

## TD Tphy-1 : Partie « conduction thermique »

### 1) La tasse de café

On considère une tasse cylindrique de rayon  $a$  et d'épaisseur  $e$  contenant du café à  $T=80^\circ\text{C}$ ; on utilisera des valeurs numériques du cours pour la conductivité  $\lambda$  et pour le coefficient conducto-convectif avec l'air  $h$  (on néglige les effets de bord)

Quelle doit-être l'épaisseur de la tasse si l'on ne veut pas se brûler, c'est à dire pour que sa face extérieure n'excède pas  $50^\circ\text{C}$  ?

(On discutera du rôle du régime transitoire et des conditions initiales dans le modèle proposé)

Avez-vous déjà bu un café dans une tasse de type « double-paroi »? Pas de souci ?



### 2) Refroidissement d'un studio

On cherche l'évolution de la température dans un studio. Les appartements voisins sont maintenus à une température  $T_v = 18^\circ\text{C}$ . Les échanges thermiques entre le studio et les appartements voisins sont caractérisés par une conductance thermique  $G_V = 100 \text{ W.K}^{-1}$ . La température extérieure est  $T_E = 0^\circ\text{C}$ , indépendante du temps. Les échanges thermiques entre le studio et l'extérieur sont caractérisés par la résistance thermique  $R_E = 0,05 \text{ K.W}^{-1}$ . La capacité thermique du studio est  $C = 6.10^5 \text{ J.K}^{-1}$ .

À l'instant  $t = 0$ , le chauffage est coupé dans le studio, et on étudie l'évolution de sa température  $T_I$  qui était initialement égale à  $T_V$ . Pour les échanges thermiques, on fait l'approximation d'une évolution quasi-stationnaire pour laquelle on utilise les résistances thermiques des murs.

1. On considère un mur du studio, d'épaisseur  $e$ , de surface  $S$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . La température est  $T_e$  à l'extérieur et  $T_I$  à l'intérieur de la pièce. Calculer la résistance thermique du mur et le flux thermique qui le traverse.
2. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $T_I(t)$  et donner le schéma électrique équivalent.
3. Quelle est la constante de temps  $\tau$  de l'évolution de la température? Faire une application numérique.
4. Quelle est la température finale notée  $T_{I_{fin}}$ ? Faire une application numérique.
5. Discuter le bien-fondé de l'approximation quasi-stationnaire.

### 3) Double vitrage

On considère une vitre d'épaisseur  $e$ , de surface  $S$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . La température est  $T_e$  à l'extérieur et  $T_i$  à l'intérieur de la pièce.

1. Calculer la résistance thermique de la vitre et le flux thermique qui la traverse.
2. On remplace la vitre par un double vitrage constitué de deux vitres d'épaisseur  $e$ , de même conductivité thermique  $\lambda$ , séparées par une couche d'air (conductivité thermique  $\lambda'$ ) d'épaisseur  $e'$ . Reprendre la question précédente. Conclure.
3. Déterminer la répartition des températures dans le double vitrage. Quelles sont les températures aux interfaces verre-air et air-verre?

Données :  $\lambda = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $\lambda' = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $e = 5 \text{ mm} = e'$  ;  $S = 1 \text{ m}^2$  ;  $T_e = 7^\circ\text{C}$  et  $T_i = 19^\circ\text{C}$ .

#### 4) Gaine isolante autour d'une canalisation

Une canalisation cylindrique de rayon extérieur  $a$  transporte un fluide chaud de température  $T_1$  supposée uniforme et constante. Cette canalisation est constituée d'un tube métallique mince dont la température est supposée égale à celle du fluide qu'elle transporte. Le contact thermique entre le tube et l'atmosphère ambiante de température uniforme  $T_a$  est caractérisé par la loi de Newton avec le coefficient de convection  $h$ . On se place en régime permanent.

1. Calculer les pertes de chaleur le long du tube, caractérisées par le flux  $\Phi_0$  pour une longueur  $L$  de canalisation.
2. On entoure la canalisation précédente par un manchon isolant de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$  et de coefficient de conductivité thermique  $\lambda$ . On suppose qu'il y a continuité de la température en  $r = a$  et qu'en  $r = b$ , le transfert thermique est caractérisé par le même coefficient  $h$  que précédemment.

