TD Ec3 : Echantillonnage et filtrage numérique

Exercice 1 : Un mauvais échantillonnage

Voulant relever expérimentalement le diagramme de Bode d'un filtre constitué :
– d'un C.A.N. échantillonnant le signal d'entrée à 20 kHz ;
– d'un filtre numérique passe-bas de fréquence coupure égale à 1 kHz ;
– d'un C.N.A.,
un étudiant à la surprise de constater que lorsque le signal d'entrée a la fréquence 20,1 kHz, le signal délivré en sortie a une amplitude significative et n'a pas la même fréquence que l'entrée. Doit-il conclure à l'existence d'une non-linéarité ?

Exercice 2 : Oscilloscope numérique

Principe d'un oscilloscope numérique

La structure de principe d'un oscilloscope numérique est représentée à la figure 28, elle comprend :
– un étage atténuateur, dont l'impédance d'entrée est très élevée (1 MΩ couramment) ;
– un échantillonneur prélevant N_e échantillons par seconde ;
– un convertisseur analogique-numérique C.A.N. dont les valeurs successives sont transférées dans une mémoire tampon à accès très rapide ;
– une unité de traitement et d'affichage qui permet, à la suite de l'acquisition, d'exploiter les données prélevées.

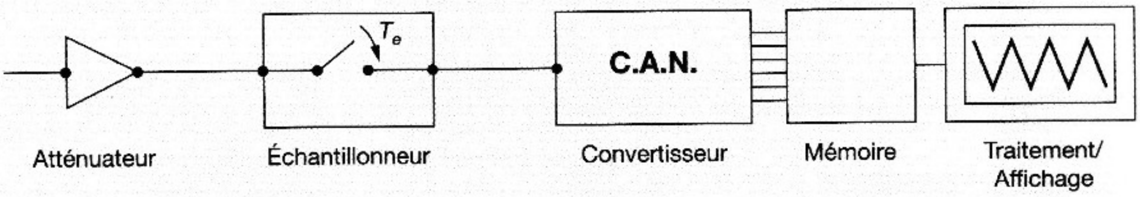


Figure 28

La notice précise que, pour une bonne gestion de la capacité mémoire, le taux N_e est ajusté en fonction du calibre sélectionné. En supposant qu'un échantillon occupe 2 octets dans la mémoire tampon de capacité 256 ko, quel taux N_e maximal permettrait d'observer 10 périodes d'un signal de fréquence 10 kHz ? On restreint la cadence à 100 Méch.s^{-1}, combien un balayage occupe-t-il de capacité mémoire ? Combien cela représente-t-il de points par période ?

2. Résolution

Le choix du convertisseur est également important, il conditionne fortement le prix de l'appareil.

a) Justifier et commenter les valeurs portées dans le tableau suivant (p.p.m. signifie *partie par million*, soit 10^{-6}).

Nombre de bits	8	12	16
Nombre de niveaux	256	4 096	65 536
Plus petite variation détectable	0,4 %	244 p.p.m.	15 p.p.m.

b) L'utilisateur veut pouvoir examiner des signaux dont l'amplitude va de quelques dixièmes de millivolts à 240 V (utilisations en électricité domestique). Doit-il chercher un convertisseur couvrant cette gamme ?

c) Le conseil qui lui est donné est d'utiliser un atténuateur externe par un facteur 1/10 dans les applications domestiques et, sinon, d'ajuster le calibre à l'amplitude des signaux examinés. Justifier ces conseils en distinguant une application de dépannage d'un appareil électroménager et celle qui concerne des tests sur du matériel informatique.

Exercice 3 : Multiplexage temporel de signaux téléphoniques

Un des systèmes de transmission téléphonique utilisé (système M.I.C. pour modulation d'impulsions et codage) permet la transmission simultanée de 30 communications sur la même ligne.

a) Pour ce faire, chaque signal est tout d'abord numérisé. Justifier le choix de la cadence de 8 000 échantillons par seconde, sachant que la bande fréquentielle est limitée à [300Hz, 3 400Hz].

Afin d'assurer la transmission simultanée de 30 voix, le signal est organisé en trames de 32 intervalles de temps (I.T.), chaque communication se voyant assigner un I.T. par trame (Fig. 29). Les deux I.T. restants servent à la gestion du réseau.

