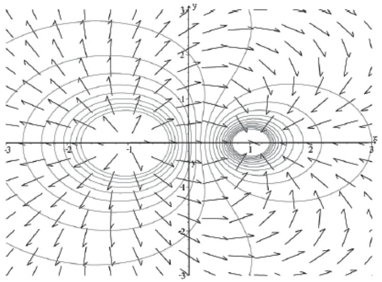
TD Em1 : Champs statiques créés par des distributions diverses

Exercice 1 : Lecture d'une carte de champ

On considère un doublet de charges q_A et q_B placées respectivement aux points $A(-1,0)$ et $B(+1,0)$ du plan (Oxy).

Sur la carte de champ représentée, les lignes courbes correspondent aux équipotentielles (régulièrement réparties en valeurs de potentiel) et les flèches indiquent l'orientation de la ligne de champ locale.



1. Quels sont les signes des charges q_A et q_B ?
2. Quelle est la charge la plus grande en valeur absolue ?
3. Sachant que le rapport des charges est égal en valeur absolue à 2, montrer que l'équipotentielle $V = 0$ correspond dans le plan (Oxy) à un cercle C dont on déterminera son rayon R et son centre C.

Exercice 2 : Modèle de membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz ; l'axe Ox est orienté vers l'extérieur de la cellule (vers l'électrolyte). Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x.

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique (en général négatif).

On schématise le potentiel par la fonction V(x) suivante :

$$\begin{cases} x \le 0 \quad V(x) = -V_0 \\ x > 0 \quad V(x) = -V_0 . e^{-\frac{x}{a}} \end{cases}$$

où V_o est une constante positive homogène à un potentiel et où a est une distance.

1. Calculer le champ électrique en tout point.
2. Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe Ox et de base S, limitée par les plans d'abscisses x et x + dx. En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point. Retrouver cette expression par application de l'équation de Maxwell-Gauss puis par l'équation de Poisson. Quel est le signe de ρ ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide (quels sont les porteurs de charge présents) ?
3. En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation x=0.
4. Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S s'étendant indéfiniment le long de l'axe Ox (de $-\infty$ à $+\infty$). Commenter.

Exercice 3 : Lignes de champ

A- Champ électrostatique $\vec{E}$

A_1- Obtention des charges par les lignes de champ et les points singuliers

Les figures 1a et 1b montrent les lignes (orientées par $\vec{E}$) du champ électrostatique créé par un ensemble dipolaire de charges ponctuelles. Toutes les charges créant ce champ sont dans le plan de la figure. On note q la valeur la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples entiers de q. On donne les coordonnées des points $A(24a, 75a)$, $B(0,0)$, $C(24a, -8a)$, $D(75a, 0)$ où a est l'unité de longueur.

Déterminer le nombre et la position des charges utilisées, leurs valeurs et le signe de q.

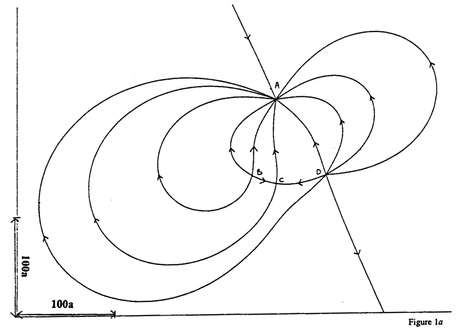


Figure 1a

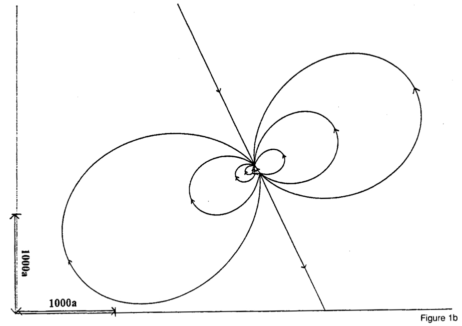


Figure 1b

A_2- Obtention des équations de lignes de champ et des surfaces équipotentielles

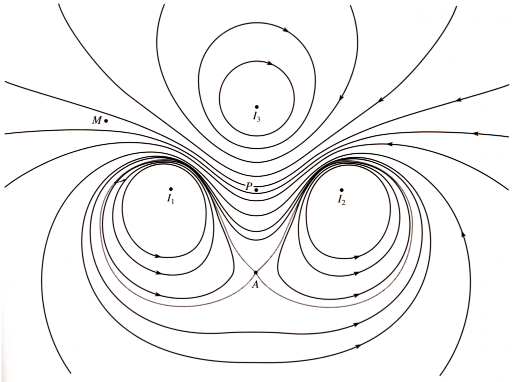
-cas particulier du dipôle électrostatique : Lorsque les lignes de champ et les équipotentielles électrostatiques de deux charges opposées (q placée en P et -q placée en N avec PN=a) sont observées à une distance r>>a, on montre que l'on peut écrire le potentiel et le champ (à longue distance) sous les formes :

$V = \dfrac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ et $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.\left[\dfrac{3\vec{r}.(\vec{p}.\vec{r})}{r^2} - \vec{p}\right]$ avec $\vec{p} = q.\overrightarrow{NP} = q.a.\vec{e}_z$ et $\vec{r}$ des coordonnées sphériques

Donnez les équations des lignes de champ et des équipotentielles.