Calculer dans ces conditions le flux thermique  $\Phi_1$  caractérisant les pertes pour une longueur  $L$  de canalisation.

3. Comparer  $\Phi_1$  et  $\Phi_0$ . A-t-on automatiquement  $\Phi_1 < \Phi_0$  ?
4. Expliquer qualitativement ce qui se passe si  $\lambda$  est très grand ?

#### 5) Modélisation d'un fusible

Un fil électrique cylindrique, de longueur  $L$  et de rayon  $a \ll L$ , de conductivité électrique  $\sigma$  est parcouru par un courant de vecteur densité de courant  $\vec{j} = j \vec{u}_z$  uniforme. On se place en régime stationnaire. On suppose le fil très long de telle sorte que la température ne dépend que de  $r$  en coordonnées cylindriques.

1. En faisant un bilan pour la couronne comprise entre  $r$  et  $r + dr$ , montrer que la température est solution de :

$$\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$$

2. En déduire que  $T(r)$  est de la forme :

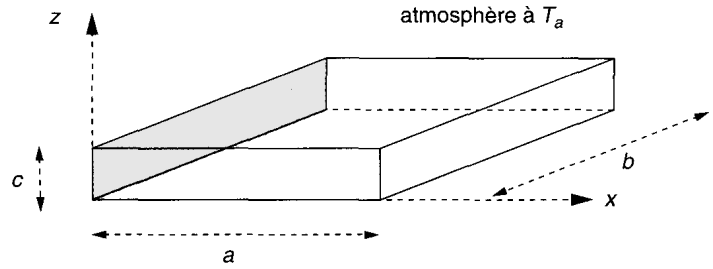
$$T(r) = -\frac{j^2 r^2}{4\sigma\lambda} + \alpha \ln r + \beta$$

et justifier que nécessairement  $\alpha = 0$ . Quel est le point dont la température est la plus élevée ? Était-ce prévisible ?

3. On suppose que l'atmosphère impose  $T(r = a) = T_0$  et on se donne la température de fusion  $T_f$  du métal. En déduire comment varie le rayon  $a_M$  d'un fil destiné à réaliser un fusible fondant pour un courant d'intensité  $I_M$ .
4. En réalité le fil évacue vers l'atmosphère une puissance thermique  $\phi = 2\pi a L h [T(a) - T_0]$  où  $h$  est une constante telle que  $ah \ll \lambda$ . En déduire comment varie le rayon  $a_M$  d'un fil destiné à réaliser un fusible fondant pour un courant d'intensité  $I_M$

## 6) Ailette de refroidissement

Pour évacuer de la chaleur d'une source vers l'atmosphère, on a souvent recours au dispositif représenté sur la figure ci-contre constitué d'une plaque collée en  $x = 0$  à la source de chaleur qui impose  $T(x = 0) = T_0$ . Cette plaque, de conductivité thermique  $\lambda$ , est plongée dans l'atmosphère, qui est assimilée à une source de température  $T_a$  constante. On étudie un régime stationnaire.



On suppose qu'un élément de surface  $dS$  de la plaque de température  $T(x)$  cède à l'atmosphère une chaleur  $\delta^2 Q = h [T(x) - T_a] dS dt$ .

1. En faisant un bilan pour la tranche de plaque comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que  $T(x)$  est solution d'une équation de la forme :

$$\delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + T = T_a$$

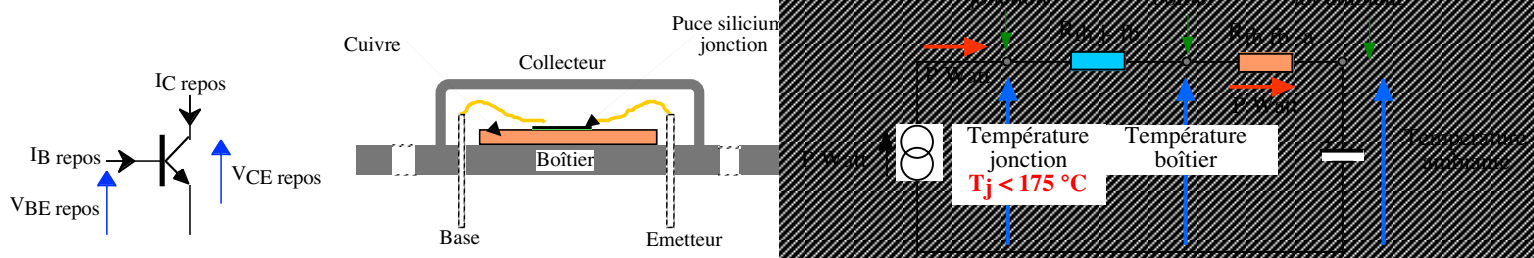
et exprimer  $\delta$  en fonction de  $h$ ,  $\lambda$ ,  $b$  et  $c$ ; simplifier  $\delta$  dans la limite  $c \ll b$ .