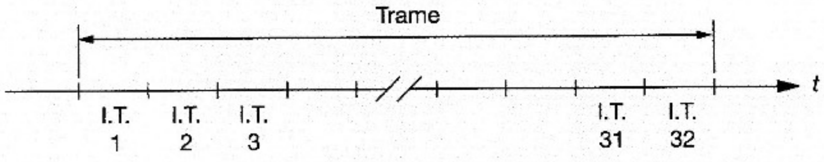


Figure 29

b) Quelle est la durée d'une trame ? En déduire le débit d'échantillons par seconde, toutes communications confondues.

Chaque signal vocal est numérisé sur 8 bits selon une loi non linéaire (on parle de compression).

c) Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.

d) La loi de compression distribue les niveaux de quantification de manière non équidistante, le quantum étant plus faible pour les faibles valeurs de signal. Quel en est l'intérêt, sachant que les signaux vocaux varient dans une large gamme d'amplitude ?

Exercice 4 : Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e. La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de $f_e = 44100\,\text{Hz}$, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1. Quelle est la gamme de fréquence audible ? Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ? La fréquence $f_e = 44100\,\text{Hz}$ est-elle compatible ?

2. On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence $f_1 = 43000\,\text{Hz}$ est présent lors du concert.

a) Ce son est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?

b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur peut résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.

c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un suréchantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.

3. On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.

a) Sachant que l'enregistrement s'effectue à $f_e = 44100\,\text{Hz}$ sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc 2 sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?

b) Quelle durée de concert peut-on enregistrer sur le CD de 700 Mo ? On rappelle que 1 octet vaut 8 bits.

c) Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois, et enlève les signaux peu audibles. Le taux de compression peut aller de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?

Exercice 5 : Erreur de quantification et bruit

Du fait de la numérisation d'un signal par un convertisseur à loi linéaire, une erreur d'arrondi est commise sur chaque échantillon.

a) En notant q le pas de quantification, préciser dans quel intervalle l'erreur d'arrondi ε prend sa valeur.

b) Lors d'un essai du convertisseur avec un signal triangulaire, quelle est l'évolution temporelle de $\varepsilon(t)$ (on raisonnera sur une portion croissante de l'entrée) ?

c) En raisonnant sur une période $\varepsilon(t)$, quelle valeur moyenne peut-on lui attribuer ? Quelle moyenne quadratique ? Quelle valeur efficace ε_{eff} ?

Application numérique : comparer ε_{eff} et la dynamique Δs pour un convertisseur linéaire 8 bits ou 12 bits.

Exercice 6 : Justification du critère de Shannon

On reprend la modélisation de l'échantillonnage d'un signal analogique $s(t)$, vu comme le résultat de la multiplication par un signal $p(t)$ formé d'impulsions périodiques de période T_e. On rappelle que le signal formé d'impulsions de hauteur 1, de période T_e et de largeur τ (Fig. 33) présente un spectre constitué de raies d'amplitudes :

$$P_n = \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi},$$

où α désigne le rapport cyclique : nombre sans dimension $\alpha = \frac{\tau}{T_e}$ compris entre 0 et 1 (Fig. 34).

