

MÉTHODE D'ÉVALUATION

L'avenir des incertitudes de mesure passe par Monte-Carlo

Le résultat du mesurage d'une grandeur physique n'a de sens que s'il est associé à une indication quantitative sur la qualité du résultat. Les métrologues disposent depuis quelques années d'une méthode de référence, que l'on appelle le *Guide to the expression of uncertainty in measurement* ou GUM, pour leur permettre d'évaluer les incertitudes de mesure de leurs équipements. Cette méthode a toutefois des limites et elle n'est alors plus forcément adaptée à la complexification des essais et des mesures actuels. C'est l'une des raisons pour lesquelles le *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM) a ajouté la méthode numérique de Monte-Carlo au travers du supplément 1 du GUM.

Même avec l'appareil le plus perfectionné au monde, les mesures obtenues avec ce dernier ne seront jamais rigoureusement exactes. Elles seront toujours entachées d'erreurs plus ou moins importantes, selon le protocole choisi, le rôle de l'opérateur... Le résultat du mesurage d'une grandeur physique, quelle qu'elle soit d'ailleurs, n'a de sens que s'il est associé à une indication quantitative sur la qualité du résultat. Il s'agit de permettre aux personnes

qui l'utiliseront d'estimer la fiabilité de la valeur. En l'absence d'une telle indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés entre eux ou par rapport aux valeurs de référence données dans une spécification, une norme, etc. Depuis 1995, et l'apparition de la première version du *Guide to the expression of uncertainty in measurement* (GUM) ou *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, les métrologues et autres utilisateurs disposent d'une méthodologie unifiée.

Le GUM affiche quelques limites

Le *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM), le comité dépendant du Bureau international des poids et mesures (BIPM) en charge des travaux sur le GUM, avait notamment mis l'accent sur la facilité de compréhension de la procédure. Le document est entre autres assez directif et il a été traduit en français, cela ayant ainsi permis de rendre très larges l'acceptation et la diffusion du GUM dans l'industrie. Avec une formation minimale adéquate, un non-spécialiste peut en effet dérouler la procédure définie dans le guide via un tableur Excel, par exemple. Le GUM est ainsi devenu le document de référence pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude du résultat d'un mesurage. Il est d'ailleurs préconisé en France par le Cofrac et, aujourd'hui, largement répandu dans les laboratoires de métrologie et d'es-

sais, ainsi que dans de nombreux secteurs industriels. Il existe toutefois d'autres techniques pouvant être employées, si cela est justifié, comme les méthodes bayésiennes⁽¹⁾ ou les simulations de Monte-Carlo. Son bon côté opérationnel, c'est-à-dire la facilité à être mis en œuvre, ne doit en effet pas occulter les différentes limites du guide pour l'expression de l'incertitude de mesure. Il s'appuie sur la loi de propagation des variances pour le calcul de l'incertitude type composée qui est estimée à partir d'un développement de Taylor du 1^{er} ordre (approximation linéaire) appliqué au modèle du processus de mesure :

$$v(y) = \sum_{i=1}^N (\partial f / \partial x_i)^2 v(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)$$

où v est la variance, en fait le carré de l'incertitude type composée; y est la variable associée à la grandeur Y ; la dérivée partielle est le modèle dérivable; x est l'entrée; la covariance (cov) peut être vue comme le moment centré conjoint d'ordre 1 de deux variables aléatoires. Signalons que le GUM prend également en compte des développe-

ments de Taylor du 2^e ordre (approximation quadratique), voire au-delà, mais les calculs s'en trouvent grandement compliqués.

Dans le cas d'une approximation linéaire (développement de Taylor au 1^{er} ordre), le calcul requiert la validité d'un certain nombre d'hypothèses mathématiques. Le modèle ne doit d'abord pas présenter de non-linéarité significative. Dans le cas contraire, les hypothèses de départ et donc l'approximation linéaire ne sont alors plus valables. Les dispersions observées autour des points nominaux doivent, quant à elles, à la fois être faibles pour chacune des variables du processus de mesure, être comparables du point de vue de leur ordre de grandeur et présenter des distributions symétriques. Pour finir, la distribution de la grandeur de sortie du modèle doit présenter un profil gaussien pour un calcul et une interprétation aisés de la valeur du facteur d'élargissement k .

