Mesures et incertitudes

Formation dans le cadre du programme de Physique-Chimie de CPGE 2021

Maxime Champion - Version du 25 mars 2021

Table des matières

Conformément au programme de CPGE, dans la poursuite de ceux du lycée, les notions présentées se veulent conformes aux règles internationales, définies par le *Bureau International des Poids et Mesure* dans le document fondamental *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (souvent cité en tant que « GUM »).

La lecture de celui-ci est conseillée, d'autant que ce document de référence est en français. Il est disponible librement sur le site :

https://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html

Ce document est issu de ma pratique d'enseignement en classe de PTSI depuis la rentrée scolaire 2020. Ce document est construit autour des informations fournies à mes étudiants pendant les séances de Travaux Pratiques. La maîtrise des notions présentées est donc un objectif de mon enseignement. À part quelques remarques, ce document ne contient pas d'informations hors programme ou hors de portée des étudiants.

Je tiens à remercier pour Adrien Licari, Jean-Baptiste Flament, Jérémy Ferrand et Pierre Jamonneau pour leurs premières discussions et relectures ainsi que la fraction de la liste UPS ayant fourni relectures et remarques constructive. Et bien évidemment, je remercie Julien Browaeys et Nicolas Décamp pour avoir initié cette petite révolution dans nos enseignements expérimentaux, puis pour avoir assumé les longs échanges conduisant à ce document !

Remarque préliminaire

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quelle que soit le niveau de l'expérience. L'objectif de ce document est de fournir un cadre unique à nos étudiants pour toutes les expériences rencontrées au niveau enseignement en CPGE.

« *Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation.* »

GUM 2008 (dernière version) - 3.4.8

1 Variabilité et incertitude-type

1.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure ;

  > **Exemple 1 :** *Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !*

- aux variations de l'environnement ;

  > **Exemple 2 :** *Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.*

- aux instruments de mesure ;

  > **Exemple 3 :** *Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.*

- au processus physique lui-même ;

  > **Exemple 4 :** *Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.*

- et surtout, à la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, permet patiemment de faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un·e étudiant·e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2 L'incertitude-type

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$.
Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Dans ce document, le résultat d'une mesure sera noté **par convention** $\boxed{x \pm u(x)}$.

Attention ! Ce qui suit le $\pm$ est une **incertitude-type**. Il ne s'agit pas d'une « incertitude élargie ». Cette notation synthétique peut prêter à confusion. Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir $x = ...$ d'une part et $u(x) = ...$ d'autre part.

On fera à ce stade deux remarques :

- ▷ pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- ▷ l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété. La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage.

1.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N.

On définit la **moyenne** $\bar{x}$ de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\,.$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i, et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

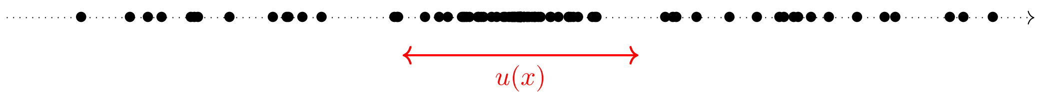


Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

1.4 Comparaison de deux mesures

1.4.1 Définition de l'écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition. L'**écart normalisé** E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par

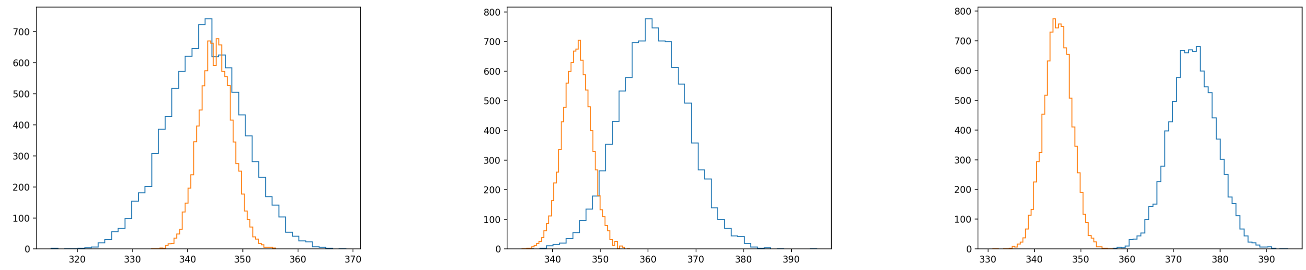
$$\boxed{E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}}\,. \tag{1.1}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété $\boxed{E_N \lesssim 2}$.

