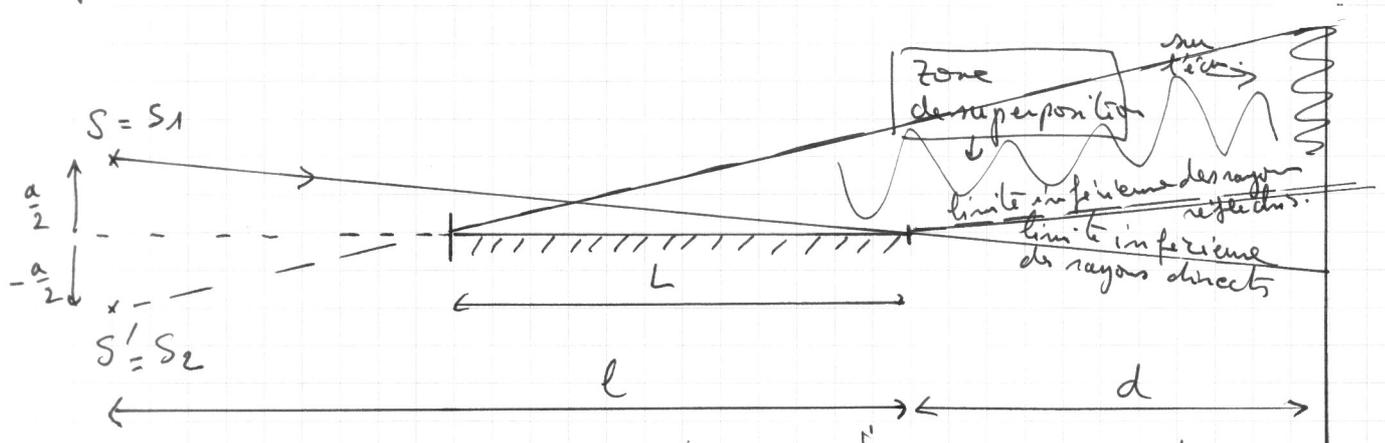


Exercice (9) : Miroir de Lloyd.

1°) Des interférences sont envisageables si la source est dupliquée de telle façon qu'il existe une zone de superposition après traversée de systèmes optiques \neq occasionnant une différence de marche. Ici c'est l'image de S dans le miroir plan qui donne donc S' d'où semblent provenir les rayons ayant en fait été réfléchis par le miroir. Ils se superposent sur l'écran avec des rayons directs (provenant de S). Tout se passe donc comme si on disposait de deux sources ponctuelles séparées de a (comme les trous d'Young) $S \rightarrow S_1$ et $S' \rightarrow S_2$.

Il s'agit d'un dispositif à division de front d'onde puisque le miroir intercepte tout un angle solide correspondant à des rayons qui auraient poursuivis leur course vers le bas de l'écran ($x < 0$) alors que les rayons directs correspondent à un front moins incliné vers le bas ou incliné vers la partie supérieure de l'écran. Les morceaux de front d'onde se superposant sont donc \neq .

Représentation du champ d'interférence (zone de superposition) :



3°) Par analogie avec les trous d'Young et à "longue distance" :

$$\delta(M) = \delta(x) = \frac{ax}{l+d}$$

$$\Delta\psi(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda_0(l+d)}$$

Sources primaire et secondaire cohérentes et isochromes par duplication et en phase (donc synchro)

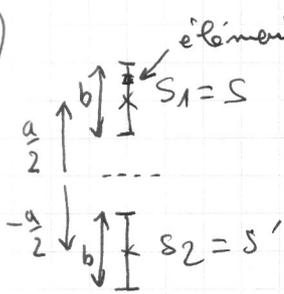
4°) Par application de la formule de FRESNEL des interférences à deux ondes de même éclairement E_0 (même puissance lumineuse envoyée par unité d'angle solide pour les rayons directs ou réfléchis).

$$E(x) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)} \right) \right)$$

Franges rectilignes horizontales car l'éclairement est indépendant de y et évolue périodiquement avec x avec une périodicité spatiale de $\frac{\lambda_0(l+d)}{a} = i$ interférence.

On peut remplacer la source ponctuelle par une fente fine qui ne pourra être étendue que dans la direction y pour que la superposition des éclairissements, produits par chaque élément de surface de la fente (a priori incohérent avec son voisin) coïncident sur l'écran (les figures d'interférence de chaque élément de la source "glissent" les unes sur les autres lors d'un déplacement sur y).