2. On suppose que  $a \gg \delta$  de telle sorte qu'on peut raisonner sur une plaque de longueur  $a$  infinie. A l'extrémité de la plaque, l'atmosphère impose  $T(x = \infty) = T_a$ . Établir l'expression de  $T(x)$  en fonction de  $T_0$ ,  $T_a$ ,  $x$  et  $\delta$ ; tracer l'allure de son graphe et interpréter concrètement  $\delta$ .
3. Comment un industriel choisira-t-il la longueur effective  $a$  de la plaque par rapport à  $\delta$ ?
4. Calculer le flux thermique total  $\phi$  évacué par l'ailette en fonction de  $h$ ,  $b$ ,  $\delta$ ,  $T_0$  et  $T_a$ .
5. En l'absence d'ailette, la surface d'échange entre la source et l'atmosphère serait  $bc$  et le flux évacué vers l'atmosphère vaudrait  $\phi_0 = hbc(T_0 - T_a)$ . Exprimer le rendement de l'ailette  $\eta = \phi/\phi_0$  en fonction de  $h$ ,  $\lambda$  et  $c$ .
6. Quel est l'intérêt de prendre  $c \ll b$ ? Interpréter qualitativement l'efficacité de ce choix en comparant son effet sur le transfert vers l'atmosphère et sur le transfert au sein de la plaque.

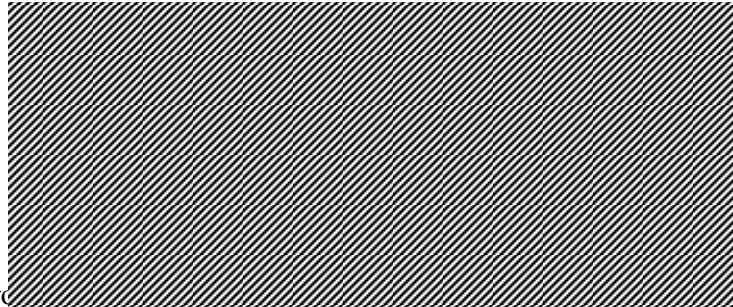
## 7) Radiateur à associer à un composant électronique

En régime permanent, la puissance électrique consommée par les jonctions des composants électroniques est intégralement dissipée vers l'extérieur sous forme de chaleur. Le silicium qui constitue les jonctions du composant ne doit pas dépasser une température  $T_j$  supérieur à  $175^\circ\text{C}$  en moyenne. La température  $T_j$  du silicium d'un composant a une grande influence sur son taux de mortalité. Par exemple; le taux de pannes réduit de moitié lorsque  $T_j$  passe de  $160^\circ\text{C}$  à  $135^\circ\text{C}$ .

Le schéma thermique par analogie «électrique» est donné ci-dessous :



1. Confirmer l'analogie de la loi des tensions en utilisant les résistances thermiques dont vous aurez précisé la signification. Qu'implique l'utilisation d'une «température boîtier» ?
2. On associe à ce composant un radiateur thermique après avoir interposé une rondelle de mica (schéma ci-dessous)



2.1. Quelles propriétés

2.2. En supposant que les ailettes du radiateur sont suffisamment «longues» (cf ex 6) et en notant  $R_{mica}$  la résistance thermique de la rondelle de mica (faible mais non-négligée) et  $T_m$  la température de la jonction radiateur-mica, proposez un nouveau «circuit» thermique.

2.3. Dans ce modèle, la température du boîtier est-elle modifiée par la présence du radiateur ? (à puissance thermique et température de jonction identique). Qu'en déduisez vous concernant les ordres de grandeur des résistances  $R_{radiateur}$  et  $R_{mica}$  relativement à  $R_{th\ jb-a}$  ?