Lorsqu'on utilise la méthode d'évaluation de l'incertitude du GUM, on se doit d'exprimer la valeur y attribuée au mesurande Y avec une incertitude élargie U . Celle-ci est une grandeur définissant un intervalle symétrique autour du résultat d'un mesurage, dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pouvaient être attribuées raisonnablement au mesurande. U s'obtient en multipliant l'incertitude type composée u_c associée à la valeur mesurée – u_c est la racine carrée de la variance $v(y)$ – par un facteur d'élargissement k (selon l'ISO/CEI Guide 99:2007). Le choix de ce facteur k peut toutefois être délicat. L'incertitude élargie U n'est pas un intervalle de confiance, mais il existe un consensus, celui de prendre une valeur de k égale à 2 pour la majorité des calculs d'incertitude. Cette valeur n'est pas prise au hasard. Dans le cas d'une loi normale (loi de Gauss), ce qui est une hypothèse implicite dans notre cas, une valeur de k de 1,96 correspond en effet à un niveau de confiance de 95 %. Avec une valeur de k de 3, le taux de confiance grimpe à plus de 99 %...

S'il veut donner du sens à ses résultats de mesure, l'utilisateur doit donc s'imposer une

certaine rigueur mathématique pour appréhender les hypothèses de départ. Ou alors il peut se tourner vers les simulations de Monte-Carlo. Cette méthode numérique permet en effet de traiter les cas où toutes les hypothèses de la loi de propagation des variances et les concepts associés ne sont pas vérifiés. Le principe des simulations de Monte-Carlo n'est plus de propager l'incertitude via le modèle, mais la fonction de densité de probabilité (PDF) des grandeurs d'entrée. La PDF de chacune de ces dernières étant connue, celle du mesurande peut être obtenue d'une manière analytique par la formule de Markov. En pratique, excepté pour des modèles très simples, l'intégrale multiple ne peut pas être évaluée analytiquement. C'est la raison pour laquelle le supplément 1 du GUM fournit une méthode numérique mettant en application la propagation des distributions via la méthode de Monte-Carlo.

Cette approche numérique peut se résumer en quatre étapes. L'étape 1 concerne l'analyse du processus de mesure afin, dans un premier temps, de définir le mesurande (mode opératoire, procédures d'essais, grandeurs d'influence). Elle est primordiale, car elle conditionne la réussite de tout ce qui va suivre, mais elle reste inchangée quelle que soit la méthode mise en œuvre (GUM, Monte-Carlo, etc.). Cette étape demande un

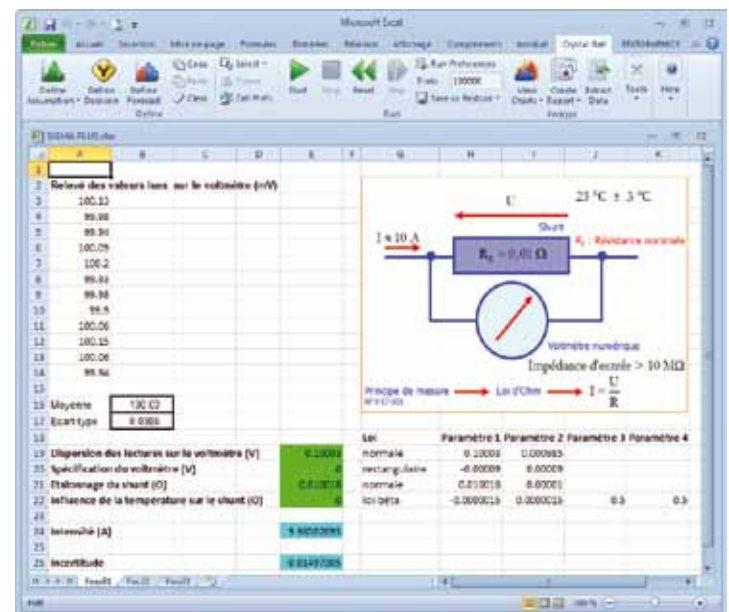
examen et une connaissance approfondis de la grandeur mesurée, du processus de mesure et du mode opératoire utilisé (expertise métier). Comme il s'agit aussi de la phase la plus chronophage de la démarche, il peut être pertinent que le métrologue s'associe à une autre personne, un statisticien par exemple. Après avoir bien défini le mesurande (sans oublier, par exemple, de spécifier les conditions d'environnement de la mesure), l'analyse du processus de mesure permet de lister l'ensemble des grandeurs d'influence. Un diagramme des 5M est un moyen pratique de synthétiser cette information. Il reste ensuite à écrire le modèle mathématique qui relie le mesurande aux grandeurs d'influence sous la forme : $Y = f(X_1, \dots, X_n)$.

