

Exercice ③ : Lignes de Champ.

① Champ électrostatique $\vec{E}$

A. 1] Détermination de charges inconnues.

Des lignes de champs ne peuvent se croiser qu'en des points singuliers : - charge ponctuelle $\rightarrow$ champ infini.
| - pt de champ nul $\vec{E} = \vec{0}$

Il ne peut y avoir de charge en 1 pt que si les lignes de champ partent toutes de celle-ci (auquel cas la charge est positive) ou si les lignes de champ arrivent toutes à celle-ci (auquel cas la charge est négative).

$\Rightarrow q_A < 0$, $q_D > 0$, $q_B > 0$ et $q_C = 0$! pas de charge mais 1 point de Champ nul.

Trois charges sont donc à déterminer

... ou plutôt les rapports entre elles car nous n'avons pas accès aux charges (seulement à 1 coefficient multiplicatif près). En effet, si toutes les charges sont multipliées par 1 m facteur k , les lignes de champ seront inchangées.

Nous devons obtenir deux équations scalaires.

L'observation de la distribution à longue distance fait apparaître un comportement dipolaire caractéristique d'une distribution de charge nulle au total.

On aura donc : $q_A + q_B + q_D = 0$ (1)

Le champ $\vec{E}(C) = \vec{0}$ nous donnerait deux équations scalaires indépendantes par projection sur deux axes perpendiculaires. Il suffira d'en exploiter une seule compte tenu de la relation (1).

les coordonnées des pts singuliers sont:

$$A(24a, 75a)$$

$$B(0,0)$$

$$C(24a, -8a)$$

$$D(75a, 0)$$

On confirme que $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ sont perpendiculaires:

$$\vec{AC} \begin{vmatrix} 0 \\ -83a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{BD} \begin{vmatrix} 75a \\ 0 \end{vmatrix} \quad / \quad (\vec{i}, \vec{j})$$

la projection du $\vec{E}(c)$ dans la direction $\vec{BD}$ donnera une équation scalaire ne faisant pas intervenir q_A qui crée un champ $\vec{E}_A(c)$ dans la direction $\vec{AC} \perp$.

On doit donc écrire:

$$0 = (\vec{E}_B(c) + \vec{E}_D(c)) \cdot \vec{BD}$$

$$0 = \left(\frac{q_B \vec{BC}}{4\pi\epsilon_0 BC^3} + \frac{q_D \vec{DC}}{4\pi\epsilon_0 DC^3} \right) \cdot \vec{BD}$$

$$\vec{BC} \begin{vmatrix} 24a \\ -8a \end{vmatrix}$$

$$BC^2 = (576 + 64)a^2 = 640a^2$$

$$BC^3 = 16191a^3$$

$$\vec{DC} \begin{vmatrix} -51a \\ -8a \end{vmatrix}$$

$$DC^2 = (2601 + 64)a^2 = 2665a^2$$

$$DC^3 = 137577a^3$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BD} = \begin{vmatrix} 24a \\ -8a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 75a \\ 0 \end{vmatrix} = 24 \times 75 a^2 = 1800 a^2$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{BD} = \begin{vmatrix} -51a \\ -8a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 75a \\ 0 \end{vmatrix} = -(51 \cdot 75) a^2 = -3825 a^2$$

On obtient donc : $0 = q_B \times \frac{1800 a^2}{16191 a^3} + q_D \times \frac{-3825 a^2}{137577 a^3}$

$$\Rightarrow \frac{q_D}{q_B} = \frac{137577 \times 1800}{16191 \times 3825} = \underline{\underline{4}}$$

En notant

$$\begin{cases} q_B = +q \\ q_D = +4q \\ \text{et } q_A = -5q \end{cases}$$

A2 - Equations de lignes de champ et d'équipotentielles

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{p} \right]$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{r} \begin{vmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{vmatrix} / \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$$

$$\vec{p} = qa \vec{e}_z$$

$$\text{or } \vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta \quad \text{donc } \vec{p} \begin{vmatrix} qa \cos\theta \\ -qa \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} / \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qa r \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Aussi l'équation d'une surface équipotentielle est :

$$\Rightarrow V = \text{cte} \quad (\text{dans 1 plan contenant l'axe donc})$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{r^2} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow r = r_0 \sqrt{|\cos\theta|}$$

(ce qui se traduit évidemment l'éq de la ligne équipotentielle dans 1 plan de θ qq contenant l'axe Oz $\Rightarrow$ on obtient la surface par symétrie de révolution cylindrique autour de l'axe Oz).