> ***Remarque :*** *L'écart normalisé s'appelle aussi parfois « z-score ».*

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

On constate avec les trois histogrammes 2a, 2b et 2c que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Si elles se chevauchent, cela veut dire qu'il est possible que les deux processus de mesure conduisent au même résultat.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Fig. 2 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

1.4.2 Interprétation

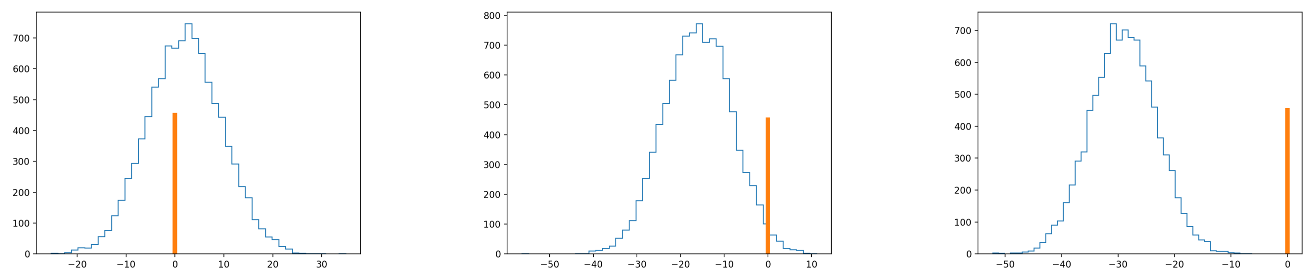
Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.

Pour respecter cette définition, prenons deux valeurs expérimentales que l'on souhaite comparer m_1 et m_2, d'incertitudes-type $u(m_1)$ et $u(m_2)$. Si m_1 et m_2 peuvent être considérées comme compatibles, cela implique que la valeur 0 n'est éloignée de $m_1 - m_2$ que de quelques $u(m_1 - m_2)$.

On admet pour l'instant que $u(m_1 - m_2) = \sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}$ (ce résultat est discuté dans la partie 3.1).

Ainsi, E_N compare $m_1 - m_2 - 0$ et $u(m_1 - m_2)$. Autrement dit, ce rapport donne le nombre d'incertitudes-type séparant 0 de $m_1 - m_2$. Si ce nombre est trop grand, 0 n'est pas compatible avec $m_1 - m_2$ et donc m_1 et m_2 ne sont pas compatibles.

Dans les trois figures 3a, 3b et 3c, la barre verticale représente la valeur 0. On constate bien que, si E_N est trop grand, alors cela implique que la valeur 0 est séparée de tous les points de mesure d'un trop grand nombre de fois l'incertitude-type.



(a) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2a.

(b) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2b.

(c) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec avec les distributions de la figure 2c.

Fig. 3 – Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point.

2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x}-\Delta, \bar{x}+\Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}}$.

Cette formule sera discutée en détail dans la partie méthode de ce chapitre. Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x}-\Delta, \bar{x}+\Delta]$.

Insistons sur deux remarques :

- L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25\,\mathrm{mm}$, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5\,\mathrm{mm}$. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1\,\mathrm{mm}$.
- Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

Comment concilier l'évaluation de type B de l'incertitude-type et le traitement statistique ?

L'évaluation de l'incertitude-type d'une mesure en prenant l'écart-type de la distribution correspond à une évaluation expérimentale de l'incertitude-type. Ainsi, on reproduit la mesure, on constate la variabilité et on la mesure grâce à sa définition. Toutefois, pour que cette mesure soit correcte, il faut que l'écart-type d'un nombre limité de points donne une bonne estimation de l'incertitude, ce qui n'est jamais certain.