Mélanger informations métiers et statistiques

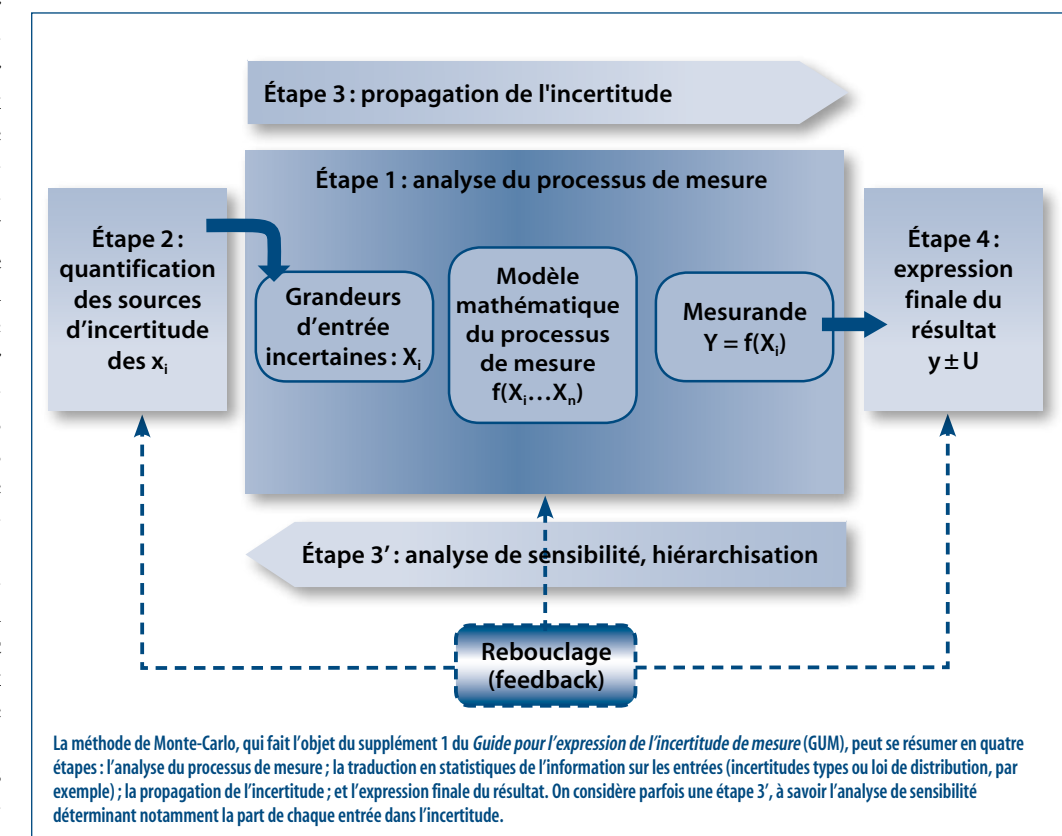
Une fois l'analyse du processus de mesure faite, le métrologue peut passer au choix des distributions pour les grandeurs d'entrée du modèle. L'étape qui est en fait la traduction en statistiques de l'information sur les entrées revêt une grande importance dans la méthode de propagation des distributions par simulations de Monte-Carlo. Pour disposer des connaissances sur les grandeurs d'entrée auxquelles on veut associer une variable aléatoire régie par la loi de probabilité →

L'essentiel

- Les métrologues, les statisticiens et autres utilisateurs s'appuient couramment sur le GUM pour évaluer et exprimer l'incertitude associée au résultat d'un mesurage.
- Si le GUM est devenu la référence, d'autres méthodes peuvent être mises en œuvre, comme les simulations de Monte-Carlo.
- Cette méthode qui fait l'objet d'un supplément permet de lever les hypothèses de départ qu'impose le GUM.