5°)



élément de source minuscule $(\frac{a}{2} + X)$ et $(\frac{a}{2} + X + dX)$. (X variant de $-\frac{b}{2}$ à $+\frac{b}{2}$)

Si E_0 est l'éclairement uniforme sur l'écran issu de la totalité de la fente de largeur b , on considèrera l'uniformité de la puissance lumineuse pour considérer que cette "tranche" infinitésimale enverra $dE_0 = E_0 dX$ sur l'écran en l'absence d'interférence.

Ainsi le calcul d'éclairement est basé sur la somme des éclairissements produits sur l'écran par l'infinité de "bandelettes" de fente (puisqu'elles sont incohérentes entre elles). (Elles sont seulement cohérentes avec leur symétrique dans le miroir).

Donc la formule d'interférences pour 1 "bandelette" de largeur dx s'écrit:

$$dE(x, x) = 2dE_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi(a+2X)x}{\lambda_0(l+d)} \right) \right)$$

qu'il faut "sommer" (intégrer sur toute la largeur de la fente)

$$E(x) = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{x=+\frac{b}{2}} 2 \frac{E_0 dx}{b} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi(a+2X)x}{\lambda_0(l+d)} \right) \right)$$

Ainsi: $E(x) = 2E_0 + \frac{2E_0}{b} \int_{x=-\frac{b}{2}}^{x=+\frac{b}{2}} \cos\left(\frac{2\pi(a+2x)x}{\lambda_0(l+d)}\right) dx$

$$E(x) = 2E_0 \left[1 + \frac{1}{b} \left[\frac{\lambda_0(l+d)}{4\pi x} \sin\left(\frac{2\pi(a+2x)x}{\lambda_0(l+d)}\right) \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \right]$$

$$E(x) = 2E_0 \left[1 + \frac{\lambda_0(l+d)}{4b\pi x} \left(\sin\left(\frac{2\pi(a+b)x}{\lambda_0(l+d)}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(a-b)x}{\lambda_0(l+d)}\right) \right) \right]$$

soit avec: $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

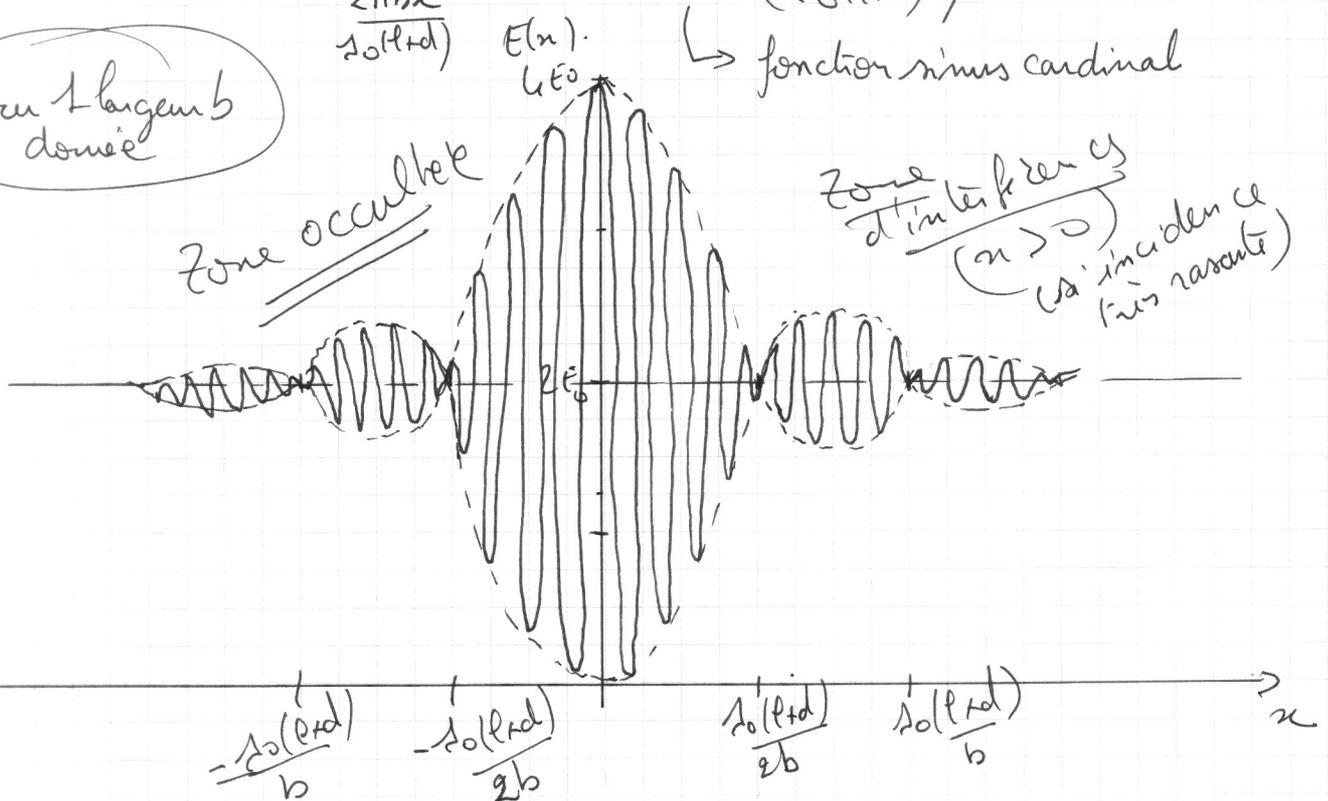
$$E(x) = 2E_0 \left[1 + \underbrace{\frac{\lambda_0(l+d)}{2\pi b x} \sin\left(\frac{2\pi b x}{\lambda_0(l+d)}\right)}_{\equiv V(x)} \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)}\right) \right]$$