> ***Remarque :*** *Il faut aussi que les mesures soient totalement indépendantes. Ainsi, un résultat précédent ne doit pas biaiser une mesure suivante en cherchant un résultat « dans une zone connue ».*

L'évaluation de type B correspond à une évaluation majoritairement théorique de la même incertitude-type. En effet, à l'aide d'informations partielles sur le protocole de mesure, on cherche à estimer la variabilité de la mesure. Il s'agit donc d'un processus délicat nécessitant un travail de modélisation. Ce travail est souvent plus complexe à réaliser que l'expérience car toutes les causes de variabilités doivent être anticipées et réfléchies.

Ces deux évaluations correspondent donc à deux façons différentes d'estimer l'incertitude. Ces deux estimations doivent être compatibles, à condition que l'estimation expérimentale soit correctement réalisée et que la modélisation théorique décrive correctement la réalité.

On observe en pratique plusieurs situations :

- **Si l'incertitude statistique est du même ordre de grandeur que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a intégré toutes les variabilités de l'expérience, et cela implique que l'on sait précisément pourquoi la mesure est variable car les causes d'incertitudes sont contrôlées.
- **Si l'incertitude statistique est plus grande que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude n'a pas intégré toutes les causes de variabilités de l'expérience, certaines ont pu être oubliées. L'incertitude expérimentale est donc une bonne estimation globale de la variabilité de l'expérience.
- **Si l'incertitude statistique est plus petite que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a surestimé la variabilité de la mesure. En effet, si l'estimation théorique est correcte, cette variabilité doit apparaître en reproduisant la mesure.

> ***Exemple 5 :*** *Prenons une expérience de mesure de distance focale d'une lentille mince convergente. Un étudiant réalise vingt mesures de positions d'objet et d'image puis, en appliquant la relation de conjugaison, il en déduit vingt valeurs de la distance focale. En réalisant un traitement statistique, il mesure l'écart-type de la distribution de ces distances focales* $u(f') = 0.15\,\mathrm{cm}$.
>
> *Ensuite, cet étudiant consciencieux estime la précision de la mesure de la position de l'objet à 1 cm et la précision de la positon de l'image à 3 cm car il lui semble que l'image reste nette sur une plage assez large. À l'aide d'une simulation Monte-Carlo, il en déduit que l'incertitude de type B vaut* $u(f') = 0.32\,\mathrm{cm}$.
>
> *Ainsi, en estimant la précision sur les positions, l'étudiant estime une variabilité qui est le double de la variabilité observée. L'étudiant estime donc une variabilité qui n'est pas observée. Les incertitudes sur les mesures des positions sont donc sur-estimées.*
>
> *Qui plus est, en conduisant le calcul d'incertitude de type A décrite au paragraphe suivant, l'incertitude finale sur la moyenne est donnée par* $u(\bar{f'}) = u(f')/\sqrt{20} = 0.033\,\mathrm{cm}$. *Le calcul d'incertitude de type B a donc donné une incertitude largement surestimée et son estimation a pris un temps certain à l'étudiant.*

Ainsi, l'estimation de type B de l'incertitude-type permet de vérifier si on maîtrise bien toutes les causes de variabilités de l'expérience. Toutefois, si on a accès à l'incertitude statistique, l'estimation de l'incertitude de type B au niveau CPGE prend un temps certain et est souvent surestimée. Ainsi, lorsque cela est possible, on pourra se satisfaire de l'incertitude statistique.

> ***Remarque :*** *À un niveau universitaire de traitement des incertitudes, on choisit généralement de faire une moyenne pondérée. Les points de mesures de forte incertitude-type individuelle ont alors un poids moins fort dans l'estimation de la moyenne. Ainsi, même si elle n'est pas nécessaire à notre niveau, l'estimation des incertitude-types sur chaque point de mesure permet une meilleure estimation de la valeur finale.*

2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous **changeons donc d'expérience**, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$ la moyenne de la distribution et avec $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}}$.

Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique.

3 Les incertitudes-type composées

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

3.1 Incertitude-type composées de type somme

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$. L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$\boxed{u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}}\,. \tag{3.1}$$

3.2 Incertitudes-type composées de type produit

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\boxed{\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}\,. \tag{3.2}$$

3.3 Incertitudes-type composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type.