les fluctuations restantes sont les fluctuations annuelles?
 On ne sait pas en fait "sous quoi"?

Application ⑤ sur les systèmes diphasés:

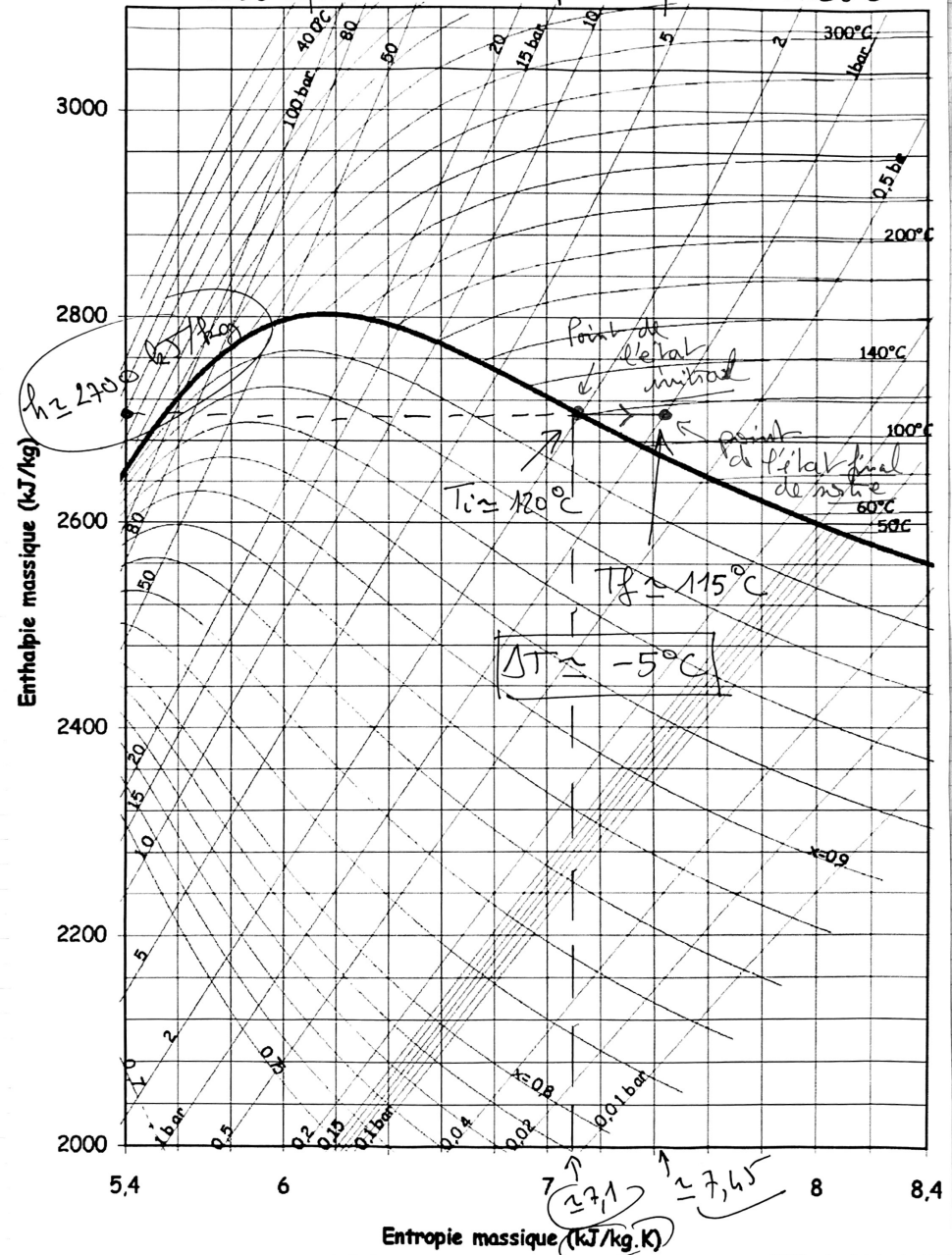
- 1) $p_1 = 2 \text{ bar} \rightarrow p_2 = 1,013 \text{ bar}$. (détente)
 1.1) Le type de détente, sous réserve qu'elle soit effectuée sans échange de chaleur et soumise exclusivement aux travaux des forces de pression en amont et en aval, est isenthalpique.
 On la nomme détente de Joule-Kelvin (ou Joule-Thomson)

Donc la fonction d'état qui ne subit pas de variation est la grandeur H . (ce sera démontré dans le chapitre $T_{\text{phys}} 2$!).