↳ facteur de visibilité de la figure d'interférence.

$$V(x) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi b x}{\lambda_0(l+d)}\right)}{\frac{2\pi b x}{\lambda_0(l+d)}} = \text{sinc}\left(\frac{2\pi b x}{\lambda_0(l+d)}\right)$$

↳ fonction sinus cardinal

Pour 1 largeur b donnée



Reqs

1 - \oplus b est faible plus le contraste reste uniforme et proche de 100% largement sur la zone de superposition.

2 - L'interfrange vaut toujours: $\frac{\lambda_0(l+d)}{2b} = i$

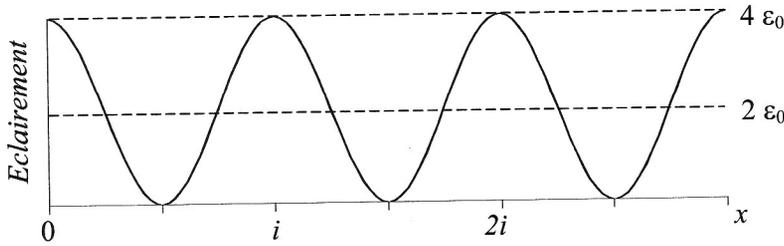
A l'intérieur de la demi première zone "contrastée" d'interférence il ya:

$$\frac{\frac{\lambda_0(l+d)}{2b}}{\frac{\lambda_0(l+d)}{a}} = \left[\frac{a}{2b} \text{ franges} \right]$$

Exercice 10.9

1. L'objectif d'une lunette astronomique est une lentille convergente, celui d'un télescope est un miroir sphérique (ce dernier a en particulier l'avantage de ne pas donner d'aberrations chromatiques). Dans les deux cas l'objectif permet d'obtenir, d'un objet situé à l'infini, une image réelle projetée dans son plan focal image (observée par un oculaire ou une caméra).
2. L'image d'un point à l'infini sur l'axe optique se forme au point focal image, situé à la distance focale f de l'objectif.
3. Il s'agit de franges d'interférences dues à la superposition des faisceaux lumineux issus des deux trous. Comme pour les trous d'Young, on obtient des franges rectilignes équidistantes, de direction perpendiculaire à l'axe (Ox) des deux trous, donc parallèles à (Oy). L'éclairement dans le plan image est $\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos(2\pi\delta/\lambda_0) \right]$, où ε_0 est l'intensité que donnerait un seul des deux trous et $\delta = ax/f$ la différence de marche.

Ceci se réécrit $\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f}\right) \right] = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{x}{i}\right) \right]$ en faisant apparaître l'interfrange $i = \lambda_0 f/a$. Si la distance a entre les trous augmente, l'interfrange i diminue : les franges se resserrent.

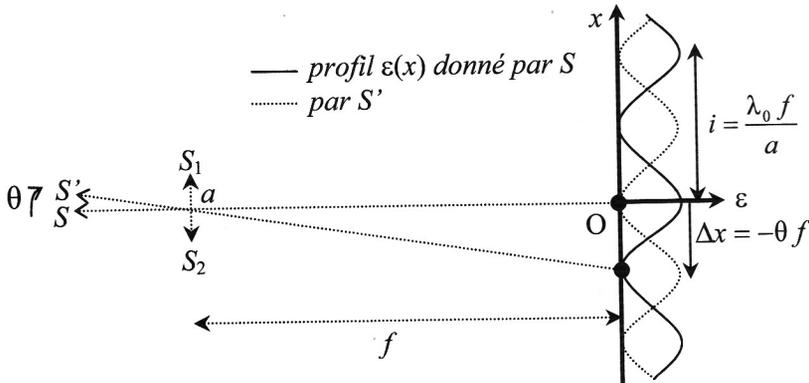
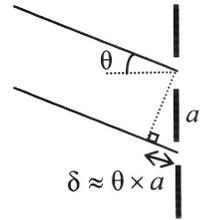