Pour la ligne de champ : $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$
 $\hookrightarrow$ élément de ligne de champ.

$$\vec{E} \begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2qa \cos\theta) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (qa \sin\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow d\varphi = 0 \rightarrow$ appartenance à 1 plan $\varphi = \text{cte}$.

$$\Rightarrow 2 \cos\theta r d\theta = \sin\theta dr$$

$$2 \frac{d\theta}{\tan\theta} = \frac{dr}{r} \quad \text{ou} \quad 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} - \frac{dr}{r} = 0$$

$$\text{soit } 2 \frac{d \sin\theta}{\sin\theta} - \frac{dr}{r} = 0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{r} = \text{cte} \Rightarrow \underline{r = r_0 \sin^2\theta}$$

$\downarrow$
distance de traversée
de l'équateur par la ligne de
champ.

B) Champ magnétostatique créé par 3 fils ∞ parallèles.

1°) Intersection de lignes de champ $\vec{B}$ en A $\Rightarrow$ IMPOSSIBLE

Il s'agit nécessairement d'1 pt de champ $\vec{B}(A) = \vec{0}$.

2°) le Plan passant par P et A et // aux 3 fils $\rightarrow$

est 1 plan d'anti-symétrie pour le champ $\vec{B}$

donc 1 plan de symétrie pour les distributions de courant.

$$\Rightarrow I_1 = I_2 \quad (\text{m^{e} intensité et m^{e} sens de parcours du fil})$$

3°) le flux de $\vec{B}$ se conserve le long d'1 tube de champ.

En considérant la largeur du tube suffisamment faible, on peut considérer le champ uniforme sur la section droite passant par M et idem pour P. L'égalité de flux donne :

$$B(M) \times S(M) = B(P) \times S(P) \quad \text{soit en notant } l \text{ la "longueur" et } h \text{ la hauteur : } B(M) \times e(M) \times h = B(P) \times e(P) \times h$$

$$\text{Ainsi on a "à peu près" : } B(P) \simeq 2 \times B(M) = 0,02 \text{ T}.$$

EXERCICE (10)

1°) $\vec{E}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

2°) d'après 2.1) : $\oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

2.2) $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{int} = q.$
 $\varphi=0 \quad \theta=0$

3°) 3.1) Extérieur de la boule ($r > R$) : $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ (avec $Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$)
 (démontré en cours).

Intérieur de la boule ($r < R$) : $\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$
 $\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 R^3} \times \frac{4\pi}{3} r^3 \vec{u}_r$
 $\vec{E}(r) = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$
 (continuité de $\vec{E}$ en $r=R$).

3.2) $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r$ dans notre cas particulier sphérique isotrope.

3.3) - pour $R < r < \infty$: $-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
 (potentiel choisi nul à $+\infty$)

- pour $0 < r < R$: $-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

en intégrant entre r et R (et par continuité du potentiel en R)

$V(r) - \underbrace{V(R)}_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right]$

$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$

(notation $U(r)$ de l'énergie mécanique).

4°) 4.1) $E_1(r)$ = énergie d'interaction électrique entre la boule et une charge ponctuelle $+q$.

$E_1(r) = +qV(r)$

4.2) $\left| \begin{array}{ll} 0 < r < R & E_1(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right] \\ R < r < +\infty & E_1(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right.$

(risque de confusion de notation entre énergie et charge)

5.1) En électrostatique: $\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ ^{← énergie!} champ!

écrivons les énergies sous cette forme: $\mathcal{E}$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} \right)_M = \frac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$$

5.2) L'énergie propre de la boule peut alors être calculée comme l'énergie du champ qu'elle crée dans tout l'espace (pas seulement son propre volume) soit.

$$\mathcal{E}_2 = \iiint_{\text{H'espace}} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} \right) d\tau = \iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\epsilon_0}{2} \times 4\pi \times \int_{r=0}^{\infty} r^2 \underbrace{E(r)^2}_{\text{champ } E} dr$$

$$\mathcal{E}_2 = \epsilon_0 \times 2\pi \times \frac{2}{2} \times \left[\int_0^R r^2 \frac{Q^2 r^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^6} dr + \int_R^{\infty} r^2 \times \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} dr \right]$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \left[\frac{R^5}{5R^6} + \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right]$$

(Remarque: 5x plus d'énergie due au champ à l'extérieur de la boule qu'à l'intérieur de la boule.)