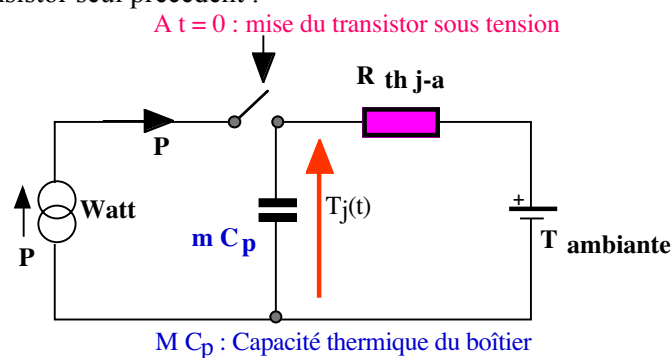
2.4. On souhaite imposer une température de jonction maximale<sup>t</sup> de  $100^\circ\text{C}$  pendant le fonctionnement à température ambiante de  $20^\circ\text{C}$  lors duquel il dissipe  $P=1,2\text{ W}$ .

2.4.1. Que doit valoir la résistance thermique maximale du radiateur ?

2.4.2. Le composant serait-il détruit en l'absence de radiateur ?

(On donne :  $R_{mica}=1^\circ\text{C/W}$ ,  $R_{th\ jb}=38^\circ\text{C/W}$  et  $R_{th\ fb-a}=200^\circ\text{C/W}$ )

3. En régime transitoire, les équations différentielles d'évolution de la température **moyenne** de chaque partie matérielle peuvent également présentées sous la forme de circuits thermiques. Ci-dessous un modèle très simplifié pour le transistor seul précédent :



3.1. Précisez les hypothèses simplificatrices

3.2. Donnez l'équation différentielle de la température de jonction (?).

3.3. Allure de l'évolution de la température (temps caractéristique et valeur finale)

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

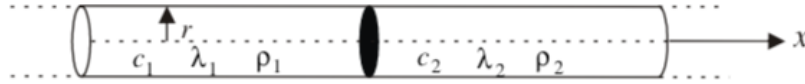
## 8. Température de contact

On considère deux barres à base circulaire de petit rayon  $r$ , accolées, calorifugées sur leur surface latérale, constituées de matériaux différents :

— pour  $x < 0$ , on a une capacité thermique massique  $c_1$ , une conductivité thermique  $\lambda_1$ , une masse volumique  $\rho_1$  ; la barre étant initialement à la température  $T_1^0$  ;

— pour  $x > 0$ , on a une capacité thermique massique  $c_2$ , une conductivité thermique  $\lambda_2$ , une masse volumique  $\rho_2$  ; la barre étant initialement à la température  $T_2^0$  .

On cherche à déterminer à une date  $t$  quelconque la température de contact  $T(0,t)$  . Les barres sont supposées infiniment longues.



a) On choisit un modèle simple (il n'est pas solution de l'équation de la diffusion thermique) pour lequel à la date  $t$  on a  $T = T_1^0$  pour  $x < -\ell_1(t)$  ;  $T = T_2^0$  pour  $x > \ell_2(t)$  ,  $T$  affine pour  $-\ell_1(t) < x < 0$  et pour  $0 < x < \ell_2(t)$  .

Déterminer  $T(0,t)$  en fonction de  $T_1^0$ ,  $T_2^0$ ,  $\Gamma_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$  et  $\Gamma_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$  , en écrivant :

— la continuité du flux thermique en  $x = 0 \quad \forall t > 0$  ;

— la conservation de l'énergie totale des deux barres.

b) On cherche une solution exacte. Montrer que la fonction  $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$  , avec  $u = \frac{x}{\sqrt{4at}}$  est solution de l'équation

de la diffusion thermique,  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  étant la diffusivité thermique du matériau. On donne  $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Calculer  $T(x,t)$  . En déduire  $T(0,t)$  en fonction de  $T_1^0$ ,  $T_2^0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  .

## 9) Fusible

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire  $S$ , de longueur utile  $L$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ . Il possède une conductivité électrique  $\sigma$ , et une conductivité thermique  $\lambda$ . Il est parcouru par un courant continu d'intensité  $I$ . Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en  $x = 0$  et  $x = L$  sont imposées et égales à la température  $T_0$  du milieu ambiant.