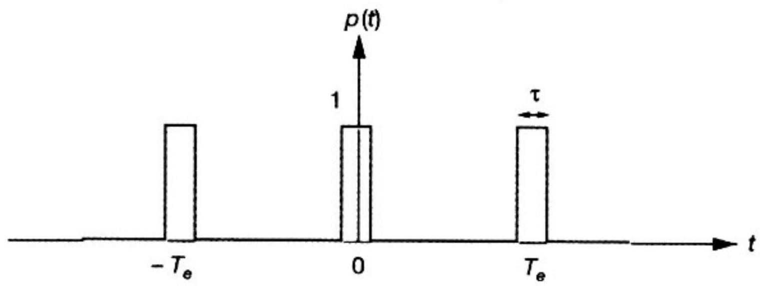


Figure 33

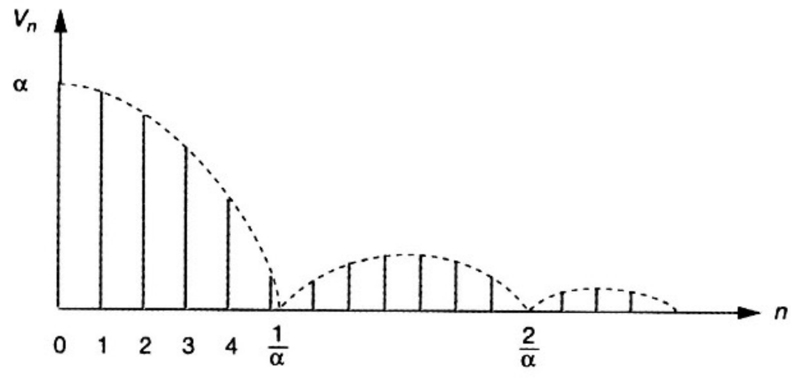


Figure 34

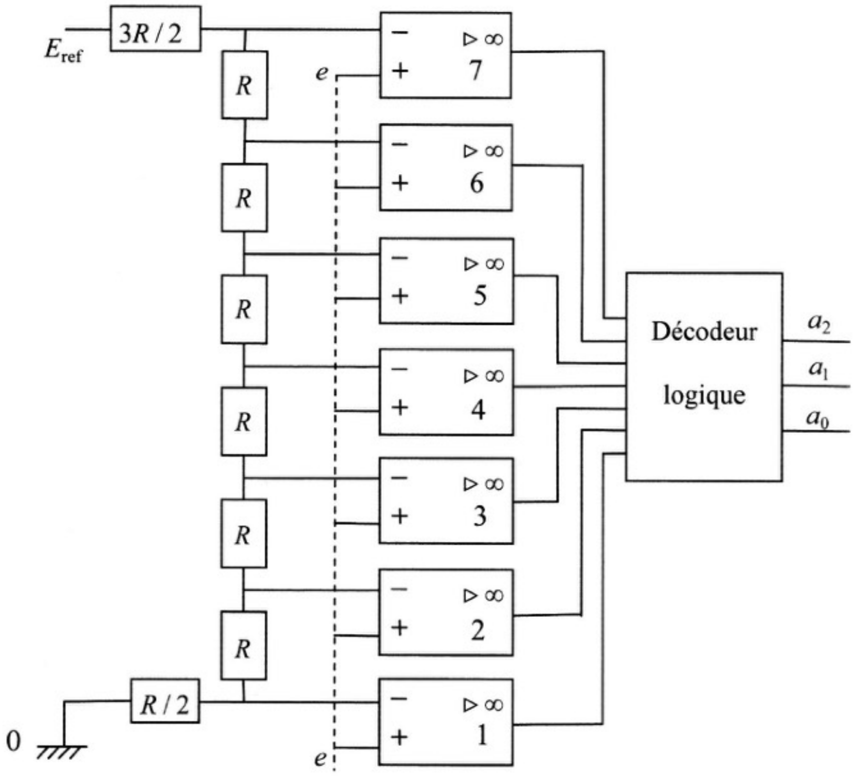
a) À quelles fréquences se situent les raies spectrales de $p(t)$?

b) Quelle valeur de rapport cyclique correspondrait à une prise d'échantillon instantanée ? On retient dans la suite une durée $\tau \ll T_e$ mais non nulle.

c) Dans le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence f strictement inférieure à $\frac{F_e}{2}$, préciser quelles raies contient le spectre du signal échantillonné grâce à $p(t)$ (on classera ces raies par ordre croissant de fréquence). Qu'advient-il si f atteint voire dépasse $\frac{F_e}{2}$? Retrouver le critère de Shannon traduisant la possibilité de reconstituer le signal initial par simple filtrage passe-bas.

d) Lorsque le signal $s(t)$ n'est plus sinusoïdal mais se présente comme une somme finie de composantes sinusoïdales de fréquences bornées par F_{max}, que deviennent les résultats précédents ?

Exercice 7 : CAN parallèle sur 3 bits



Une tension analogique e pouvant varier de 0 à 7V est convertie en signal numérique sur 3 bits $a_2a_1a_0$. Pour cela, on réalise le CAN parallèle (ou flash) 3 bits représenté ci-dessous. 7 ALI supposés idéaux sont placés en parallèle. La tension d'entrée e est envoyée sur les bornes V^+ des 7 ALI. Un réseau de résistances montées en série est alimenté par une tension de référence $E_{ref} = 8\,V$.