Pour évaluer l'incertitude de mesure de leurs moyens, les métrologues utilisent de plus en plus une méthode de propagation de distribution, à savoir les simulations de Monte-Carlo, en complément de la méthode de référence (GUM).



Exemple d'application : calcul pour le modèle d'un étalonnage de masse

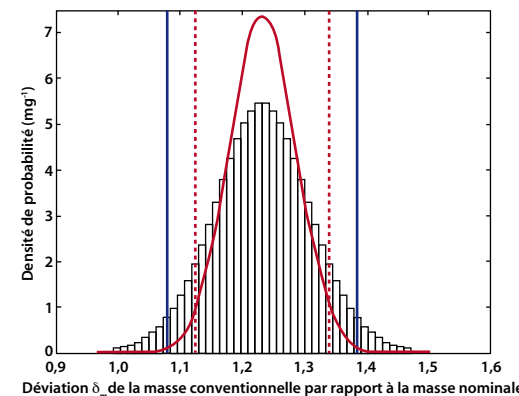
Considérons l'étalonnage d'une masse M de densité massique ρ_M par rapport à une masse de référence R de densité massique ρ_R et qui a essentiellement la même masse, avec une balance et l'opération se faisant dans l'air ambiant de densité massique ρ_a . En utilisant le principe d'Archimède et certaines approximations, on obtient le modèle suivant :

$$\delta m = (m_{R,C} + \delta m_{R,C}) \left[\left(1 + (\rho_a - \rho_{ao}) \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right) - m_{nom} \right]$$

où $m_{R,C}$ et $\delta m_{R,C}$ sont deux distributions gaussiennes d'espérance de 100 000 mg et de déviation standard de 0,050 mg pour la première, et de 1,234 mg et de 0,020 mg pour la seconde ; ρ_a , ρ_M et ρ_R sont trois distributions rectangulaires d'espérance de 1,20 kg/m³ et de demi-hauteur de 0,10 kg/m³ pour la première, de 8000 kg/m³ et de 1 000 kg/m³ pour la seconde, et de 8000 kg/m³ et de demi-hauteur de 50 kg/m³ pour la troisième ; ρ_{ao} vaut 1,2 kg/m³ et m_{nom} vaut 100 g. Les résultats obtenus avec la méthode du GUM avec des termes du premier ordre (GUF₁), les simulations de Monte-Carlo (MCM) et la méthode du GUM avec des termes d'un ordre supérieur (GUF₂) sont résumés dans le tableau ci-dessous, où $\hat{\delta m}$ est une estimation de δm , $u(\hat{\delta m})$ est l'incertitude standard associée. Le graphique représente les approximations de la fonction de densité de probabilité (PDF) pour une quantité δm obtenue avec la méthode GUM (termes du premier ordre ; courbe en rouge) et les simulations de Monte-Carlo. Les paires de traits verticaux représentent les intervalles de couverture à 95 % respectifs.

Méthode	$\hat{\delta m}$ (mg)	$u(\hat{\delta m})$ (mg)	Intervalle à 95 % le plus faible	Différence basse (mg)	Différence haute (mg)	GUF validé ($\delta = 0,005$) ?
GUF ₁	1,234	0,0539	[1,1285, 1,3395]	0,0451	0,0430	Non
MCM	1,2341	0,0754	[1,0834, 1,3825]			
GUF ₂	1,2340	0,0750	[1,0870, 1,3810]	0,0036	0,0015	Oui

Source : Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method (JCGM 101:2008)



→ la mieux adaptée (loi normale, loi rectangulaire, distribution conjointe...), un véritable dialogue doit s'établir entre les gens du métier, l'éventuel statisticien et le métrologue. L'objectif commun est de rassembler l'ensemble des informations (données observées, constats de vérification, certification d'étalonnage, avis d'expert, fiches techniques...) et de les quantifier. Il faut savoir que, dans l'approche du GUM, on attribue déjà une distribution à une grandeur d'entrée lorsque celle-ci est évaluée via une méthode de type B. On choisit en effet une loi de probabilité basée sur l'information disponible sur la grandeur d'entrée, puis on déduit l'incertitude type de cette grandeur comme étant l'écart type de la distribution choisie. La formule de propagation de l'incertitude utilise donc ce paramètre unique pour calculer l'incertitude type de la grandeur de sortie, indépendamment de la forme de la loi de probabilité. Si la distribution est résumée à un unique paramètre dans la méthode du GUM (l'écart type si on met de côté le résultat), on cherche, avec les simulations de Monte-Carlo, à propager la distribution complète de chaque grandeur d'entrée dans le modèle pour obtenir directement celle de la grandeur de sortie. L'information fournie en entrée est alors