On se place en régime permanent.

1. Rappeler l'expression de la résistance électrique  $R$  d'un conducteur cylindrique de conductivité  $\sigma$ , de longueur  $h$  et de section  $S$ . En déduire la puissance dissipée par effet Joule par un tranche de conducteur de section  $S$  et d'épaisseur  $dx$ .
2. Établir l'équation différentielle liant la température  $T$ ,  $x$ ,  $S$  et les données. Donner l'expression littérale de  $T(x)$  et représenter graphiquement  $T$  en fonction de  $x$ .
3. Le matériau constituant le fil fond à  $T_F = 390 \text{ K}$ . On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale  $I_{max} = 16 \text{ A}$ . Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de  $I_{max}$ . Déterminer l'expression littérale de l'aire  $S$  à prévoir puis faire l'application numérique.
4. On fixe  $I = 10 \text{ A}$ . Le fil à une section  $S$  trouvée à la question précédente. Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique  $P_{th}(0)$  transférée par conduction en  $x = 0$ . Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique  $P_{th}(L)$  transférée en  $x = L$ .
5. Quelle relation a-t-on entre  $P_{th}(0)$ ,  $P_{th}(L)$  et la puissance électrique  $P_e$  fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

*Données numériques :*

- $\lambda = 65 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;
- $\sigma = 1,2 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$  ;
- $c = 460 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$  ;
- $\mu = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ;
- $L = 2,5 \text{ cm}$  ;
- $T_0 = 290 \text{ K}$ .

## 10. Ondes thermiques dans le sol

On étudie la répartition de températures à l'intérieur du sol modélisé par le demi-espace  $x \geq 0$ , homogène. On note  $\rho$  sa masse volumique,  $\lambda$  sa conductivité thermique,  $c$  sa capacité thermique massique,  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  sa diffusivité thermique.

Dans ces conditions la température dans le sol ne dépend que de la profondeur  $x$  et du temps  $t$ , et elle est régie par l'équation de la diffusion thermique :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$  (\*)

a) Des mesures de la température à la surface du sol  $T(0,t)$  pendant plusieurs années permettent de tracer le spectre des variations  $\theta(0,t) = T(0,t) - T_0$  de cette température autour de la valeur moyenne  $T_0$  dont l'allure grossière est la suivante :



Pourquoi le spectre comporte-t-il deux pics ? On note  $\omega_1$  et  $\omega_2 < \omega_1$  les pulsations de ces pics. Que pensez-vous du modèle ?

b) On cherche à déterminer  $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$  pour  $x \geq 0$ . Quelle propriété de (\*) permet-elle de considérer d'abord une condition aux limites de la forme  $\theta(0,t) = \frac{\Delta T}{2} \cos(\omega t)$  ? Quelle est la signification de  $\Delta T$  ?

c) On pose  $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ . Quelle est la dimension de cette grandeur ?

d) On se place en régime sinusoïdal forcé : les solutions de (\*) sont cherchées sous la forme  $\theta(x,t) = \text{Re}[\underline{\theta}(x,t)]$  avec  $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$  (les grandeurs soulignées sont des complexes). Justifier cette forme.

Déterminer l'équation différentielle régissant la fonction  $\underline{f}(x)$ . Montrer que les solutions les plus générales s'écrivent alors

sous la forme :  $\underline{f}(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i\frac{x}{\delta}} + B e^{\frac{x}{\delta}} e^{i\frac{x}{\delta}}$ . Donner la loi  $T(x,t)$  en régime établi.

e) A.N : On définit la «profondeur de pénétration» comme la profondeur à laquelle l'amplitude d'une variation de température est réduite à 1% de son amplitude en surface. On mesure des profondeurs de pénétration pour des cycles quotidiens et annuels, selon le type de sol étudié :

|               | $a \text{ (cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ | Profondeur de pénétration |           |
|---------------|-----------------------------------------------|---------------------------|-----------|
|               |                                               | Jour (m)                  | Année (m) |
| Roc           | 0,020                                         | 1,10                      | 20,5      |
| Argile humide | 0,015                                         | 0,95                      | 18,0      |
| Sable humide  | 0,010                                         | 0,80                      | 14,5      |
| Argile sèche  | 0,002                                         | 0,40                      | 6,5       |
| Sable sec     | 0,001                                         | 0,30                      | 4,5       |

Montrer que le rapport des profondeurs de pénétration pour un matériau donné est conforme à la théorie étudiée. Que peut-on en conclure sur la température des grottes enfouies à plus de 5 m sous terre ?