1. Les ALI fonctionnent-ils en régime linéaire ou saturé ? Quelle fonction remplit chacun des ALI ?
2. Considérons l'ALI 1. Que vaut la tension d'entrée V_1^+ ? Que vaut la tension d'entrée V_1^- ? En déduire la tension de sortie V_{s1} de l'ALI 1 en fonction de la valeur de e.
3. Mêmes questions pour les ALI 2 à 7 : exprimer les seuils de basculement de chaque ALI. Décrire le comportement des sorties des ALI si l'on augmente progressivement la tension e de 0V à 7V.
4. En déduire l'état de sortie des différents ALI pour les différentes valeurs de e reportés dans le tableau ci-dessous. On notera 1 si l'ALI est saturé (+) et 0 si l'ALI est saturé (–), et dans l'ordre ALI7-ALI6-ALI5-ALI4-ALI3-ALI2-ALI1. Par exemple, si les ALI 7 à 3 sont saturés $-V_{sat}$ et les ALI 2 et 1 sont saturés $+V_{sat}$, on note : 0000011. Compléter la 2^e^ ligne du tableau ci-après.
5. Le code obtenu est-il le code binaire correspondant à la conversion en base 2 de la tension analogique d'entrée ? Justifier l'utilisation d'un décodeur logique. De quoi est constitué un tel décodeur numérique ? Compléter alors la 3^e^ ligne du tableau, donnant le code binaire souhaité en sortie du décodeur numérique.

e (V)	0	1	2	3	4	5	6	7
Sortie des ALI	0000000	0000001						
Code 3bits $a_2a_1a_0$	000	001						

6. La quantification du signal sonore en vue d'un enregistrement sur un CD audio s'effectue sur 16 bits. À combien de niveaux analogiques différents cela correspond-il ? Combien d'ALI nécessiterait un CAN parallèle 16 bits ? Commenter.

Le pas de quantification et la précision d'un CAN dépendent du nombre de bits en sortie, appelé **résolution**. Pour un CAN à N bits, le nombre d'états possibles en sortie est 2^N, ce qui permet d'exprimer des signaux numériques de 0 à 2^N-1 en code binaire naturel.

Un CAN est caractérisé également par la plage de variation acceptable de la tension analogique d'entrée, appelée **Pleine Echelle** (FS pour *Full Scale* en anglais) et que nous noterons V_{PE}.

La pleine échelle est divisée en autant de plages d'égale dimension (cas de la quantification uniforme) qu'il y a d'états possibles de la sortie numérique. Chaque plage est associée à un code numérique représentant la tension analogique d'entrée.

La figure II.6 représente la caractéristique de transfert idéale (sans défaut) en escalier d'un CAN à 3 bits.

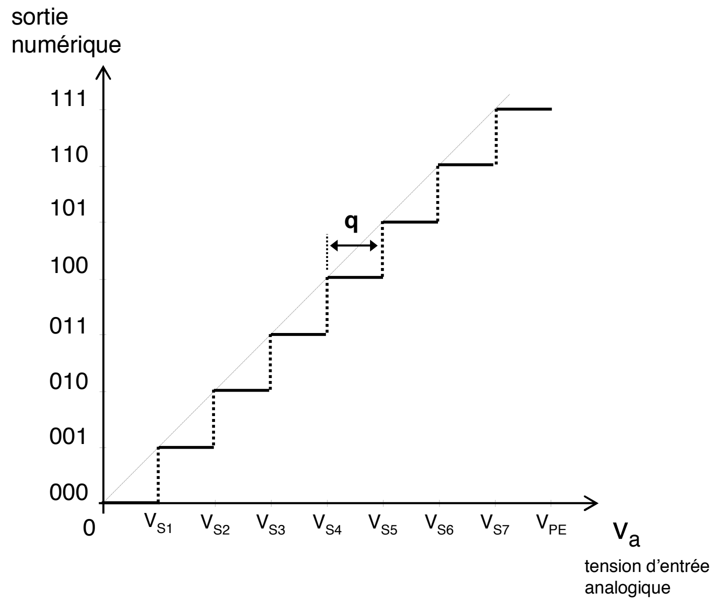


Fig. II.6 – Caractéristique de transfert idéale d'un CAN à quantification linéaire par défaut.

On définit le **quantum**, ou **LSB** (pour *Least Significant Bit*, le bit de poids faible) comme étant la dimension de ces plages. On le note q et l'obtient par :

7 - Que vaut q pour ce CAN parallèle pour une plage d'entrée analogique 0-5V ? Et s'il s'agissait d'un CAN 16 bits ?