B- Champ magnétostatique $\vec{B}$

Trois fils infiniment longs parallèles sont parcourus par des courants permaments d'intensité I_1, I_2 et I_3. Les lignes du champ magnétique sont représentées sur la figure.



1. Quelle est la valeur de $\vec{B}$ au point A ?
2. Que peut-on dire de I_1 et I_2 ?
3. On mesure un champ magnétique de 0,01 T en M. Estimer la valeur du champ en P.

Exercice 4 : Atome d'hydrogène : modèle de Bohr et modèle de Yukawa

L'atome d'hydrogène dans le modèle planétaire de Bohr est constitué par un proton fixe ($q = +e$ au point O) et un électron mobile ($q' = -e$ sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r).

1. Déterminer l'énergie mécanique (cinétique + potentielle) de l'électron en fonction de e, ϵ_0 et r.
2. Bohr postula que le moment cinétique de l'électron $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge m_e \overrightarrow{v}$ avait son module quantifié $L = \frac{nh}{2\pi}$ (n : nombre quantique principal et h constante de Planck).
   a) En déduire la quantification du rayon de la trajectoire puis le rayon fondamental a_0.
   b) Exprimer l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène.

   Données numériques : $a_0 = 53\ pm$, $E_i = 13,6\ eV$ (énergie d'ionisation).
3. L'atome d'hydrogène dans le modèle de Yukawa correspond à un proton fixe ($q = +e$ au point O) et un nuage électronique à symétrie sphérique de densité volumique $\rho(r) = -\frac{e}{4\pi a_0^2 r} e^{-\frac{r}{a_0}}$.
   a) Vérifier que cette densité volumique traduit la probabilité de présence de l'électron dans tout l'espace.
   b) Désormais le potentiel créé par cette distribution en un point M ($OM = r$) est de la forme : $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a_0}}$ (potentiel de Yukawa). En déduire le champ $\overrightarrow{E}$ en tout point $M(r)$.
   c) Donner l'expression du potentiel créé par le seul nuage électronique au point $M(r)$. Quelle est l'énergie potentielle d'une charge $q = +e$ placée en ce point $M(r)$. En déduire l'énergie potentielle du proton placé au point O dans le champ du nuage électronique. Conclure.

Exercice 5 : Analogie gravitationnelle

1.Une sphère de masse M crée un champ de gravitation : $\vec{g} = -\frac{G.M}{r^3}\vec{r}$

Par analogie coulombienne, comment s'écrit le potentiel ϕ dont dérive ce champ de gravitation ? Quelle est sa relation à l'énergie potentielle de gravitation ?

2.Que vaut la divergence de $\vec{g}$? Quelle est la densité moyenne de la terre si on prend $M=6.10^{24}$ kg et R=6400km ?

3.Si la répartition des densités était multicouches tout en restant à symétrie sphérique, pourrait-on s'en rendre compte par observation du champ gravitationnel extérieur ?

4. Et s'il y avait un vide sphérique à la place du noyau, quel serait le champ gravitationnel à l'intérieur ?

Exercice 6 : Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), dont la longueur des génératrices en regard est h. On néglige les effets de bord.

1) a) Déterminer le vecteur champ électrique en un point M situé à la distance de r de l'axe ($R_1<r<R_2$).

b) En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur.

Application numérique : $R_2 = 20$ cm, $R_1 = 10$ cm, h = 50 cm.

c) Cas particulier où R_2-R_1 = e << R_1,

2) Pour éviter une étincelle destructive, le champ électrique entre les armatures ne doit pas dépasser la valeur E_0. Quelle est la d.d.p. maximale V_0 que l'on peut appliquer entre les armatures ?

Application numérique : E_0 = 3 MV/m. Calculer V_0.

3) La d.d.p. V_0 étant insuffisante, on peut remplacer l'armature intérieure de rayon R_1 par une armature de rayon R_0. sans changer les autres caractéristiques géométriques de ce condensateur. Quel rayon R_0 doit-on choisir pour que V_0 ait la valeur la plus grande possible ?

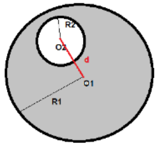
Application numérique : Calculer R_0 et $(V_0)_{max}$.