bien plus riche (une distribution au lieu d'un écart type), ce qui permet d'obtenir également une information qui l'est tout autant sur la grandeur de sortie.

Analyse de sensibilité et optimisation

En plus des lois de chaque variable aléatoire, la définition d'une structure de dépendance peut être également nécessaire pour prendre en compte des grandeurs d'entrée liées. La prise en compte des corrélations est facilement réalisable dans le cas où les grandeurs d'entrée corrélées sont distribuées suivant des lois normales. Elles sont traitées ensemble au sein d'un même vecteur auquel on attribue une loi normale multivariée. La génération de lois de probabilité jointes non gaussiennes est plus difficile à mettre en œuvre et nécessite une modélisation mathématique plus élaborée, via des copules⁽²⁾, pour être appliquée de manière adéquate. Si les copules sont un concept que l'on rencontre assez souvent dans les industries aéronautique et nucléaire, elles font seulement leurs premiers pas dans le domaine de la mesure en raison de la complexification des essais et des mesures. Lorsque toutes les distributions des grandeurs d'entrée ont été définies, on peut alors

dérouler l'étape 3 qui consiste à simuler numériquement des échantillons de valeurs possibles pour les grandeurs d'entrée, puis à en déduire les valeurs correspondantes pour la grandeur de sortie. Cela nécessite avant tout de disposer d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Comme il existe de nombreux algorithmes de génération, il faut s'assurer de la qualité du générateur utilisé et de son adéquation à certaines exigences. Il s'agit d'une grande période pour ne pas reproduire la même séquence de valeurs avant un nombre très élevé de tirages, également de l'indépendance entre les valeurs créées, et de l'adéquation de l'échantillon généré d'une grandeur d'entrée avec la loi de probabilité qu'on souhaite simuler.

Au niveau de la propagation des distributions par la méthode de Monte-Carlo, on se donne, dans un premier temps, un nombre M de simulations. Le supplément 1 du GUM recommande une valeur de M égale à un million de simulations, de façon à s'assurer que la distribution empirique de la grandeur de sortie est suffisamment stable. A chaque pas de l'algorithme de Monte-Carlo, on tire une valeur dans chaque distribution, puis on calcule celle de la grandeur de sortie correspondant à ce jeu de valeurs via le modèle mathématique f . On obtient ainsi au total

M valeurs possibles pour les grandeurs d'entrée, distribuées suivant les lois de probabilité définies à l'étape 2, et M valeurs possibles pour la grandeur de sortie.

Dans le cas où un million de simulations sont trop coûteuses en temps de calcul ou trop longues à converger, on peut envisager une procédure adaptative dans laquelle on simule un petit échantillon, par exemple 10 000 valeurs, puis un second de même taille dans le but de comparer les deux estimations d'écart type obtenues (méthode quasi Monte-Carlo). Si la différence entre les deux valeurs obtenues est satisfaisante au regard de la précision numérique souhaitée, on arrête la simulation. Dans le cas contraire, on simule un nouvel échantillon de 10 000 valeurs, puis on réitère la procédure jusqu'à ce que la convergence de l'algorithme de Monte-Carlo soit satisfaisante au regard de la précision numérique souhaitée. On considère parfois une étape 3' qui n'est pas dans le GUM mais qui en est un corollaire. Il s'agit de l'analyse de sensibilité permettant notamment de déterminer la part de chaque entrée dans l'incertitude, ce qui autorise une optimisation plus pertinente de l'approximation et donc du processus de mesure, ou les grandeurs les plus influentes pour investir d'une manière la plus optimale. Pour terminer, la quatrième étape consiste à résumer l'information que constituent ces M valeurs possibles pour la grandeur de sortie, et à obtenir l'expression finale du résultat. Pour des raisons de cohérence avec la méthode de référence, on doit fournir au minimum les trois informations suivantes. La moyenne empirique, calculée à partir des M valeurs obtenues pour la grandeur de sortie, sera la valeur y attri-

buée au mesurande. Les deux autres informations sont l'écart type des M valeurs obtenues pris comme incertitude type, et les bornes d'un intervalle élargi à 95 % et construit à partir des quantiles⁽³⁾ empiriques des M valeurs obtenues.