8 - L'erreur e(Va) de quantification (ou de codage) est la différence entre Va et la tension image codée sur N=3 bits. Ecrire son expression littérale et représenter e(va).
Représenter l'allure de e(t) :

a- pour une rampe pleine échelle

b- pour une sinusoïde (avec composante continue) emplissant la pleine échelle

Les valeurs efficaces de e(t) sont elles a priori les mêmes ? En particulier pour un CAN 3 bits ?

Montrer que pour la rampe on obtient la valeur $\dfrac{q}{\sqrt{3}}$

9 - On peut réduire à $\frac{q}{\sqrt{12}}$ l'erreur efficace de quantification en décalant d'un demi quantum les tensions seuils :

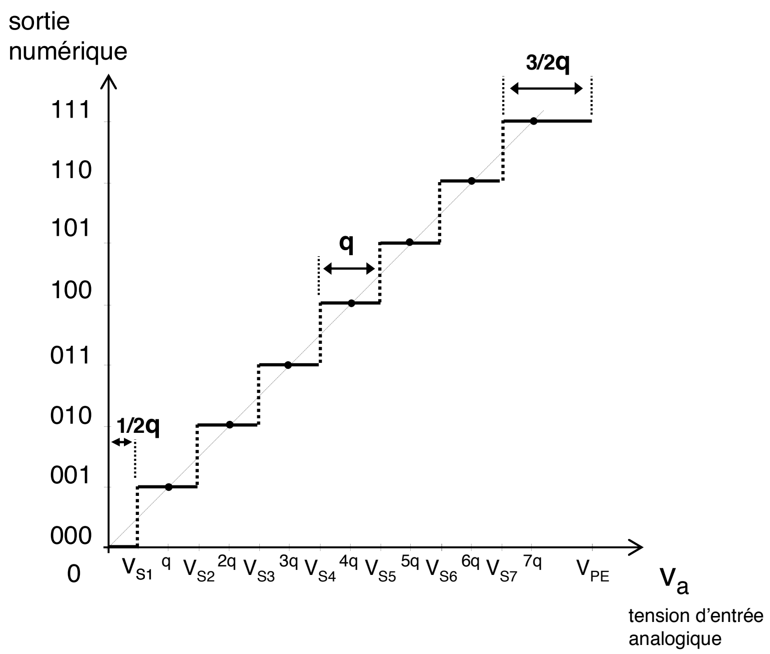


Fig. II.8 – Caractéristique de transfert d'un CAN à quantification linéaire centrée.

On peut alors parler d'erreur efficace d'arrondi et elle se distribue ainsi pour une rampe

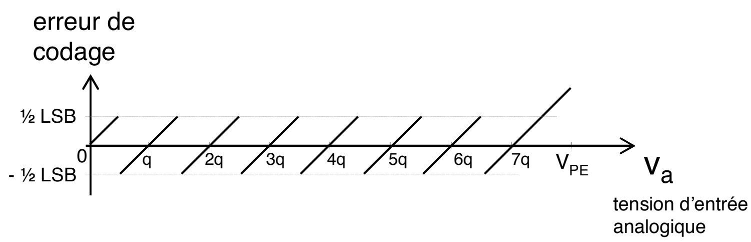


Fig. II.9 – Erreur de codage de la quantification linéaire centrée.

Le **rapport signal sur bruit** (**SNR** pour Signal to Noise Ratio) d'un CAN idéal est définit pour une entrée sinusoïdale pleine échelle, c'est le quotient entre la valeur efficace du signal $V_{eff,\ sinus}$ et celle du bruit $V_{eff,\ bruit}$ (s'agissant d'un CAN idéal le bruit se réduit au bruit de quantification) :

$$SNR = \frac{V_{eff,sinus}}{V_{eff,bruit}}$$

- Que vaut $V_{eff,sin}$ si on considère la sinusoïde analogique pleine échelle du 8b ?
- Pour N≥6, on peut utiliser (même pour une sinusoïde) l'erreur efficace d'arrondi précédente. Que vaut alors en fonction de N le SNR maximal dû au « bruit de quantification » ?
- Validez alors l'affirmation suivante :

  Le SNR d'un CAN augmente avec sa résolution (gain de 6 dB par bit supplémentaire).

Exercice 8 : Filtre numérique à moyenne glissante : réjection de mode commun

L'objectif de ce problème est de réaliser un filtre numérique, et de comparer ses propriétés avec le filtre analogique analogue.