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{5} \right] \text{ " } k.$$

Complément: Et si on ne connaissait pas l'expression de la densité volumique d'énergie? (Ce qui était votre cas?) Comment calculer l'énergie potentielle de cette boule chargée?

On décrit la formation progressive de la boule de la façon suivante:



← on rajoute des couches sphériques de charge, d'épaisseur dR que l'on ramène de l' ∞ .

Calculons l'énergie potentielle infinitésimale pour augmenter de dR une sphère chargée de rayon R .

Il faut "rapatrier" depuis l'infini cette couche de volume $4\pi R^2 dR$ et la lâcher au potentiel qui règne à R du centre de la boule $V(R) = \frac{\rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}$

L'énergie potentielle supplémentaire qu'a acquise la boule est donc: $dE_2 = \rho_0 \times 4\pi R^2 dR \times \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}$

Appelons R_{final} le rayon de la boule

$$E_2(R_{\text{final}}) = \int_0^{R_{\text{final}}} dE_2 = \frac{\rho_0^2 4\pi}{3\epsilon_0} \int_0^{R_{\text{final}}} R^4 dR$$

$$E_2(R_{\text{final}}) = \frac{\rho_0^2 4\pi}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_{\text{final}}^5}{5} \right) \text{ avec } Q_{\text{final}} = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R_{\text{final}}^3$$

$$\text{donc } E_2(R_{\text{final}}) = \frac{9 Q_{\text{final}}^2}{(4\pi)^2 R_{\text{final}}} \times \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \times \frac{R_{\text{final}}^5}{5}$$

$$E_2(R_{\text{final}}) = \left[\frac{3}{5} \right] \frac{Q_{\text{final}}^2}{4\pi\epsilon_0 R_{\text{final}}} \text{ donc } k_2 = \frac{3}{5} !$$

$$6^\circ) \quad 6.1) \quad \vec{g}(A) \equiv \frac{\vec{F}(A)}{m_A} \text{ avec } \vec{F}(A) = -\gamma \frac{m_A m}{r^2} \vec{ur}$$

$$\Rightarrow \vec{g}(A) = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{ur}$$

$$6.2) \quad \begin{cases} q \Leftrightarrow m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow -\gamma \quad (\text{ou } \frac{1}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -4\pi\gamma) \\ \vec{E} \Leftrightarrow \vec{g} \end{cases}$$

6.3) Par analogie et grâce aux calculs du 3.1)

$$\begin{array}{l|l} \infty > r > R & \vec{g}(r) = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{ur} \\ R > r > 0 & \vec{g}(r) = -\gamma \frac{M r}{R^3} \vec{ur} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{continuité} \\ \text{en } R \end{array} \right.$$

6.4] Applications numériques:

$$g_{ST} = \frac{G M_S}{d_{TS}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2}$$

$$g_{ST} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2} \quad (\text{à comparer sur terre } g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2})$$

$$g_{TS} = \frac{G M_T}{d_{TS}^2} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-2} !$$

6.5] Énergie d'interaction équivalente à celle entre deux masses ponctuelles:

$$\mathcal{E}_{2i} = - \frac{G M_T M_S}{d_{TS}}$$

(on peut écrire "par analogie avec l'électrostatique".

$$\mathcal{E}_{2i} = M_T \times \left(- \frac{G M_S}{d_{TS}} \right) \quad (\Leftrightarrow q V(M))$$

potentiel de gravitation
créé par le soleil S
au point T.

$$\left(V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Leftrightarrow \phi(M) = \frac{-G M_S}{r} \right)$$

6.6] Application numérique:

$$\mathcal{E}_{2i} = - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \times 2 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2}$$

$$\mathcal{E}_{2i} = - 53 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

6.7] Toujours par analogie (avec le résultat de 5.2)

$$\text{et 6.8] } \mathcal{E}_{2S} = \frac{-G M_S^2}{R_S} \times \frac{3}{5} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \times (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \times \frac{3}{5}$$

$$\mathcal{E}_{2T} = \frac{-G M_T^2}{R_T} \times \frac{3}{5} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \times (6 \cdot 10^{24})^2}{64 \cdot 10^6} \times \frac{3}{5}$$

$$\mathcal{E}_{2S} = - 23 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_{2T} = - 22 \cdot 10^{31} \text{ J}$$

L'énergie du système est due à l'énergie propre du soleil