Si on adopte 1 modèle de GP pour cette vapeur alors la seconde loi de Joule ($H(T)$) impliquerait que la température ne varierait pas entre l'entrée et la sortie de la soupape.

Vu ⊕ tard dans le cours de THERMO.

1.2) la vapeur est 100% vapeur à l'entrée de la soupape tout en restant à l'équilibre avec la phase liquide $\Rightarrow$ ROSÉE



soit $\Delta S = 0,35 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ correspondant à l'entropie produite (car $Q = 0$!) par kilogramme.

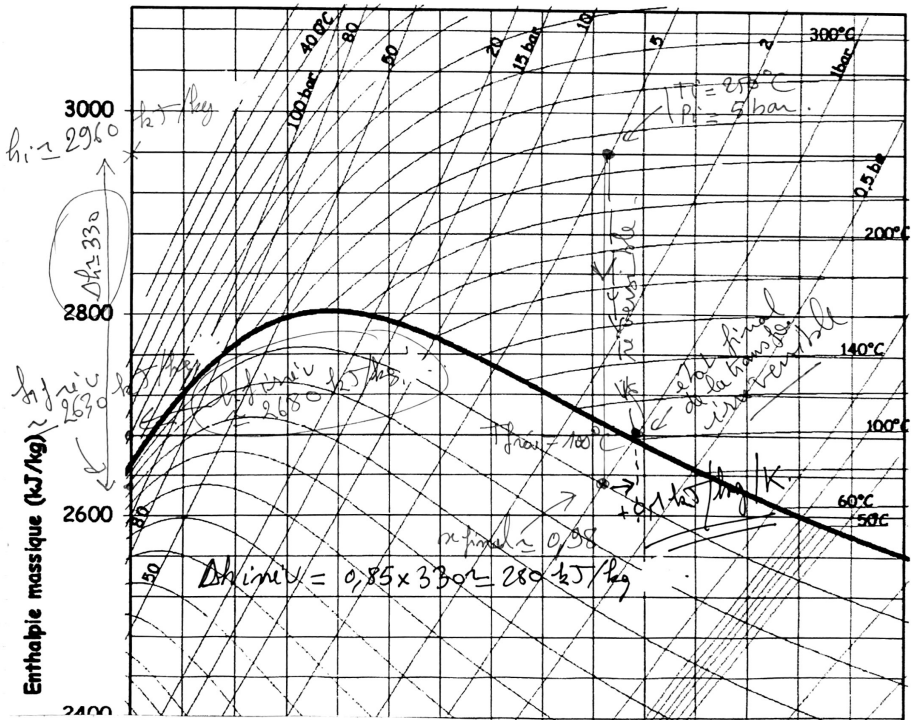
$S'_{\text{flux}} = 10 \text{ g/s} \approx 0.01 \text{ kg/s}$, alors: $\frac{dS}{dt} = 3,55 \cdot 10^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

(2) Détente adiabatique $\Rightarrow \delta Q = 0 \text{ J} \Rightarrow dS_{\text{échange}} = 0 \text{ J/K}$

2.1) réversible $\Rightarrow dS = 0 \Rightarrow dS = 0$ échange de comp.

donc transp. isentropique $\rightarrow$ verticale descendante.

2.2) Inversible $\Delta S > 0$ et $\Delta h_{\text{mél}} = 85\% \Delta h_{\text{v}}.$
(diminution de 15°C)



lors de la transfo adiabatique irréversible, l'état final est très très légèrement du côté vapeur sèche alors que du lig a été produit, la transfo est irréversible. (sa température finale $\approx 150^\circ\text{C}$)
L'entropie créée est d'environ $+0,1 \text{ kJ/kg.K}$.