4. Si les rayons arrivent sous un angle θ , le plan des deux trous n'est pas un plan d'onde, il faut donc ajouter une différence de marche supplémentaire $\delta' = \theta \times a$ (voir schéma ci-contre). On a alors :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta + \delta')\right) \right] = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{f} + \theta a\right)\right) \right], \text{ ce qui se}$$

réécrit $\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{x + \theta f}{i}\right) \right]$: la figure d'interférences est la

même qu'avant, translatée de $\Delta x = -\theta f$ comme l'image géométrique de l'étoile (comme le montre par homothétie le schéma ci-dessous).



5. Les deux étoiles n'interagissent pas, donc les ondes qu'elles émettent ont un déphasage aléatoire entre elles. Les deux étoiles sont donc considérées comme deux sources incohérentes, elles ne peuvent pas interférer l'une avec l'autre : l'éclaircissement donné par ces deux étoiles est égal à la somme des éclaircissements donnés par chaque étoile prise individuellement.

6. L'éclaircissement dû aux deux étoiles, situées dans la direction $\theta = \pm \frac{\alpha}{2}$ par rapport à l'axe optique de l'objectif, est la somme de deux sinusôides identiques (cf. courbe tracée question 3)

translatées de $\pm \frac{\alpha}{2} f$ donc décalées l'une par rapport à l'autre de $\Delta x = \alpha f$. Ce décalage a pour effet de diminuer la visibilité des franges d'interférences (il n'y a plus d'annulation totale de l'éclairement : les franges sombres ne sont plus noires). La visibilité des franges devient nulle si les deux sinusoides sont en opposition de phase (franges brillantes d'une étoile superposées aux franges sombres de l'autre), c'est-à-dire si ce décalage est égal à un nombre impair de demi-période $\frac{i}{2}$ (cf. courbes tracées question 4). La valeur la plus faible $\Delta x = \frac{i}{2}$ conduit à $a = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$.

7. La variation de différence de marche d'une étoile ponctuelle à l'autre, espacées d'un angle α , est $\Delta\delta = \alpha a$, ce qui conduit à la variation d'ordre d'interférences $\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda_0} = \frac{\alpha a}{\lambda_0}$. Le critère de

visibilité des interférences $\Delta p < \frac{1}{2}$ conduit donc à $a < \frac{\lambda_0}{2\alpha}$: on retrouve le résultat précédent.

⇒ Méthode 10.7

Notons que la condition $\Delta p = \frac{1}{2}$ correspond à un décalage $\Delta x = \frac{i}{2}$ des deux figures d'interférences : ces deux critères sont équivalents, mais la formulation utilisant l'ordre d'interférences permet d'aboutir plus rapidement au résultat puisqu'elle évite d'avoir à exprimer l'éclairement.

8. Pour pouvoir mesurer $\alpha = 5 \times 10^{-9}$ rad, il faut pouvoir mettre les télescopes à la distance $a = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100$ m ! Pour obtenir la même résolution avec un télescope simple, il faudrait

un diamètre d tel que $\frac{\lambda_0}{d} \approx 5 \times 10^{-9}$ donc $d \approx 200$ m...

✎ Cet exercice s'intéresse au cas d'une étoile double, modélisée par deux sources ponctuelles, ce qui conduit à un contraste des franges qui s'annule et réapparaît périodiquement à chaque fois que le décalage Δx varie d'une interfrange. Pour traiter le cas d'une source étendue, il faut considérer une assemblée continue de sources ponctuelles incohérentes distribuées sur toute la largeur angulaire α de l'étoile, et non juste deux points aux extrémités. Ceci conduit à intégrer l'éclairement calculé pour une source ponctuelle vue sous l'angle θ en variant θ de $-\alpha/2$ à

$\alpha/2$, donc à calculer $\varepsilon_0 \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\theta \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f} + a\theta \right) \right)$. On trouve alors des franges

d'interférences toujours de même interfrange $i = \lambda_0 f / a$ (ne dépend que de la distance a entre les trous, pas de la dimension α de la source) dont le contraste s'annule pour $a = \lambda_0 / \alpha$ (résultat identique à celui du doublet d'étoiles ponctuelles, au facteur 2 près), avec d'autres annulations périodiques mais un contraste qui diminue globalement quand la source devient grande.