Exercice 7 : Champ magnétostatique créé par une bobine torique

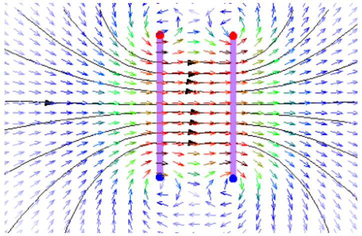
Une bobine torique est constituée de N (>>1) spires jointives régulièrement enroulées sur un tore (ou un pneu) d'axe Oz et parcourues par la même intensité I . Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par la bobine torique.

Exercice 8 : Cavité cylindrique dans un conducteur

Considérons un cylindre conducteur d'axe (O_1z), de rayon R_1 parcouru par un courant de densité volumique de courant uniforme $\vec{j} = j\vec{u_z}$. On perce ce cylindre d'une cavité d'axe $(O2z)$, et de rayon R_2, et on suppose que la distribution volumique de courant en dehors reste inchangée. Déterminer le champ magnétostatique en tout point de la cavité.



Exercice 9 : Bobines d'Helmholtz



Le champ magnétostatique de deux bobines d'Helmholtz est représenté ci-contre
Quelle propriété a le champ entre les bobines ? Justifier !
Représenter les plans (ou axes) de symétrie et d'anti-symétrie du champ B ?
Représenter les plans (ou axes) de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution des courants ?
Sont-elles parcourues par des intensités différentes ? Indiquer leur sens.

Exercice 10 : Energie potentielles d'interaction et énergie «propre» (PT 2008)

Valeurs numériques :

Masse de la Terre : $M_T = 6,0.10^{24}$ kg

Masse du Soleil : $M_S = 2,0.10^{30}$ kg

Rayon terrestre moyen : $R_T = 6,4.10^6$ m

Rayon solaire moyen : $R_S = 7,0.10^8$ m

Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : $L = 1,5.10^{11}$ m

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

Dans cette partie, le Soleil et la Terre sont assimilés à des sphères homogènes. On cherche à exprimer le champ de gravité, le potentiel de gravitation et les énergies gravitationnelles par analogie avec l'électrostatique.

1. Exprimer, en un point A , le champ électrique $\vec{E}(A)$ créé par une charge ponctuelle q placée en un point O, en posant : $OA = r$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{r}$.

2. On considère une surface sphérique S, de centre O.

2.1. Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

2.2. Déterminer le flux Φ du vecteur $\vec{E}$ sortant de S. On notera Q_{int} la charge totale intérieure à la surface sphérique S.

3.1. On considère une boule de rayon R uniformément chargée, de charge totale Q. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ que cette boule crée à une distance r de son centre O pour r compris entre 0 et $+\infty$, en fonction de Q, $\vec{u}_r$, r et R. On distinguera le cas $0 < r < R$ du cas $R < r < +\infty$.

3.2. Rappeler la relation entre champ et potentiel électrostatiques.

3.3. En déduire le potentiel électrostatique $U(r)$ de la sphère de charge totale Q en fonction de r. On supposera ce potentiel nul à l'infini, et on distinguera le cas $0 < r < R$ du cas $R < r < +\infty$.

4.1. Rappeler la relation entre l'énergie d'interaction électrique entre la boule de la question 3.1. et une charge q ponctuelle placée à la distance r de son centre O, et le potentiel électrostatique $U(r)$ de cette boule, déterminé à la question précédente.

4.2. Déterminer cette énergie d'interaction électrique notée E_1 (supposée nulle à l'infini).

5.1. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique en un point M où le champ a pour valeur $\vec{E}(M)$.

5.2. Montrer que l'énergie propre électrostatique de la boule peut s'écrire sous la forme $E_2 = \dfrac{kQ^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ et déterminer k.

6. On procède à présent par analogie formelle entre champ électrique et champ gravitationnel.

6.1. Exprimer, en un point A le champ gravitationnel $\vec{g}(A)$ créé par une masse ponctuelle m placée en un point O, en posant : $OA = r$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{r}$.

6.2. Présenter précisément les couples de grandeurs analogues (exemple : charge et masse).

6.3. On considère une boule de rayon R homogène, de masse M. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(r)$ que cette boule crée à une distance r de son centre O, pour r compris entre 0 et $+\infty$.

6.4. Application numérique : calculer l'intensité g_{ST} du champ de gravitation créé par le Soleil à la surface de la Terre puis l'intensité g_{TS} du champ de gravitation créé par la Terre à la surface du Soleil.

6.5. Déterminer l'énergie d'interaction gravitationnelle entre la Terre supposée ponctuelle et le Soleil.

6.6. Application numérique.

6.7. Déterminer l'énergie propre gravitationnelle du Soleil et de la Terre, notées respectivement E_{2S} et E_{2T}.

6.8. Application numérique : calculer ces énergies ainsi que l'énergie E_{2TS} de l'ensemble Terre-Soleil en négligeant, pour le calcul de l'énergie d'interaction, leurs rayons devant la distance qui les sépare. Commenter les résultats.