Pas d'hypothèses de départ "fortes"

Il n'est donc plus question de s'interroger sur le choix du facteur d'élargissement k pour le passage entre incertitude type composée et incertitude élargie, comme c'est le cas avec la méthode GUM. Parmi les autres avantages des simulations de Monte-Carlo, signalons l'absence de calcul de dérivée partielle nécessaire et la disparition de limites de validité de la méthode liées à la non-linéarité du modèle du processus de mesure et/ou aux variations "fortes" sur les grandeurs d'entrée. Comme ils n'ont également plus à se poser de questions sur le type de distribution représentant la sortie (gaussienne ou non), les utilisateurs peuvent ainsi s'appuyer sur un cadre mathématique universel et un éventail plus grand, en termes d'applications, que celui de la méthode du GUM. Il est même possible, et recommandé, de mettre en œuvre les résultats de la méthode de Monte-Carlo pour valider ceux obtenus par la méthode du GUM.

Du point de vue opérationnel, la méthode de propagation de distribution (Monte-Carlo) n'est certes pas aussi simple d'utilisation qu'une méthode de propagation des incertitudes (GUM ; également désignée méthode de cumul quadratique). Il y a déjà un frein immédiat lié à la langue. Le JCGM n'a pas traduit en français le supplément 1 du GUM, sans compter que le document est très

orienté statistiques. La commission ad hoc de l'Afnor a toutefois en charge d'éditer un fascicule de documentation en français pour rendre l'application plus facile. Les métrologues et autres utilisateurs peuvent aussi s'appuyer sur des outils qui ne requièrent pas forcément des compétences très poussées. Des logiciels comme Crystal Ball d'Oracle, distribué en France par Sigma Plus, ou Matlab de Mathworks, restent relativement accessibles et répondent très bien aux besoins des utilisateurs, si tant qu'ils sont formés. Il suffit que ces outils soient dotés d'un bon générateur de nombres aléatoires et, éventuellement, de fonctions dédiées plus ou moins performantes. Il faut également que ces logiciels soient validés. D'autres outils sont par ailleurs disponibles sur le marché, comme le langage de programmation open source R qui est plutôt destiné aux statisticiens et à la communauté académique, des add-in pour le tableur Excel qui sont toutefois plus ou moins validés. Pour une entreprise, le choix d'une solution d'évaluation des incertitudes de mesure est donc un compromis entre fiabilité et diffusion.

Nicolas Fischer*

(1) Le théorème de Bayes est utilisé dans l'inférence statistique pour actualiser les estimations d'un paramètre quelconque à partir des observations et des lois de probabilité de celles-ci.

(2) En statistiques, une copule est un objet mathématique venant de la théorie des probabilités et qui permet de caractériser la dépendance entre les différentes coordonnées d'une variable aléatoire.

(3) Les quantiles sont des points essentiels pris à des intervalles réguliers verticaux d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire.

(*) Nicolas Fischer est responsable du service Mathématiques et statistiques du Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE).

Calibrateur multifonction Beamex® MC5 Logiciel métrologique Beamex® CMX



Améliorer la qualité de ses étalonnages tout en économisant.

La solution d'étalonnage intégrée Beamex améliore la qualité et l'efficacité de l'ensemble du système d'étalonnage grâce à une gestion plus rapide, plus intelligente et plus précise de l'ensemble des outils et des procédures. Les calibrateurs, stations de travail, logiciels d'étalonnage et services professionnels de Beamex constituent le système automatisé le mieux intégré qui existe.



Dimelco S.A.S
Tel: 33 (0) 3 20 62 06 80
Fax: 33 (0) 3 20 96 95 62
contact.beamex@dimelco.com
www.dimelco.com

beamex
WORLD-CLASS CALIBRATION SOLUTIONS™
info@beamex.com
www.beamex.com