## 11) Gel d'un Lac

Lorsque l'air au dessus d'un lac de surface  $S$  est à la température  $T_a < T_f$ , l'eau du lac se solidifie et l'épaisseur de la couche de glace augmente au cours du temps (figure 2).

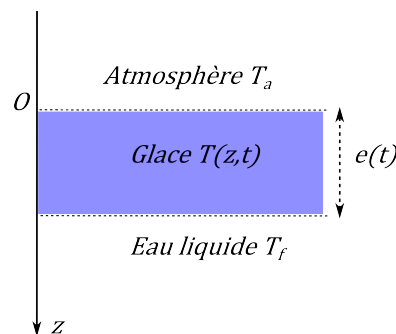


FIGURE 1 – Gel d'un lac

On note  $T_f$  la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et  $T(z,t)$  la température de la glace pour  $0 \leq z \leq e(t)$ .

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires : le profil  $T(z,t)$  est le même que celui que l'on obtiendrait en régime état stationnaire.

On donne

- température de fusion de la glace  $T_f = 273 \text{ K}$  ;
- enthalpie massique de fusion de la glace  $l_f = 330 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ;
- masse volumique de l'eau liquide  $\mu = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ; on adoptera la même valeur pour la glace ;
- capacité thermique massique de la glace  $c = 2,06 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  ;
- conductivité thermique de la glace  $\lambda = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$

1. On suppose que l'air impose sa température  $T_a$  à la surface du lac :  $T(z = 0, t) = T_a$  (hypothèse H1).

- (a) Pour une surface  $S$ , exprimer le flux thermique  $\Phi$  traversant la couche de glace dans le sens des  $z$  décroissants en fonction de  $T_f - T_a$  et des données.

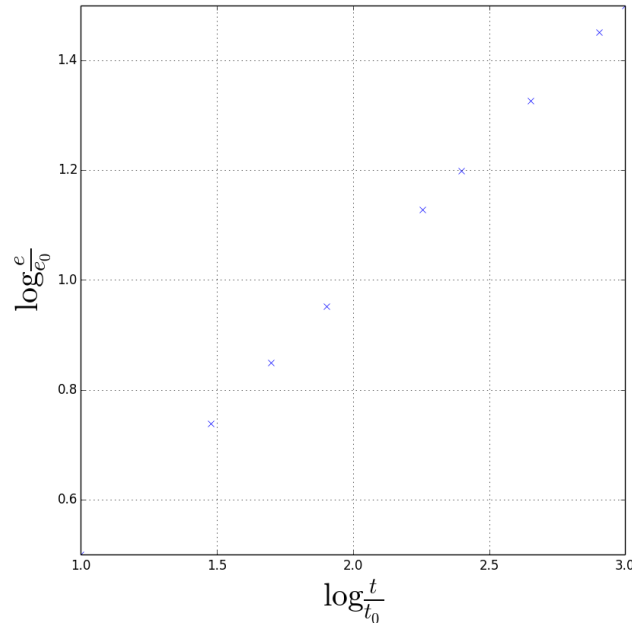


FIGURE 2 – Evolution de l'épaisseur de glace au cours du temps.

- (b) En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre  $t$  et  $t + dt$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $e(t)$ . La résoudre en prenant  $e(t = 0) = e_0$ .
- (c) Le modèle rend-il compte des résultats expérimentaux ?
- (d) Déterminer une durée caractéristique  $\tau$  des variations de  $e(t)$ . Discuter la validité de l'ARQS.
2. En réalité, l'hypothèse H1 n'est pas satisfaisante : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu simultanément la diffusion thermique et la convection. On suppose que le flux thermique à l'interface glace-air suit la loi de Newton :

$$\Phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$$

où  $T_s = T(z = 0, t)$  est la température de surface du lac et  $h$  un coefficient constant (d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au-dessus du lac).

En déduire l'expression de  $T_s$ . A quelle condition le modèle de la question 1 est-il valable ?