Pour cela, on réalise un filtre à moyenne glissante. Un signal d'entrée $e(t)$ analogique est échantillonné à la fréquence $f_e = 1000\,\text{Hz}$. On appelle e_k la valeur de l'échantillon n°k : $e_k = e(t = kT_e)$ avec $T_e = 1/f_e$ la période d'échantillonnage du CAN.

Commençons par étudier un filtre à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons dont le signal de sortie s_k est la moyenne des 4 derniers échantillons de e : $s_k = \left(e_k + e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}\right)/4$.

1. On applique un échelon de tension unitaire en entrée : $e(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $e(t) = 1$ pour $t \ge 0$. Donner les valeurs de s_k obtenues et les représenter graphiquement. En déduire le type de filtre obtenu ainsi que la valeur du gain $G = |H|$ dans sa bande passante. Ce résultat était-il prévisible ?

2. Afin de tracer la courbe de gain $G(f)$ en fonction de la fréquence, on place en entrée un signal sinusoïdal de la forme $e(t) = 1\cos(2\pi f t)$ (en volt). On teste successivement les fréquences $f = \frac{f_e}{4}, \frac{f_e}{3}, \frac{f_e}{2}, \frac{2f_e}{3}, \frac{3f_e}{4}$ et f_e.

a) Pour chaque fréquence, remplir un tableau avec les valeurs de e_k pour $0 \le k \le 8$ et les valeurs de s_k correspondantes. En déduire l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie ainsi que le gain pour chacune des fréquences testées. Reporter ces valeurs sur un diagramme du gain en fonction de la fréquence.

b) Le filtrage des hautes fréquences est-il progressif comme un passe-bas analogique ? Y a-t-il des fréquences rejetées (complètement coupées) ?

c) La fréquence f_e est-elle filtrée comme devrait le faire un passe-bas ? Expliquer en quoi ce résultat était prévisible compte tenu de l'échantillonnage. Quelle précaution prend-on en amont de l'échantillonnage pour éviter ce problème ?

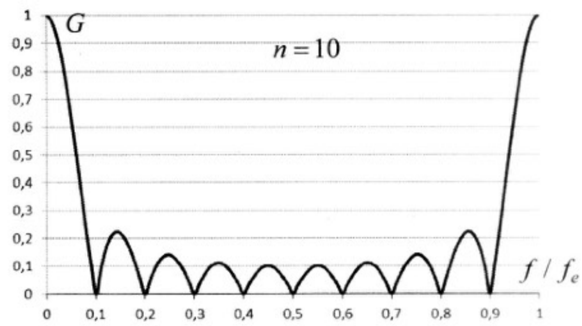
3. Pour affiner le tracé du diagramme de gain, on effectue à l'aide d'une feuille de calcul les mêmes calculs que dans la question précédente pour diverses fréquences. Le tableau reporté ci-dessous a été effectué à l'aide d'une feuille Excel pour différentes fréquences f et différents k. La formule entrée pour chaque case est :

$$s_k = \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot k/1000) + \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot(k-1)/1000)$$
$$+\cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot(k-2)/1000) + \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot(k-3)/1000)$$

	k=0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
f=100	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00	-0,45	-0,73	-0,73	-0,45	0,00	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00
200	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25
300	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00	-0,17	0,11	0,11	-0,17	0,00	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00
400	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25

Compléter le diagramme du gain et en déduire son allure.
Estimer la fréquence de coupure à -3dB de ce filtre.

4. Afin de voir si l'on peut généraliser les résultats précédents, le même travail a été effectué avec une moyenne glissante sur $n = 10$ échantillons. Le tracé du gain est reproduit ci-contre. Estimer à nouveau la fréquence de coupure à -3dB. Le filtre semble-t-il plus efficace si l'on augmente n ? Expliquer le repliement de G observé. Vérifier par lecture de diagramme que les fréquences rejetées sont les multiples de $(f_e/10)$.



On admettra que ce résultat se généralise, et que les fréquences rejetées pour une moyenne glissante à n échantillons sont les fréquences multiples de (f_e/n), à l'exception de f_e.

5. Application.
La présence du secteur électrique à 50 Hz provoque un « ronflement » (parasitage des signaux électriques à 50 Hz, mais aussi aux multiples de 50 Hz). Montrer qu'un filtre numérique passe-bas à moyenne mobile peut résoudre ce problème à condition de bien choisir la fréquence d'échantillonnage. Ce filtre est appelé filtre réjection de mode commun (élimination du bruit du secteur).